ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2011. Випуск 75. С. 170–180
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2011. Issue 75. P. 170–180

УДК 517.95

ІСНУВАННЯ РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ПІВЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ ДИФУЗІЇ З ДРОБОВОЮ ПОХІДНОЮ ЗА ЧАСОМ З УЗАГАЛЬНЕНИМИ ФУНКЦІЯМИ В ПОЧАТКОВІЙ УМОВІ

Олена ПАСІЧНИК

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: olena.pasichnyk@gmail.com

Розглянуто задачу Коші для півлінійного рівняння дифузії з дробовою похідною Рімана-Ліувілля порядку $\alpha, \quad \alpha \in (0,1)$ за часовою змінною та з узагальненою функцією в початковій умові. Доведена теорема еквівалентності цієї задачі та деякого інтегрального рівняння. Використовуючи теорему Шаудера про нерухому точку, знайдено достатні умови існування розв'язку задачі.

Ключові слова: узагальнена функція, згортка, похідна дробового порядку, функція Гріна.

1. Вступ. Багато праць присвячено дослідженню розв'язності задач для рівнянь з дробовими похідними за часовою змінною ([1] - [7] та ін.). Зокрема, у [3] та [4] розглянули задачу Коші для диференціального рівняння другого порядку з регуляризованою похідною за часом порядку $\alpha, \quad \alpha \in (0,1)$. Доведено теорему існування єдиного класичного розв'язку цієї задачі. У [5] та [6] об'єктом дослідження була задача типу Коші з дробовою похідною Рімана-Ліувілля (див. [1, с. 342]). Застосовуючи інтегральні перетворення Лапласа та Фур'є, у [3] та [5] доведено існування фундаментальної функції та функції Гріна відповідних задач Коші, одержано оцінки їхніх похідних та зображення розв'язків за допомогою функцій Гріна.

Наша мета – дослідити розв'язність задачі Коші для півлінійного рівняння дифузії з дробовою похідною Рімана-Ліувілля порядку $\alpha \in (0,1)$ за часовою змінною з узагальненими функціями в початковій умові. Показано еквівалентність задачі Коші та деякого інтегрального рівняння у ваговому L_1- просторі. Застосовуючи теорему Шаудера про нерухому точку, знайдено достатні умови існування розв'язку задачі.

2. Основні позначення. Нехай $Q_T = \{(x,t) : \ x \in \mathbb{R}, \ t \in (0;T]\}$, де $T > 0$; $D(\mathbb{R}) = C_0^\infty(\mathbb{R})$ – простір нескінченно диференційовних і фінітних в $\mathbb{R}$ функцій;

$D(\bar{Q}_T) = \{\varphi \in C_0^\infty(\bar{Q}_T) : D_t^l\varphi|_{t=T} = 0,\ l = 0, 1, 2, \dots\}$ – простір нескінченно диференційовних функцій з компактними носіями в $\bar{Q}_\tau$, $\tau < T$;
$D'(\mathbb{R})$ – простір лінійних неперервних функціоналів на $D(\mathbb{R})$;
$D'(\bar{Q}_T)$ – сукупність узагальнених функцій f із $D'(\mathbb{R}^2)$ з носіями $\operatorname{supp} f$ в $\bar{Q}_T$ із збіжністю: $f_m \to 0$, $m \to +\infty$ в $D'(\bar{Q}_T)$, якщо $f_m \to 0$, $m \to +\infty$ в $D'(\mathbb{R}^2)$ і $\operatorname{supp} f_m \subset \bar{Q}_T$ [8, с. 27];
(f, φ) – дія узагальненої функції $f \in D'(\mathbb{R})$ на основну функцію $\varphi \in D(\mathbb{R})$;
$(f, \varphi)_{\bar{Q}_T}$ – дія $f \in D'(\bar{Q}_T)$ на $\varphi \in D(\bar{Q}_T)$.

Запис $s(f) \leqslant s_0$ означає, що порядок сингулярності узагальненої функції $f \in D'(\mathbb{R})$ не перевищує s_0, а саме (див. [9, с. 123])

$$|(f, \varphi)| \leqslant K \sup_{\substack{|l| \leqslant s_0, \\ \xi \in \operatorname{supp} f}} |D^l\varphi(\xi)| \quad \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}), \quad \text{де} \quad K = const > 0.$$

Зауважимо, що узагальнена функція $f \in D'(\mathbb{R})$, яка має скінченний порядок сингулярності, фінітна.

Через $\hat{*}$ позначаємо згортку узагальненої функції з основною функцією [9] $(g \hat{*} \varphi)(x) = (g(\xi), \varphi(x + \xi))$, $\quad g \in D'(\mathbb{R})$, $\quad \varphi \in D(\mathbb{R})$;
через $*$ позначаємо згортку узагальнених функцій f та g [8], [9]

$$(f * g, \varphi) = (f, g \hat{*} \varphi), \quad \varphi \in D(\mathbb{R}).$$

Зауважимо, що $(f * g) \hat{*} \varphi = f \hat{*} (g \hat{*} \varphi)$.

Через $\times$ позначаємо прямий добуток узагальнених функцій $f, g \in D'(\mathbb{R})$ [8]

$$(f(x) \times g(t), \varphi(x,t)) = (f(x), (g(t), \varphi(x,t))), \quad \varphi \in D(\mathbb{R}^2).$$

У [8, с. 139] розглядають сукупність узагальнених функцій $D'_+(\mathbb{R}) \subset D'(\mathbb{R})$, які дорівнюють нулю при $t < 0$. Прикладом узагальненої функції з такого простору є $f_\lambda(t) = \dfrac{\theta(t) t^{\lambda - 1}}{\Gamma(\lambda)}$ при $\lambda > 0$ та $f_\lambda(t) = f'_{1+\lambda}(t)$ при $\lambda \leqslant 0$, де θ – функція Хевісайда, $\Gamma(\lambda)$ – гамма-функція [8, с. 143]. Для довільних $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ отримаємо $f_\lambda * f_\mu = f_{\lambda+\mu}$.

Нехай $\alpha \in (0, 1)$. На просторі $D(\bar{Q}_T)$ виконаємо перетворення

$$f_{-\alpha}(t) \hat{*} v(x,t) = f'_{1-\alpha}(t) \hat{*} v(x,t) = -f_{1-\alpha}(t) \hat{*} v_t(x,t) =$$

$$= -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_t^T \frac{v_\eta(x,\eta)}{(\eta - t)^\alpha} d\eta = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial t} \int_t^T \frac{v(x,\eta)}{(\eta - t)^\alpha} d\eta, \quad v \in D(\bar{Q}_T).$$

Розглянемо на просторі $D'(\bar{Q}_T)$

$$f_{-\alpha}(t) * v(x,t) = f'_{1-\alpha}(t) * v(x,t) = f_{1-\alpha}(t) * v_t(x,t) =$$

$$= (f_{1-\alpha}(t) * v(x,t))_t = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{v(x,\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau, \quad v \in D'(\bar{Q}_T).$$

Оператор згортки $(f_{-\alpha} *)$ є оператором дробового диференціювання Рімана-Ліувілля.

Зауважимо таке: якщо функція v має неперервну похідну за часом, то

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^t \frac{v_\tau(x,\tau)}{(t-\tau)^\alpha}d\tau = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^t \frac{v(x,\tau)}{(t-\tau)^\alpha}d\tau - f_{1-\alpha}(t)v(x,0).$$

Через $C^{2,\alpha}(Q_T)$ позначатимемо клас функцій v, неперервних в $\bar{Q}_T$, які мають неперервні та обмежені похідні за просторовими змінними до другого порядку включно в Q_T, для яких існує неперервна в Q_T регуляризована дробова похідна порядку α за часом

$$(D_t^{(\alpha)}v)(x,t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^t \frac{v(x,\tau)}{(t-\tau)^\alpha}d\tau - \frac{v(x,0)}{t^\alpha}\right].$$

Введемо оператори

$\hat{L}_\alpha: \quad (\hat{L}_\alpha v)(x,t) \equiv f_{-\alpha}(t)\hat{*}v(x,t) - v_{xx}(x,t), \quad v \in D(\bar{Q}_T),$

$L_\alpha: \quad (L_\alpha v)(x,t) \equiv f_{-\alpha}(t) * v(x,t) - v_{xx}(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \quad v \in D'(\bar{Q}_T),$

$L_\alpha^{reg}: \quad (L_\alpha^{reg} v)(x,t) \equiv D_t^{(\alpha)}v(x,t) - v_{xx}(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \quad v \in C^{2,\alpha}(Q_T).$

Нехай ρ – нескінченно диференційовна додатна на $(0,T]$ функція така, що $\rho(t) \leqslant 1$ при $t \in (0,T]$ і яка є порядку $t^{\frac{\alpha}{2}}$ при $t \to +0$, тобто $\lim\limits_{t\to+0} \frac{\rho(t)}{t^{\frac{\alpha}{2}}} = c,\ c > 0$.

Введемо позначення

$$\rho_k(x,t) = \rho^k(t)\exp\{-\sigma|x|^{\frac{2}{2-\alpha}}(T-t)^{-\frac{\alpha}{2-\alpha}}\}, \quad k \in \mathbb{N}\cup\{0\}, \quad \sigma > 0, \quad (x,t) \in Q_T.$$

Введемо вагові функційні простори:

$M_k(Q_T) = \{u \in L_{1,loc}(Q_T):\ \|u\|_k = \int_{Q_T}\rho_k(x,t)|u(x,t)|dxdt < +\infty\};$

$X_k(\bar{Q}_T) = \{\varphi \in D(\bar{Q}_T):\ \rho_k^{-1}(x,t)(\hat{L}_\alpha\varphi) \in C(\bar{Q}_T)\};$

$M_{k,C}(Q_T) = \{u \in M_k(Q_T) : \|u\|_k \leqslant C\}$ – обмежена замкнена опукла підмножина (куля) в банаховому просторі $M_k(Q_T)$, де $C > 0$.

3. Формулювання задачі. Розглянемо задачу Коші

$$(L_\alpha u)(x,t) = g(x,t,u(x,t)), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

де функція $u_0 \in D'(\mathbb{R})$ та має скінченний порядок сингулярності, функція $g(x,t,z)$ $((x,t) \in Q_T,\ z \in \mathbb{R})$ неперервна та

$$\Big|\int\limits_{Q_T} g(x,t,v(x,t))\psi(x,t)dxdt\Big| < +\infty \tag{3}$$

для всіх $v \in M_k(Q_T),\ \psi \in X_k(\bar{Q}_T)$.

Означення 1. *Розв'язком задачі* (1), (2) *називатимемо таку функцію $u \in M_k(Q_T)$, яка задовольняє тотожність*

$$\int\limits_{Q_T} u(x,t)(\hat{L}_\alpha\psi)(x,t)dxdt = \int\limits_{Q_T} g(x,t,u(x,t))\psi(x,t)dxdt + (u_0(x)\times f_{1-\alpha}(t), \psi(x,t)) \tag{4}$$

для довільної $\psi \in X_k(\bar{Q}_T)$.

4. Функція Гріна задачі Коші та її властивості. Вектор-функцією Гріна задачі Коші

$$(L_\alpha^{reg}u)(x,t) = g_0(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{5}$$

$$u(x,0) = g_1(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{6}$$

називається така пара функцій (G_0, G_1), що функція

$$u(x,t) = (G_0(x-\xi, t-\tau), g_0(\xi,\tau))_{Q_T} + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G_1(x-\xi,t)g_1(\xi)d\xi \tag{7}$$

є класичним (класу $C^{2,\alpha}(Q_T)$) розв'язком задачі (5), (6). Умови, за яких формула (7) коректна, описані в [4, с.325-326].

В [4, с.327-329] доведено існування такої вектор-функції Гріна та оцінки:

$$|G_0(x,t)| \leqslant Ct^{\frac{\alpha}{2}-1}\exp\left\{-\mu_\alpha|x|^{\frac{2}{2-\alpha}}t^{-\frac{\alpha}{2-\alpha}}\right\} \qquad \text{при } t^{-\alpha}|x|^2 \geqslant 1, \tag{8}$$

$$|G_0(x,t)| \leqslant Ct^{\frac{\alpha}{2}-1} \qquad \text{при } t^{-\alpha}|x|^2 \leqslant 1, \tag{9}$$

$$\left|D_x^jG_1(x,t)\right| \leqslant Ct^{-\frac{(j+1)\alpha}{2}}\exp\left\{-\mu_j|x|^{\frac{2}{2-\alpha}}t^{-\frac{\alpha}{2-\alpha}}\right\} \qquad \text{при } t^{-\alpha}|x|^2 \geqslant 1, \tag{10}$$

$$\left|D_x^jG_1(x,t)\right| \leqslant Ct^{-\frac{(j+1)\alpha}{2}} \qquad \text{при } t^{-\alpha}|x|^2 \leqslant 1,\ j = 0,1,2,\ldots, \tag{11}$$

де C – різні додатні сталі, $\mu_0 = (2-\alpha)\alpha^{\alpha/(2-\alpha)}2^{-2/(2-\alpha)}$, а μ_α та μ_j – додатні числа, менші за μ_0.

Відомо, що $G_0(x,t) = f_{\alpha-1}(t) * G_1(x,t)$ [4, 7], тому застосовуючи властивості згортки та функції f_λ, отримуємо

$$G_1(x,t) = \int\limits_0^t f_{1-\alpha}(\tau)G_0(x,t-\tau)d\tau. \tag{12}$$

Крім того, в [7] доведено, що для довільної $\psi \in X_k(\bar{Q}_T)$ виконуються такі рівності:

$$\int\limits_\tau^T dt \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G_0(x-\xi,t-\tau)(\hat{L}_\alpha\psi)(x,t)dx = \psi(\xi,\tau), \quad (\xi,\tau) \in \bar{Q}_T, \tag{13}$$

$$\int\limits_{Q_T} G_1(x-\xi,t)(\hat{L}_\alpha\psi)(x,t)dxdt = \int\limits_0^T f_{1-\alpha}(t)\psi(\xi,t)dt, \quad \xi \in \mathbb{R}. \tag{14}$$

Лема 1. *Нехай* $u_0 \in D'(\mathbb{R})$, $s(u_0) \leqslant s_0$, $k > s_0 - \frac{2}{\alpha}$. *Тоді функція*

$$\varphi_k(\xi) = \int\limits_{Q_T} \rho_k(x,t)G_1(x-\cdot,t)dxdt$$

належить до простору $C^{s_0}(\mathbb{R})$, *а згортка* $G_1(x,t) * u_0(x)$ *належить простору* $M_k(Q_T)$.

Доведення. Введемо позначення

$$\varphi_{k,l}(\xi) = \int\limits_{Q_T} \rho_k(x,t) D^l_\xi G_1(x-\xi,t)dxdt, \quad l = 0,1,...,s_0.$$

Враховуючи оцінки похідних функції G_1 за просторовою змінною з (10), (11), одержимо

$$|\varphi_{k,l}(\xi)| \leqslant C_1 \int\limits_{Q_T} \rho^k(t) \exp\left\{-\sigma|x|^{\frac{2}{2-\alpha}}(T-t)^{-\frac{\alpha}{2-\alpha}}\right\} t^{-\frac{(l+1)\alpha}{2}} \times$$

$$\times \exp\left\{-\mu_l|x-\xi|^{\frac{2}{2-\alpha}} t^{-\frac{\alpha}{2-\alpha}}\right\} dxdt,$$

де C_1 – додатна стала, $0 < \mu_l < \mu_0$. За лемою 5.1 [10, с. 35]

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\{-\nu_1[|x|^{\frac{2}{2-\alpha}}(T-t)^{-\frac{\alpha}{2-\alpha}} + |x-\xi|^{\frac{2}{2-\alpha}}(t-\tau)^{-\frac{\alpha}{2-\alpha}}]\}(T-t)^{-\frac{\alpha}{2}}(t-\tau)^{-\frac{\alpha}{2}}dx \leqslant$$

$$\leqslant M(\varepsilon)(T-\tau)^{-\frac{\alpha}{2}} \exp\{-\nu_1(1-\varepsilon)|\xi|^{\frac{2}{2-\alpha}}(T-\tau)^{-\frac{\alpha}{2-\alpha}}\}, \tag{15}$$

де $\nu_1 = \min\{\sigma, \mu_l\}, \quad 0 < \varepsilon < 1, \quad M(\varepsilon) > 0$. Звідси при $\tau = 0$ отримуємо

$$|\varphi_{k,l}(\xi)| \leqslant C_2 T^{-\frac{\alpha}{2}} \exp\left\{-\nu_1(1-\varepsilon)|\xi|^{\frac{2}{2-\alpha}} T^{-\frac{\alpha}{2-\alpha}}\right\} \int\limits_0^T \rho^k(t) t^{-\frac{l\alpha}{2}}(T-t)^{\frac{\alpha}{2}} dt.$$

Оскільки $\rho(t) \sim t^{\frac{\alpha}{2}}, t \to +0$ та $(T-t)^{\frac{\alpha}{2}} \leqslant T^{\frac{\alpha}{2}}$, то $\int\limits_0^T \rho^k(t) t^{-\frac{l\alpha}{2}}(T-t)^{\frac{\alpha}{2}} dt \leqslant C_3 T^{\frac{\alpha}{2}}$ при $k > l - \frac{2}{\alpha}, \quad l = 0,...,s_0$. Тому

$$|\varphi_{k,l}(\xi)| \leqslant C_{l,\alpha} \exp\left\{-\nu_1(1-\varepsilon)|\xi|^{\frac{2}{2-\alpha}} T^{-\frac{\alpha}{2-\alpha}}\right\},$$

де $C_2, C_3, C_{l,\alpha}$ – додатні сталі. Отже, при $l \leqslant s_0$ та $k > s_0 - \frac{2}{\alpha}$ функція $\varphi_{k,l} \in C(\mathbb{R})$ та $(D^l\varphi_k)(\xi) = \varphi_{k,l}(\xi)$.

Доведемо тепер, що згортка $G_1(x,t) * u_0(x)$ належить простору $M_k(Q_T)$. Розглянемо

$$\int\limits_{Q_T} \rho_k(x,t)(G_1(x,t) * u_0(x))dxdt = (G_1(x,t) * u_0(x), \rho_k(x,t)) =$$

$$= \left(u_0(\xi), \int\limits_{Q_T} \rho_k(x,t) G_1(x-\xi,t)dxdt\right) = (u_0(\xi), \varphi_k(\xi)).$$

З означення порядку сингулярності узагальненої функції

$$|(u_0, \varphi_k)| \leqslant C_4 \sup_{|l| \leqslant s_0} |D^l \varphi_k(\xi)|, \quad \varphi_k \in C^{s_0}(\mathbb{R}), \quad C_4 = const > 0.$$

Тоді, враховуючи виведені вище оцінки для $D^l\varphi_k$, при $k > s_0 - \frac{2}{\alpha}$, одержуємо, що інтеграл $\int_{Q_T} \rho_k(x,t)(G_1(x,t) * u_0(x))dxdt$ скінченний. □

5. Еквівалентність узагальненої задачі Коші та інтегрального рівняння. Розглянемо інтегральне рівняння

$$u(x,t) = \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} G_0(x-\xi, t-\tau) g(\xi,\tau,u(\xi,\tau)) d\xi + G_1(x,t) * u_0(x). \tag{16}$$

Означення 2. *Розв'язком інтегрального рівняння (16) називатимемо функцію u з простору $M_k(Q_T)$, яка задовольняє це рівняння майже скрізь на Q_T.*

Теорема 1. *Функція $u \in M_k(Q_T)$ є розв'язком задачі Коші (1), (2) тоді і тільки тоді, коли вона є розв'язком інтегрального рівняння (16).*

Доведення. Нехай $u \in M_k(Q_T)$ є розв'язком задачі Коші (1), (2) і задовольняє тотожність (4) для довільної $\psi \in X_k(\bar{Q}_T)$. Для довільної функції $\varphi \in C_0^\infty(Q_T)$ побудуємо функцію

$$\psi(\xi,\tau) = \int_\tau^T dt \int_{-\infty}^{+\infty} G_0(x-\xi, t-\tau)\varphi(x,t)dx.$$

Для такої функції ψ правильна рівність

$$(\hat{L}_\alpha \psi)(x,t) = \rho^k(x,t)\varphi(x,t). \tag{17}$$

Використовуючи рівність (13), із тотожності (4) отримаємо

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^T u(x,t)\hat{L}_\alpha\psi(x,t)dxdt = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^T \left[\int_\tau^T dt \int_{-\infty}^{+\infty} G_0(x-\xi,t-\tau)\hat{L}_\alpha\psi(x,t)dx\right]\times$$

$$\times g(\xi,\tau,u(\xi,\tau))d\xi d\tau + \left(u_0(\xi), \int_0^T f_{1-\alpha}(\tau)\left[\int_\tau^T dt\int_{-\infty}^{+\infty} G_0(x-\xi,t-\tau)\hat{L}_\alpha\psi(x,t)dx\right]d\tau\right),$$

тобто

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^T u(x,t)\hat{L}_\alpha\psi(x,t)dxdt = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^T \left[\int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} G_0(x-\xi,t-\tau)g(\xi,\tau,u(\xi,\tau))d\xi\right]\times$$

$$\times \hat{L}_\alpha\psi(x,t)dxdt + \left(u_0(\xi), \int_0^T dt \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_0^t f_{1-\alpha}(\tau)G_0(x-\xi,t-\tau)d\tau\right]\hat{L}_\alpha\psi(x,t)dx\right).$$

Згідно з (12) останній доданок попередньої рівності записуємо у вигляді

$$\left(u_0(\xi), \int_0^T dt \int_{-\infty}^{+\infty} G_1(x-\xi,t)\hat{L}_\alpha\psi(x,t)dx\right) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^T (G_1(x,t)*u_0(x))\hat{L}_\alpha\psi(x,t)dxdt.$$

У підсумку одержуємо

$$\int_{Q_T} \hat{L}_\alpha\psi(x,t)\left[u(x,t) - \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} G_0(x-\xi,t-\tau)g(\xi,\tau,u(\xi,\tau))d\xi - G_1(x,t)*u_0(x)\right]dxdt = 0$$

для довільної $\psi \in X_k(\bar{Q}_T)$. Тоді з (17) отримуємо

$$\int\limits_{Q_T} \rho_k(x,t)\varphi(x,t)\Bigg[u(x,t)-$$

$$-\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G_0(x-\xi,t-\tau)g(\xi,\tau,u(\xi,\tau))d\xi - G_1(x,t)*u_0(x)\Bigg]dxdt = 0.$$

З довільності функції φ випливає, що функція u є розв'язком рівняння (16).

Якщо $u \in M_k(Q_T)$ є розв'язком інтегрального рівняння (16), то функції $\int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} G_0(x-\xi,t-\tau)g(\xi,\tau,u(\xi,\tau))d\xi$ та $G_1(x,t)*u_0(x)$ належать $M_k(Q_T)$. Для функції ψ, яка належить $X_k(\bar{Q}_T)$, інтеграл $\int_{Q_T} u(x,t)(\hat{L}_\alpha\psi)(x,t)dxdt$ скінченний. Тоді з (16) отримаємо

$$\int\limits_{Q_T} u(x,t)(\hat{L}_\alpha\psi)(x,t)dxdt = \int\limits_{Q_T}\Bigg[\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G_0(x-\xi,t-\tau)g(\xi,\tau,u(\xi,\tau))d\xi\Bigg]\times$$

$$\times(\hat{L}_\alpha\psi)(x,t)dxdt + \int\limits_{Q_T}\Bigg[G_1(x,t)*u_0(x)\Bigg](\hat{L}_\alpha\psi)(x,t)dxdt,$$

тобто

$$\int\limits_{Q_T} u(x,t)(\hat{L}_\alpha\psi)(x,t)dxdt = \int\limits_{Q_T}\Bigg[\int\limits_\tau^T dt \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G_0(x-\xi,t-\tau)(\hat{L}_\alpha\psi)(x,t)dx\Bigg]\times$$

$$\times g(\xi,\tau,u(\xi,\tau))d\xi d\tau + \Bigg(u_0(\xi), \int\limits_{Q_T} G_1(x-\xi,t)(\hat{L}_\alpha\psi)(x,t)dxdt\Bigg).$$

Враховуючи рівності (13) та (14), одержимо тотожність (4) при довільній $\psi \in X_k(\bar{Q}_T)$, а отже, u – розв'язок задачі Коші (1), (2). □

6. Існування розв'язку задачі Коші. Використовуючи теорему 1, для розв'язності узагальненої задачі Коші (1), (2) достатньо довести розв'язність інтегрального рівняння (16) у $M_k(Q_T)$. Достатні умови щодо функцій g та u_0, за яких узагальнена задача Коші (1), (2) розв'язна, знаходимо за допомогою теореми Шаудера, використовуючи оцінки функцій G_0, G_1 із [4] та методику з [11]-[13].

Введемо такі оператори в $M_k(Q_T)$:

$(P_0v)(x,t) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G_0(x-\xi,t-\tau)g(\xi,\tau,v(\xi,\tau))d\xi,$

$(Pv)(x,t) = (P_0v)(x,t) + h(x,t),$ де $h(x,t) = G_1(x,t)*u_0(x)$.

Тоді інтегральне рівняння (16) набуде вигляду

$$u = Pu. \tag{18}$$

Теорема 2. *Нехай $q \in (0,1)$, функція u_0 належить $D'(\mathbb{R})$, $s(u_0) \leqslant s_0$, де $0 \leqslant s_0 < < \frac{1}{q} + \frac{2}{\alpha} - 1$, $s_0 - \frac{2}{\alpha} < k < \frac{1}{q} - 1$, функція g володіє властивістю (3) та існують такі сталі $m_0 > 0$, $m_1 > 0$, що*

$$|g(x,t,z)| \leqslant m_0|z|^q, \quad |g(x,t,z_1) - g(x,t,z_2)| \leqslant m_1|z_1 - z_2|^q \tag{19}$$

для всіх $z, z_1, z_2 \in \mathbb{R}$. Тоді існує розв'язок інтегрального рівняння (16) у просторі $M_k(Q_T)$.

Доведення. Застосуємо теорему Шаудера про нерухому точку до оператора P. Доведемо, що для довільної $v \in M_{k,C}(Q_T)$ виконується нерівність $\|Pv\|_k \leqslant C$, тобто оператор P відображає обмежену замкнену опуклу множину $M_{k,C}(Q_T)$ банахового простору $M_k(Q_T)$ в себе. Розглянемо

$$\|Pv\|_k = \int\limits_{Q_T} \rho_k(x,t)|(Pv)(x,t)|dxdt \leqslant \|P_0v\|_k + \|h\|_k.$$

Отримаємо

$$\|P_0v\|_k = \int\limits_{Q_T} \rho_k(x,t)\left|\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G_0(x-\xi,t-\tau)g(\xi,\tau,v(\xi,\tau))d\xi\right|dxdt \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^T d\tau \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |g(\xi,\tau,v(\xi,\tau))| \left[\int\limits_\tau^T dt \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \rho_k(x,t)|G_0(x-\xi,t-\tau)|dx\right]d\xi;$$

$$\|h\|_k = \int\limits_{Q_T} \rho_k(x,t)|G_1(x,t) * u_0(x)|dxdt.$$

З леми 1 одержуємо, що $\|h\|_k = c_k < +\infty$ при $k > s_0 - \frac{2}{\alpha}$. Використовуючи оцінки (8), (9) та (15), розглянемо

$$\int\limits_\tau^T dt \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \rho_k(x,t)|G_0(x-\xi,t-\tau)|dx \leqslant C_5 \int\limits_\tau^T \rho^k(t)(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}-1}dt \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\{-\sigma|x|^{\frac{2}{2-\alpha}}(T-t)^{-\frac{\alpha}{2-\alpha}}\}\times$$

$$\times \exp\{-\mu_\alpha|x-\xi|^{\frac{2}{2-\alpha}}(t-\tau)^{-\frac{\alpha}{2-\alpha}}\}dx \leqslant$$

$$\leqslant C_6(T-\tau)^{-\frac{\alpha}{2}} \exp\left\{-\nu_2(1-\varepsilon)|\xi|^{\frac{2}{2-\alpha}}(T-\tau)^{-\frac{\alpha}{2-\alpha}}\right\} \int\limits_\tau^T (t-\tau)^{\alpha-1}(T-t)^{\frac{\alpha}{2}}dt \leqslant$$

$$\leqslant C_7(T-\tau)^{\alpha} \exp\left\{-\nu_2(1-\varepsilon)|\xi|^{\frac{2}{2-\alpha}}(T-\tau)^{-\frac{\alpha}{2-\alpha}}\right\}$$

для всіх $(\xi,\tau) \in \bar{Q}_T$, де C_5, C_6, C_7 – деякі додатні сталі, $0 < \mu_\alpha < \mu_0$, $\nu_2 = \min\{\sigma, \mu_\alpha\}$. Тоді за властивостями (3) та (19) функції g

$$\|P_0v\|_k \leqslant C_7m_0 \int\limits_{Q_T} (T-\tau)^{\alpha} \exp\left\{-\nu_2(1-\varepsilon)|\xi|^{\frac{2}{2-\alpha}}(T-\tau)^{-\frac{\alpha}{2-\alpha}}\right\} |v(\xi,\tau)|^q d\xi d\tau \leqslant$$

$$\leqslant C_7 m_0 \left(\int\limits_{Q_T} \rho_k(\xi,\tau)|v(\xi,\tau)|d\xi d\tau \right)^q \times$$

$$\times \left(\int\limits_{Q_T} \rho^{-\frac{kq}{1-q}}(\tau)(T-\tau)^{\frac{\alpha}{1-q}} \exp\left\{ -\frac{\nu_2(1-\varepsilon)}{1-q}|\xi|^{\frac{2}{2-\alpha}}(T-\tau)^{-\frac{\alpha}{2-\alpha}} \right\} \times\right.$$

$$\left. \times \exp\left\{ \frac{\sigma q}{1-q}|\xi|^{\frac{2}{2-\alpha}}(T-\tau)^{-\frac{\alpha}{2-\alpha}} \right\} d\xi d\tau \right)^{1-q} \leqslant$$

$$\leqslant C_8 ||v||_k^q \left(\int\limits_0^T \rho^{-\frac{kq}{1-q}}(\tau)(T-\tau)^{\frac{\alpha}{1-q}} d\tau \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{ -\nu_3 |\xi|^{\frac{2}{2-\alpha}}(T-\tau)^{-\frac{\alpha}{2-\alpha}} \right\} d\xi \right)^{1-q},$$

де C_8 – деяка додатна стала; $\nu_3 = \frac{\sigma q - \nu_2(1-\varepsilon)}{1-q}$; $q < 1-\varepsilon$. Введемо нову змінну інтегрування ζ : $\zeta^2 = |\xi|^{\frac{2}{2-\alpha}}(T-\tau)^{-\frac{\alpha}{2-\alpha}}$. Тоді

$$\|P_0 v\|_k \leqslant C_9 ||v||_k^q \left(\int\limits_0^T \rho^{-\frac{kq}{1-q}}(\tau)(T-\tau)^{\frac{(3-q)\alpha}{2(1-q)}} d\tau \int\limits_0^{+\infty} \exp\{-\nu_3 \zeta^2\}\zeta^{1-\alpha} d\zeta \right)^{1-q} \leqslant$$

$$\leqslant C_{10} ||v||_k^q \left(\int\limits_0^T \rho^{-\frac{kq}{1-q}}(\tau)(T-\tau)^{\frac{(3-q)\alpha}{2(1-q)}} d\tau \right)^{1-q} \leqslant C_{11} ||v||_k^q T^{\frac{(3-q)\alpha}{2}} \left(\int\limits_0^T \rho^{-\frac{kq}{1-q}}(\tau) d\tau \right)^{1-q},$$

де C_9, C_{10}, C_{11} – деякі додатні сталі. Оскільки, $\rho(\tau) \sim \tau^{\frac{\alpha}{2}}$ при $\tau \to +0$, то інтеграл $\int_0^T \rho^{-\frac{kq}{1-q}}(\tau)d\tau$ скінченний при $k < \frac{1}{q} - 1$. Звідси отримаємо, що $||P_0 v||_k \leqslant C_{q,k}||v||_k^q$ при $k < \frac{1}{q} - 1$.

Отже, $\|Pv\|_k \leqslant \|P_0 v\|_k + \|h\|_k \leqslant C_{q,k}\|v\|_k^q + c_k$, якщо $s_0 - \frac{2}{\alpha} < k < \frac{1}{q} - 1$, а це можливо лише при $s_0 < \frac{1}{q} + \frac{2}{\alpha} - 1$. Відомо, що при $0 < q < 1$ завжди існує таке $\tilde{C} > 0$, що $C_{q,k}C^q + c_k < C$ для всіх $C > \tilde{C}$. Тому одержуємо, що $\|Pv\|_k \leqslant C$ для довільної $v \in M_{k,C}(Q_T)$ при $C > \tilde{C}$, тобто P переводить $M_{k,C}(Q_T)$ в себе.

Тепер доведемо, що P є неперервним відображенням $M_{k,C}(Q_T)$ в себе. Нехай $v_1, v_2 \in M_{k,C}(Q_T)$. Розглянемо

$$\|Pv_1 - Pv_2\|_k = \int\limits_{Q_T} \rho_k(x,t)|(Pv_1)(x,t) - (Pv_2)(x,t)|dxdt \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{Q_T} \rho_k(x,t) \left(\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |G_0(x-\xi,t-\tau)| \cdot |g(\xi,\tau,v_1(\xi,\tau)) - g(\xi,\tau,v_2(\xi,\tau))| d\xi \right) dxdt.$$

З умови (19) отримаємо, що $|g(\xi,\tau,v_1) - g(\xi,\tau,v_2)| \leqslant m_1|v_1 - v_2|^q$. Тоді, так само, як ми оцінили норму $\|P_0 v\|_k$, можна оцінити й

$$\|Pv_1 - Pv_2\|_k \leqslant C_{12}\|v_1 - v_2\|_k^q, \quad C_{12} > 0,$$

а це означає, що оператор P – неперервне відображення $M_{k,C}(Q_T)$ в себе.

Доведемо, що оператор P компактний на $M_k(Q_T)$. Позаяк $\rho_k v \in L_1(Q_T)$ при $v \in M_k(Q_T)$, то за теоремою Ріса оператор P є компактним на $M_k(Q_T)$ тоді і лише тоді, коли:

1) існує така стала $C_{13} > 0$, що $\|Pv\|_k \leqslant C_{13}$ для довільної $v \in M_{k,C}(Q_T)$;

2) для довільного $\tilde{\varepsilon} > 0$ існує таке $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що для всіх $(y,p) \in Q_T$ таких, що $|y| < \delta$, $|p| < \delta$, та довільної $v \in M_{k,C}(Q_T)$ виконується нерівність

$$\int\limits_{Q_T} |\rho_k(x+y,t+p)(Pv)(x+y,t+p) - \rho_k(x,t)(Pv)(x,t)|dxdt \leqslant \tilde{\varepsilon}.$$

Умова 1 випливає з попередніх оцінок. Виконання умови 2 отримуємо, як у [13], відокремленням інтегральних особливостей підінтегральних виразів із використанням умови (19). Теорему доведено. □

Список використаної літератури

1. *Самко С.Г.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* – Минск, 1987.
2. *Псху А.В.* Уравнения в частных производных дробного порядка / *Псху А.В.* // – М.: Наука, 2005.
3. *Кочубей А.Н.* Диффузия дробного порядка / *Кочубей А.Н.* // Дифференциальные уравнения. – 1990. – Т. 26, №4. – С. 660-670.
4. *Eidelman S.D.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type / *Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N.* – Birkhauser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 2004.
5. *Ворошилов А.А.* Задача типа Коши для диффузионно-волнового уравнения с частной производной Римана-Лиувилля / *Ворошилов А.А., Килбас А.А.* // Докл. АН. – 2006. – Т. 406, №1. – С. 12-16.
6. *Voroshilov A.A.* Conditions for the existence of a classical solution of a Cauchy type problem for the diffusion equation with a Riemann-Liouville partial derivative / *Voroshilov A.A., Kilbas A.A.* // Diff. Equat. – 2008. – Vol. 44, №6. – P. 789-806.
7. *Лопушанская Г.П.* Задача Коши для уравнений с дробной производной по времени в пространстве обобщенных функций / *Лопушанская Г.П., Лопушанский А.О., Пасичник Е.В.* // Сиб. матем. журн. – 2011. – Т. 52, №6. – С. 1288-1299.
8. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики / *Владимиров В.С.* – М.: Наука, 1981.
9. *Шилов Г.Е.* Математический анализ. Второй специальний курс / *Шилов Г.Е.* // – М.: Наука, 1965.
10. *Eidelman S.D.* Parabolic Systems / *Eidelman S.D.* // Amsterdam: North-Holland, 1969 (Russian edition, Moscow, 1964).
11. *Лопушанська Г.П.* Крайові задачі у просторі узагальнених функцій D': монографія / *Лопушанська Г.П.* // – Львів, 2002.
12. *Лопушанська Г.* Узагальнені крайові задачі для лінійних та напівлінійних еліптичних рівнянь / *Лопушанська Г.* // Укр. мат. вісник. – 2005. – Т. 2, №3. – С. 377-394.
13. *Лопушанська Г.* Існування та регулярність розв'язків узагальненої крайової задачі для квазілінійних параболічних систем / *Лопушанська Г., Чмир О.* // Математичний вісник НТШ. – 2005. – Т. 2. – С. 123-134.

Стаття: надійшла до редакції 16.10.2011
прийнята до друку 13.12.2011

EXISTENCE OF SOLUTION TO THE CAUCHY PROBLEM FOR SEMI-LINEAR DIFFUSION EQUATION WITH TIME FRACTIONAL DERIVATIVE WITH DISTRIBUTIONS IN INITIAL DATA

Olena PASICHNYK

Ivan Franro National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000
e-mail: olena.pasichnyk@gmail.com

We study the Cauchy problem for semi-linear diffusion equation with time fractional Riemann-Liouville partial derivative of order α, $\alpha \in (0,1)$ with distributions in initial data. The theorem of equivalence of the Cauchy problem and some integral equation is proved. Using the Schauder fixed point theorem the sufficient conditions for existence of the solution of the Cauchy problem are established.

Key words: distribution, convolution, fractional derivative, the Green function.

СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ПОЛУЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ПО ВРЕМЕНИ С ОБОБЩЕННЫМИ ФУНКЦИЯМИ В НАЧАЛЬНОМ УСЛОВИИ

Елена ПАСИЧНИК

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000
e-mail: olena.pasichnyk@gmail.com

Рассмотрено задачу Коши для полулинейного уравнения диффузии с дробной временной производной Римана-Лиувилля порядка $\alpha, \alpha \in (0,1)$ и с обобщенной функцией в начальном условии. Доказано теорему про эквивалентность задачи Коши и некоторого интегрального уравнения. Используя теорему Шаудера о неподвижной точке, найдены достаточные условия существования решения задачи.

Ключевые слова: обобщенная функция, свёртка, производная дробного порядка, функция Грина.