ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2011. Випуск 74. С. 34–40
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2011. Issue 74. P. 34–40

УДК 517.574

ІНТЕГРАЛЬНІ СЕРЕДНІ ФУНКЦІЙ, СПРЯЖЕНИХ ДО СУБГАРМОНІЙНИХ ФУНКЦІЙ. II

Ярослав ВАСИЛЬКІВ, Любомир ПОЛІТИЛО

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: YaVVasylkiv@gmail.com, Ljupol7@gmail.com

Для пари функцій $\mathcal{F}(z) := u(z)+i\breve{u}(z)$, де $u(z)$ – субгармонійна в $\mathbb{C}$ функція, гармонійна в деякому околі точки $z = 0$, $u(0) = 0$, а $\breve{u}(z)$ – спряжена до $u(z)$, суттєво уточнено відомі оцінки q-х інтегральних середніх $m_q(r, \mathcal{F})$ при $1 \leqslant q \leqslant 2$. Для цього використано зображення Васильківа-Кондратюка функції $\breve{u}$ в термінах перетвореня Гільберта для кола та класичну теорему М. Ріса про оцінку q-х середніх ($1 < q < +\infty$) для таких періодичних перетворень Гільберта.

Ключові слова: субгармонійна функція, спряжена функція до субгармонійної функції, лебегові інтегральні середні, характеристика Неванлінни.

1. Вступ. Нехай $u(z)$ субгармонійна в $\mathbb{C}$ функція, гармонійна в деякому околі нуля, $u(0) = 0$, $\mathcal{F}(z) = u(z)+i\breve{u}(z)$, де $\breve{u}(z)$ – функція спряжена до $u(z)$ (див. [1]), $\mathbb{D}_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$, $\overline{\mathbb{D}}_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant R\}$, $0 < R < +\infty$. Приймемо

$$T(r,u) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u^+\left(re^{i\theta}\right)\,d\theta, \qquad m_q(r,\mathcal{F}) = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\mathcal{F}(re^{i\theta})|^q\,d\theta\right)^{1/q},$$

$$u^+(re^{i\theta}) = \max\left\{u\left(re^{i\theta}\right), 0\right\}, \qquad 1 \leqslant q < +\infty, \quad 0 < r < +\infty.$$

В [2] доведено такі твердження.

Теорема А ([2]). *Нехай $0 < r < +\infty$, $0 < \varepsilon(r) \leqslant 1$, $\varepsilon(r)$ – незростаюча на $(0, +\infty)$ функція, $\varepsilon(0) = 1$, $\gamma(r) = 1 + \varepsilon(r)$, u – субгармонійна в $\overline{\mathbb{D}}_{4r}$ функція, гармонійна в деякому околі точки $z = 0$, $u(0) = 0$. Тоді*

$$m_q(r,\mathcal{F}) \leqslant A(q)\,\frac{T(\gamma^2(r)r,u)}{\sqrt[q]{\varepsilon(r)}}, \qquad 1 \leqslant q \leqslant 2, \tag{1}$$

$$m_q(r,\mathcal{F}) \leqslant A(q)\,\frac{\sqrt[q]{\varepsilon(r)}\,T(\gamma^2(r)r,u)}{\varepsilon(r)}, \qquad 2 \leqslant q < +\infty, \tag{2}$$

де $A(q) = 17 \cdot 2^{1-1/q}$ *при* $1 \leqslant q \leqslant 2$ *і* $A(q) = 17\, q^{1-1/q}$ *при* $2 \leqslant q < +\infty$.

Надалі через E позначатимемо множину скінченної логарифмічної міри, тобто таку множину $E \subset [1, +\infty)$, що інтеграл $\int_E d(\log t)$ збігається.

Теорема B ([2])**.** *Нехай* $\varphi(r)$ *– неперервна, додатна, неспадна на* $(0, +\infty)$ *функція,* $\varphi(r) \to +\infty$ *при* $r \to +\infty$, $\int\limits_{t_0}^{+\infty} dr/\varphi(r) < +\infty$ *і виконуються умови теореми A. Тоді*

$$m_q(r, \mathcal{F}) = o\left(T(r,u)\varphi^{1-\alpha}(\log T(r,u))\right), \quad 0 \leqslant \alpha < 1 - 1/q, \quad 1 \leqslant q \leqslant 2, \tag{3}$$

$$m_q(r, \mathcal{F}) = o\left(T(r,u)\varphi^{1-\alpha}(\log T(r,u))\right), \quad 0 \leqslant \alpha < 1/q, \quad 2 \leqslant q + \infty, \tag{4}$$

для кожного такого α *і* $r \to +\infty$ *зовні виняткової множини* E.

Мета нашої праці – уточнити співвідношення (1) та (3). Для цього нам будуть потрібні такі факти. Нехай $\mu[u]$ – міра Ріса функції u ([3, с. 132]), $\widetilde{\bullet}$ – оператор Гільберта для кола (див. [4, с. 108]).

Теорема C ([1])**.** *Нехай* $u(z)$ *– субгармонійна в* $\mathbb{D}_R$ *функція,* $u(0) = 0$, $0 \notin \operatorname{supp} \mu[u]$. *Тоді для довільного* $r \in (0, R)$

$$\breve{u}(re^{i\theta}) = \widetilde{u}(re^{i\theta}) - \widetilde{p}(re^{i\theta})$$

для майже всіх $\theta \in [0, 2\pi]$, *де*

$$\widetilde{p}(re^{i\theta}) = \int\limits_0^r \left(\int\limits_{|a| \leqslant t} \operatorname{Im} \frac{r + te^{i(\theta-\alpha)}}{r - te^{i(\theta-\alpha)}}\, d\mu_a[u] \right) \frac{dt}{t}, \quad \alpha = \arg a.$$

Теорема D ([4, с. 117])**.** *Якщо* $1 < q < +\infty$, $g(e^{i\theta}) \in L^q[0, 2\pi]$, *то*

$$\left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left| \widetilde{g}\left(e^{i\theta}\right) \right|^q d\theta \right)^{1/q} \leqslant M(q) \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left| g\left(e^{i\theta}\right) \right|^q d\theta \right)^{1/q},$$

де

$$M(q) = \begin{cases} \operatorname{tg} \dfrac{\pi}{2q}, & 1 < q \leqslant 2; \\[2ex] \operatorname{ctg} \dfrac{\pi}{2q}, & 2 \leqslant q < +\infty. \end{cases}$$

Теорема E ([5])**.** *Нехай* u *–* δ*-субгармонійна в* $\mathbb{C}$ *функція,* $u(0) = 0$, $\sigma > 1$, $1 \leqslant q < +\infty$, $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$. *Тоді*

$$m_q(r, u) \leqslant \frac{A_q(\sigma)}{(\sigma - 1)^{1/q'}} T(\sigma r, u), \quad r > 0,$$

де

$$A_q(\sigma) = \begin{cases} (\sigma - 1)^{1/q'} + \left(2^{q'+1}(\sqrt{\sigma} + 1)\right)^{1/q'} + (2q\sigma)^{1/q'}, & 2 \leqslant q < +\infty, \\[2ex] 2\left(A_2(\sigma)\right)^{1/q'}, & 1 \leqslant q \leqslant 2. \end{cases}$$

2. Формулювання та доведення основного результату.

Теорема 1. *Нехай* $0 < r < +\infty$, $0 < \delta < \frac{1}{2}$, $0 < \varepsilon(r) < 1$, $\varepsilon(r)$ *– незростаюча на* $(0, +\infty)$ *функція*, $\varepsilon(0) = 1$, $\gamma(r) = 1 + \varepsilon(r)$, u *– субгармонійна в* $\mathbb{C}$ *функція*, $0 \notin \operatorname{supp} \mu[u]$, $u(0) = 0$. *Тоді*

$$m_q(r, \mathcal{F}) \leqslant T\left(\gamma^2(r) r, u\right) \frac{C(q, \delta)}{(\varepsilon(r))^{\delta\left(\frac{2}{q}-1\right)^{+}+1-\frac{1}{q}}}, \quad 1 \leqslant q < +\infty,$$

де $C(q, \delta)$ *– додатна стала така, що* $\lim\limits_{\delta \to +0} C(\bullet, \delta) = +\infty$ *і* $\lim\limits_{q \to +\infty} C(q, \bullet) = +\infty$.

Доведення. У випадку $q \geqslant 2$ правильне співвідношення (2). Тому залишилося розглянути випадок $1 \leqslant q \leqslant 2$. У цьому випадку доведення проведемо за такою схемою:

1) враховуючи теореми C і D та монотонність по q інтегральних середніх, спочатку оцінимо $m_1(r, \mathcal{F})$;

2) враховуючи співвідношення (2) при $q = 2$ та опуклість стосовно $\log q$ лебегових інтегральних середніх $m_q(\bullet, \bullet)$ (див., наприклад, теорему 10.12 з [6])

$$m_q(r, \mathcal{F}) \leqslant \Big(m_1(r, \mathcal{F})\Big)^{(2-q)/q} \Big(m_2(r, \mathcal{F})\Big)^{2(1-1/q)}, \tag{5}$$

оцінимо $m_q(r, \mathcal{F})$ при $1 \leqslant q \leqslant 2$;

3) з оцінки правого боку (5) та (2) отримаємо остаточний результат.

1) Нехай $q = 1$. Застосовуючи теорему C та враховуючи нерівність трикутника і монотонність по q інтегральних середніх, одержимо

$$m_1(r, \mathcal{F}) \leqslant m_1(r, u) + m_1(r, \tilde{u}) + m_1(r, \widetilde{p}) \leqslant m_{1+\delta}(r, u) + m_{1+\delta}(r, \tilde{u}) + m_1(r, \widetilde{p}).$$

З огляду на теорему E для всіх $1 \leqslant q < +\infty$ знаходимо

$$m_{1+\delta}(r, u) \leqslant \frac{C_0(\delta)}{\varepsilon^{\frac{\delta}{1+\delta}}(r)} T\left(\gamma^2(r) r, u\right) \leqslant \frac{C_0(\delta)}{\varepsilon^{\delta}(r)} T\left(\gamma^2(r) r, u\right), \tag{6}$$

де $C_0(\delta) = 2(A_2(\gamma(r)))^{\delta/(1+\delta)}$.

Для $m_{1+\delta}(r, \breve{u})$, враховуючи теореми D і E, одержуємо

$$m_{1+\delta}(r, \tilde{u}) \leqslant M(1+\delta) m_{1+\delta}(r, u) \leqslant \frac{C_1(\delta)}{\varepsilon^{\frac{\delta}{1+\delta}}(r)} T\left(\gamma^2(r) r, u\right) \leqslant \frac{C_1(\delta)}{\varepsilon^{\delta}(r)} T\left(\gamma^2(r) r, u\right), \tag{7}$$

де $C_1(\delta) = 2M(1+\delta) \cdot (A_2(\gamma(r)))^{\delta/(1+\delta)}$.

Далі для $m_1(r, \widetilde{p})$ отримуємо такі оцінки:

$$m_1(r, \widetilde{p}) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |\widetilde{p}(re^{i\theta})| \, d\theta \leqslant \int\limits_0^r \frac{dt}{t} \int\limits_{|a| \leqslant t} \frac{d\mu_a[u]}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left| \frac{2rt \sin(\theta - \alpha)}{r^2 + t^2 - 2rt \cos(\theta - \alpha)} \right| d\theta =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int\limits_0^r \frac{dt}{t} \int\limits_{|a| \leqslant t} \log \frac{r+t}{r-t} \, d\mu_a[u] \leqslant \frac{2}{\pi} \int\limits_0^r \log \frac{r+t}{r-t} \cdot \frac{n(t, u)}{t} \, dt = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^r \frac{n(t, u)}{t} \int\limits_{r-t}^{r+t} \frac{dx}{x} \, dt, \tag{8}$$

де $n(t, u) = \int\limits_{|a| \leqslant t} d\,\mu_a[u]$.

В останньому інтегралі змінимо порядок інтегрування. Тоді

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^r \frac{n(t,u)}{t}\int\limits_{r-t}^{r+t}\frac{dx}{x}\,dt=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^r\frac{dx}{x}\int\limits_{r-x}^{r}\frac{n(t,u)}{t}\,dt+\frac{2}{\pi}\int\limits_r^{2r}\frac{dx}{x}\int\limits_{x-r}^{r}\frac{n(t,u)}{t}\,dt=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{r\varepsilon(r)}\frac{dx}{x}\int\limits_{r-x}^{r}\frac{n(t,u)}{t}\,dt+\frac{2}{\pi}\int\limits_{r\varepsilon(r)}^{r}\frac{dx}{x}\int\limits_{r-x}^{r}\frac{n(t,u)}{t}\,dt+\frac{2}{\pi}\int\limits_r^{2r}\frac{dx}{x}\int\limits_{x-r}^{r}\frac{n(t,u)}{t}\,dt. \qquad (9)$$

Оскільки $N(r,u)=\int\limits_0^r\frac{n(t,u)}{t}\,dt=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}u\left(re^{i\theta}\right)\,d\theta\leqslant T(r,u)$, то два останні інтеграли з (9) оцінимо так:

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_{r\varepsilon(r)}^{r}\frac{dx}{x}\int\limits_{r-x}^{r}\frac{n(t,u)}{t}\,dt=\frac{2}{\pi}\int\limits_{r\varepsilon(r)}^{r}\frac{N(r,u)-N(r-x,u)}{x}\,dx\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2N(r,u)}{\pi}\log\frac{1}{\varepsilon(r)}\leqslant\frac{2}{\pi}T(\gamma^2(r)r,u)\log\frac{1}{\varepsilon(r)}, \qquad (10)$$

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_r^{2r}\frac{dx}{x}\int\limits_{x-r}^{r}\frac{n(t,u)}{t}\,dt=\frac{2}{\pi}\int\limits_r^{2r}\frac{N(r,u)-N(x-r,u)}{x}\,dx\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2\log 2\;N(r,u)}{\pi}\leqslant\frac{2}{\pi}T(\gamma^2(r)r,u). \qquad (11)$$

Залишилось оцінити

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{r\varepsilon(r)}\frac{dx}{x}\int\limits_{r-x}^{r}\frac{n(t,u)}{t}\,dt\leqslant\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{r\varepsilon(r)}\frac{n(r,u)\,dx}{x}\int\limits_{r-x}^{r}\frac{dt}{t}\leqslant\frac{2n(r,u)}{\pi}\int\limits_0^{r\varepsilon(r)}\frac{dx}{r-x}=$$

$$=\frac{2n(r,u)\varepsilon(r)}{\pi(1-\varepsilon(r))}\leqslant\frac{4}{\pi}N\left((1+\varepsilon(r))\,r,u\right)\leqslant\frac{2}{\pi}T(\gamma^2(r)r,u). \qquad (12)$$

Враховуючи (6)-(12), одержимо

$$m_1\left(r,\mathcal{F}\right)\leqslant T\left(\gamma^2(r)r,u\right)\left[\frac{C_0(\delta)}{\varepsilon^\delta(r)}+\frac{C_1(\delta)}{\varepsilon^\delta(r)}+\frac{4}{\pi}+\frac{2}{\pi}\log\frac{1}{\varepsilon(r)}\right]\leqslant$$

$$\leqslant\frac{C_2(\delta)}{\varepsilon^\delta(r)}T\left(\gamma^2(r)r,u\right), \qquad (13)$$

де $C_2(\delta)>0$ і $\lim\limits_{\delta\to+0}C_2(\delta)=+\infty$.

2) Нехай $1\leqslant q\leqslant 2$. Підставивши (2) при $q=2$ та (13) в (5), знаходимо

$$m_q(r,\mathcal{F})\leqslant\left(\frac{C_2(\delta)}{\varepsilon^\delta(r)}T\left(\gamma^2(r)r,u\right)\right)^{(2-q)/q}\left(17\left(\frac{2}{\varepsilon(r)}\right)^{1/2}T(\gamma^2(r)r,u)\right)^{2(1-1/q)}\leqslant$$

$$\leqslant 17 \cdot (2)^{(1-1/q)} \left(C_2(\delta)\right)^{\frac{2}{q}-1} \frac{T(\gamma^2(r)r, u)}{(\varepsilon(r))^{\delta\left(\frac{2}{q}-1\right)+1-\frac{1}{q}}}. \tag{14}$$

3) З урахуванням (14) і (2) остаточно отримуємо

$$m_q(r, \mathcal{F}) \leqslant 17 \left(C_2(\delta)\right)^{\left(\frac{2}{q}-1\right)^+} (\max\{q, 2\})^{(1-1/q)} \frac{T(\gamma^2(r)r, u)}{(\varepsilon(r))^{\delta\left(\frac{2}{q}-1\right)^+ +1-\frac{1}{q}}} =$$

$$= T\left(\gamma^2(r)r, u\right) \frac{C(q, \delta)}{(\varepsilon(r))^{\delta\left(\frac{2}{q}-1\right)^+ +1-\frac{1}{q}}}, \quad 1 \leqslant q < +\infty,$$

що і потрібно було довести. □

Із леми 5 з [2] та теореми 1 випливають такі наслідки.

Наслідок 1. *Нехай* $\varphi(r)$ *– неперервна, додатна, неспадна на* $(0, +\infty)$ *функція,* $\varphi(r) \to +\infty$ *при* $r \to +\infty$, $\int\limits_{t_0}^{+\infty} dr/\varphi(r) < +\infty$ *і виконуються умови теореми 1. Тоді*

$$m_q(r, \mathcal{F}) = o\left(T(r, u)\varphi^{\alpha}(\log T(r, u))\right), r \to +\infty, r \notin E,$$

де $\delta\left(\dfrac{2}{q}-1\right)^+ + 1 - \dfrac{1}{q} < \alpha \leqslant 1,\ 1 \leqslant q < +\infty,\ 0 < \delta < \frac{1}{2},$

Доведення. За теоремою 1 одержали

$$m_q(r, \mathcal{F}) \leqslant T\left(\gamma^2(r)r, u\right) \frac{C(q, \delta)}{(\varepsilon(r))^{1-\frac{1}{q}+\delta\left(\frac{2}{q}-1\right)^+}}, \qquad q \in [1, +\infty).$$

Отож, для завершення доведення цього наслідку достатньо застосувати лему 5 з [2] з $\gamma^2(r) = (1 + 1/\varphi(\log(T(r, u))))$; звідси $\varepsilon(r) \sim \dfrac{1}{2\varphi(\log(T(r, u)))}$ при $r \to +\infty$. □

Наслідок 2. *Нехай виконуються умови наслідку 1. Тоді для всіх* $q \in [1, +\infty)$

$$m_q(r, u^+) = o\left(T(r, u)\varphi(\log T(r, u))\right), \qquad r \to +\infty, \qquad r \notin E.$$

Доведення. Зауважимо, що для всіх $q \in [1, +\infty),\ 0 < r < +\infty$ маємо

$$m_q(r, u^+) \leqslant m_q(r, u) \leqslant m_q(r, \mathcal{F}).$$

Звідси та з наслідку 1 при $\alpha = 1$ отримуємо потрібне твердження. □

Зауваження 1. З результатів праць [7], [8] випливає, що у випадку $u = \log|f|$, f – ціла функція нескінченного порядку, $f(0) = 1$, правильна така асимптотична рівність

$$\log M(r, f) = o\left(T(r, f)\varphi\left(\log\left(T\left(r, f\right)\right)\right)\right), \qquad r \to +\infty, \qquad r \notin E,$$

де $\log M(r, f) = \max\limits_{|z|=r} \log|f(z)|$.

Список використаної літератури

1. *Kondratyuk A.A.* Conjugate of subhfrmonic function / *Kondratyuk A.A., Vasyl'kiv Ya.V.* // Mat. studii. – 2000. – Vol. 13, №2. – P. 173-180.
2. *Васильків Я.В.* Інтегральні середні функцій, спряжених до субгармонійних функцій / *Васильків Я.В., Політило Л.Р.* // Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. – 2010. – Вип. 72. – С. 47-62.
3. *Хейман У.* Субгармонические функции /*Хейман У., Кеннеди П.* – М., 1980.
4. *Гарнетт Дж.* Ограниченные аналитические функции: в 2 т. /*Гарнетт Дж.* – М., 1984.
5. *Кондратюк А.А.* Порівняння лебегових середніх і неванліннівської характеристики субгармонійних функцій /*Кондратюк А.А., Тарасюк С.І.* // Мат. студії. – 1992. – Вип. 1. – С. 74-80.
6. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: в 2 т. /*Зигмунд А.* – М., 1965.
7. *Марченко И.И.* Возрастание целых функций / *Марченко И.И., Щерба А.И.* // Сиб. мат. журн. – 1984. – Т. 25. – С. 598-605.
8. *Dai C.J.* On the growth of entire and meromorphic functions of infinite order /*Dai C.J., Drasin D., Li B.Q.* // J. Analyse Math. – 1990. – Vol. 55. – P. 217-228.

Стаття: надійшла до редакції 14.04.2011
прийнята до друку 21.09.2011

INTEGRAL MEANS OF FUNCTIONS CONJUGATE TO SUBHARMONIC FUNCTIONS. II

Yaroslav VASYLKIV, Lyubomyr POLITYLO

Ivan Franko National University of L'viv,
Universytets'ka Str., 1, L'viv, 79000
e-mail: YaVVasylkiv@gmail.com, Ljupol7@gmail.com

For the pair of functions $\mathcal{F}(z) := u(z) + i\breve{u}(z)$, where $u(z)$ is subharmonic in $\mathbb{C}$ function, harmonic in some neighborhood of $z = 0$, $u(0) = 0$, and $\breve{u}(z)$ is conjugate to $u(z)$, the known estimates of q-th Lebesgue integral means of $m_q(r, \mathcal{F})$ when $1 \leqslant q \leqslant 2$, was substantially improved. For this Vasylkiv-Kondratyuk's representation of function $\breve{u}$ in terms of Hilbert transformation for circle and classical M. Riesz theorem on estimates of q-th means $(1 < q < +\infty)$ for this periodic Hilbert transformation where used.

Key words: subharmonic function, function conjugate to subharmonic function, Lebesgue integral means, Nevanlinna's characteristic.

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ СРЕДНИЕ ФУНКЦИЙ, СОПРЯЖЕННЫХ К СУБГАРМОНИЧЕСКИМ ФУНКЦИЯМ. II

Ярослав ВАСИЛЬКИВ, Любомир ПОЛИТЫЛО

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000
e-mail: YaVVasylkiv@gmail.com, Ljupol7@gmail.com

Для пары функций $\mathcal{F}(z) := u(z) + i\breve{u}(z)$, где $u(z)$ – субгармоническая в $\mathbb{C}$ функция, гармоническая в некоторой окрестности точки $z = 0$, $u(0) = 0$, и $\breve{u}(z)$ – сопряженная функция к $u(z)$, существенно уточнены известные оценки q-х интегральных средних $m_q(r, \mathcal{F})$ при $1 \leqslant q \leqslant 2$. Для этого использовано изображение Василькива-Кондратюка функции $\breve{u}$ в терминах преобразования Гильберта для окружности, и классическую теорему М. Рисса о оценке q-х средних $(1 < q < +\infty)$ для таких периодических преобразований Гильберта.

Ключевые слова: субгармоническая функция, функция сопряженная к субгармонической функции, лебеговские интегральные средние, характеристика Неванлинны.