ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2013. Випуск 78. С. 83–91
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2013. Issue 78. P. 83–91

УДК 517.95

РОЗВ'ЯЗНІСТЬ ЗАДАЧІ З КОСОЮ ПОХІДНОЮ ДЛЯ НЕПРАВИЛЬНО ЕЛІПТИЧНОГО РІВНЯННЯ

Євгенія ЛЕСІНА

Інститут прикладної математики і механіки НАНУ,
вул. Р. Люксембург, 74, Донецьк, 83114
e-mail: lesina17@gmail.com

Досліджено задачу з косою похідною в одиничному крузі для скалярного неправильно еліптичного диференціального рівняння другого порядку з комплексними коефіцієнтами. Доведено розв'язність задачі в звичайній соболівській шкалі просторів за умов, що крайові дані належать деякому класу аналітичних функцій.

Ключові слова: неправильно еліптичне рівняння, ваговий простір Соболєва, проблема моментів, задача з косою похідною.

1. Вступ. Для правильно еліптичного оператора крайова задача з косою похідною може не бути еліптичною (тобто не задовольняти умову Лопатинського). Л. Хермандер розглядав задачу з косою похідною як нееліптичну крайову задачу, яку було розв'язано шляхом зведення до псевдодиференціального оператора на межі. В його праці [9] знайдено зв'язок між задачею з косою похідною і теорією псевдодиференціальних операторів, зокрема, зазначено умови, за яких псевдодиференціальний оператор є субеліптичним. У певному сенсі продовженням його досліджень можна вважати працю Ю.В. Єгорова та В.А. Кондратьєва [5], однак запропоновані авторами методи більш прості, оскільки ґрунтуються на простих геометричних міркуваннях і застосуванні теорії коерцитивних еліптичних задач.

В.Г. Мазья [7] вивчав задачу з косою похідною для еліптичного рівняння другого порядку. У припущенні, що векторне поле дотикається виділених гладких компактних підмноговидів межі Γ області, з'ясовано, що задача однозначно розв'язна, отримано оцінки розв'язків у $L_p(\Gamma)(1 < p \leqslant \infty)$ і доведено компактність зворотного оператора.

Дослідженням крайової задачі з косою похідною для еліптичного диференціального оператора в обмеженій області з гладкою межею займався також Б.П. Панеях [8]. За умови, що множина точок межі, в яких векторне поле задачі перетинає дотичний простір, непорожня, він довів фредгольмовість у відповідних просторах оператора, що відповідає задачі, і навів необхідну і достатню умову компактності зворотного оператора.

У [4] автори довели розв'язність задачі Діріхле в звичайній соболєвській шкалі просторів. У ній залежно від властивостей певного числа $\varphi_0 = \varphi_2 - \varphi_1$, поданого явно через коефіцієнти рівняння (4) і названого кутом між характеристиками рівняння, було розглянуто три випадки:

1) кут φ_0 дійсний і π-раціональний, тобто $\varphi_0/\pi \in \mathbb{Q}$, де $\mathbb{Q}$ – множина раціональних чисел;
2) кут φ_0 дійсний і π-ірраціональний;
3) кут φ_0 комплексний.

Випадок 1) описано в [1], він стосується порушення єдиності розв'язку першої крайової задачі, коли є злічена кількість лінійно незалежних розв'язків однорідної задачі Діріхле. У випадках 2) і 3) доцільно вводити простори $H^m_\rho(\partial K)$ аналітичних правих частин для розв'язності в звичайній соболєвській шкалі просторів.

Означення 1. *Визначимо простір Соболева $H^m_\rho(\partial K)$ з вагою $\rho = \rho(n)$ для коефіцієнтів Фур'є як простір функцій*

$$\alpha(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \big(\alpha_n^C \cos n\tau + \alpha_n^S \sin n\tau\big) \tag{1}$$

з $L_2(\partial K)$ таких, що коефіцієнти α_n^C, α_n^S розкладу задовольняють умову

$$\sum_{n=1}^{\infty} \big(|\alpha_n^C|^2 + |\alpha_n^S|^2\big)\rho^2(n)\big(1+n^2\big)^m < \infty. \tag{2}$$

Зауважимо, що на властивості задачі Діріхле у випадку **2)**, на відміну від випадку **3)**, впливали теоретико-числові властивості числа φ_0, аналогічно тому, як це відбувається з властивостями задачі Діріхле для гіперболічного рівняння другого порядку з дійсними коефіцієнтами. Далі виявиться, що цей ефект простежується також при дослідженні задачі з косою похідною.

Зауваження 1. За вагу $\rho(n)$ приймаємо

$$\rho = \rho(n) = e^{n(|\mathrm{Im}(\varphi_1+\varphi_2)| - |\mathrm{Im}(\varphi_2-\varphi_1)|)}.$$

Зазначимо, що $|\mathrm{Im}(\varphi_1+\varphi_2)| - |\mathrm{Im}(\varphi_2-\varphi_1)| > 0$ для неправильно еліптичного рівняння (4). Простір $H^m_\rho(\partial K)$ із такою вагою складається з функцій, коефіцієнти Фур'є яких спадають експоненціально.

2. Формулювання задачі. Для подальшого викладення нагадаємо означення правильно еліптичного оператора та задачі з косою похідною.

Лінійний диференціальний оператор $\mathcal{L} = \sum\limits_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x) D^\alpha$ називається еліптичним в області $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, якщо його старший символ $l(x,\xi) = \sum\limits_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\xi^\alpha \neq 0$ для всіх $x \in \Omega,\ \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, і називається правильно еліптичним у відкритій або замкненій області $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, якщо m парне, $m = 2k$, і для будь-якого $x \in \Omega$, для кожної пари лінійно незалежних дійсних векторів ξ і η серед коренів полінома $l(x, \xi + t\eta)$ від параметра t існує саме k коренів $t_+^1, t_+^2, \ldots, t_+^k$ з додатною уявною частиною $\mathrm{Im}\, t_+^j > 0$ і k коренів $t_-^1, t_-^2, \ldots, t_-^k$ з від'ємною уявною частиною $\mathrm{Im}\, t_-^j < 0$.

Отже, якщо припустити, що $\mathcal{L}$ – еліптичний оператор другого порядку і на межі $\partial\Omega$ області (точніше, в деякому околі межі) задано вектор-функцію $l = l(x)$ зі значеннями у $\mathbb{R}^n$, то задача

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial l}|_{\partial\Omega} = \varphi, \end{cases}$$

називається задачею з косою похідною [6]. При $n \geqslant 3$ еліптичність такої задачі рівносильна тому, що поле $l(x)$ не дотикається межі в жодній точці $x \in \partial\Omega$, а при $n = 2$ еліптичність еквівалентна умові: $l(x) \neq 0$ для всіх $x \in \partial\Omega$. Зауважимо, таке: коли напрям l збігається з напрямом конормалі, задача з косою похідною стає задачею Неймана. Далі, розглядаючи рівняння з комплексними коефіцієнтами, ми натрапляємо на комплексний напрям конормалі, тому вектор-функція $l(x)$ набуває комплексних значень.

Для $n = 2$ розглянемо загальне рівняння другого порядку зі сталими комплексними коефіцієнтами без молодших членів

$$au_{x_1x_1} + bu_{x_1x_2} + cu_{x_2x_2} = 0. \tag{3}$$

Рівняння (3) переписується інакше (внаслідок розкладу оператора в лівій частині на лінійні множники)

$$(a^1 \cdot \nabla)(a^2 \cdot \nabla)\, u = 0, \tag{3$'$}$$

де $a^j = (a_1^j, a_2^j),\ j = 1, 2,$ – одиничні комплексні вектори. Остання форма запису дає змогу перейти до вигляду

$$Lu \equiv \left(\sin\varphi_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cos\varphi_1 \frac{\partial}{\partial x_2}\right)\left(\sin\varphi_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cos\varphi_2 \frac{\partial}{\partial x_2}\right)u = 0 \tag{4}$$

з комплексними числами φ_1 і φ_2, причому $\varphi_1 \neq \varphi_2$. Недійсність чисел φ_1 і φ_2 зумовлює той факт, що початкове рівняння є еліптичним, тобто $l(\xi) \neq 0$ при $\xi \neq 0$, де $l(\xi) = (\sin\varphi_1 \cdot \xi_1 + \cos\varphi_1 \cdot \xi_2)(\sin\varphi_2 \cdot \xi_1 + \cos\varphi_2 \cdot \xi_2)$ – символ диференціального оператора L. Правильна еліптичність означає в цій ситуації, що корені λ_1, λ_2 квадратного рівняння $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ мають уявні частини протилежних знаків, що еквівалентно наявності у комплексних кутів φ_1 і φ_2 уявних частин протилежних знаків, і, відповідно, у неправильно еліптичному випадку ці уявні частини мають однаковий знак.

Для рівняння (4) розглянемо таку крайову задачу з косою похідною:

$$(u'_{\nu_*} - gu'_\tau)|_{\partial K} = \kappa - g\gamma = \alpha, \tag{5}$$

де $g \neq \pm\frac{\overline{\Delta}}{2}$, $\Delta = \sin\varphi_0$, риска означає знак комплексного спряження, $K = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$ – одиничний круг на площині. Припустимо, що права частина $\alpha \in H_\rho^m(\partial K)$. У перелічених припущеннях поставимо питання щодо існування та єдиності розв'язку задачі (4), (5).

3. Попередні результати та проблема моментів на колі. У [2] було отримано умову зв'язку слідів розв'язку крайової задачі (наведеної в теоремі 1) у вигляді невизначеності деякої проблеми моментів (формула (6)), властивості якої визначали властивості задачі.

Теорема 1 ([2]). *Для того, щоб функція $u \in H^s(K)$ $(s \geqslant 2)$ була розв'язком задачі*

$$u'_\tau|_{\partial K} = \gamma \in H^{s-\frac{3}{2}}(\partial K), \qquad u'_{\nu_*}|_{\partial K} = \kappa \in H^{s-\frac{3}{2}}(\partial K)$$

для рівняння (3'), необхідно і достатньо, щоб функції γ і κ задовольняли інтегральну рівність

$$\int_{\partial K} \big[\kappa - (-1)^j \frac{\overline{\Delta}}{2}\gamma\big] Q(x \cdot \widetilde{a}^j) d\tau = 0, \quad j = 1, 2, \tag{6}$$

з будь-яким поліномом $Q \in \mathbb{C}[z]$. У цьому разі функція u відновлюється з точністю до адитивної сталої.

Тут $\widetilde{a}^1 = (-\overline{a}_2^1, \overline{a}_1^1)$, $\widetilde{a}^2 = (-\overline{a}_2^2, \overline{a}_1^2)$ – направляючі вектори множини комплексних характеристичних напрямів $\Lambda^j = \{\lambda \widetilde{a}^j | \lambda \in \mathbb{C}\}$, $j = 1, 2$, $\Lambda = \Lambda^1 \cup \Lambda^2$, $\frac{\partial}{\partial \tau}$ і $\frac{\partial}{\partial \nu_*} = l(\nu)\frac{\partial}{\partial \nu} - \frac{1}{2k}[l(\nu(\tau))]'_\tau \cdot \frac{\partial}{\partial \tau}$ – похідні стосовно дотичної і конормалі, відповідно; ν – одиничний вектор зовнішньої нормалі; k – кривина кривої ∂K.

Рівність (6) є однорідною проблемою моментів, що виникає на межі кругу. Розглянемо проблеми моментів на ∂K і опишемо її у більш загальному вигляді.

Для двох заданих наборів чисел ω_n^j, $\omega_0^1 = \omega_0^2$, $n = \mathbb{Z}_+$, знайти функцію α таку, що

$$\int_{\partial K} \alpha(\tau)(x(\tau) \cdot \widetilde{a}^j)^n d\tau = \omega_n^j, \quad j = 1, 2. \tag{7}$$

Помножимо рівності (7) на коефіцієнти полінома Чебишова T_n першого роду і після додавання отримаємо рівності

$$\int_{\partial K} \alpha(\tau) T_n(-x(\tau) \cdot \widetilde{a}^j) d\tau = \mu_n^j$$

з деякими μ_n^j. Оскільки $T_n(\cos\sigma) = \cos n\sigma$ і, крім того, на колі добуток $x(\tau) \cdot \widetilde{a}^j = (\cos\tau, \sin\tau) \cdot (-\cos\varphi_j, \sin\varphi_j) = -\cos(\tau + \varphi_j)$, то початкову проблему (7) можна переписати так.

Для двох заданих наборів чисел μ_n^j, $n = \mathbb{Z}_+$, знайти функцію α таку, що

$$\int_{\partial K} \alpha(\tau) \cos n(\tau + \varphi_j) d\tau = \mu_n^j, \quad j = 1, 2. \tag{8}$$

4. Задача $H_\rho^m - H^q$ на колі. Нехай M_q^j – підпростір простору $H^q(\partial K)$, $q \in \mathbb{R}$, елементами якого є функції $\alpha(\tau)$, що задовольняють при всіх $k \in \mathbb{Z}_+$ інтегральну рівність

$$\int_{\partial K} \alpha(\tau)(x \cdot \widetilde{a}^j)^k d\tau = 0, \quad j = 1, 2.$$

Іншими словами, через M_q^j позначено множину розв'язків однорідної проблеми моментів.

Означення 2 ([3]). *Вектори $\widetilde{a}^1, \widetilde{a}^2 \in \mathbb{C}^2$ мають $H_\rho^m - H^q$-властивість на кривій ∂K, $q \leqslant m$, якщо для кожної функції $\alpha \in H_\rho^m(\partial K)$ існують єдині функції $\alpha^1 \in M_q^1$, $\alpha^2 \in M_q^2$ такі, що правильний розклад у суму: $\alpha = \alpha^1 + \alpha^2 + const$.*

Задача $H^m_\rho - H^q$ **на кривій** ∂K $(q \leqslant m)$ полягає у знаходженні умов на вектори $\widetilde{a}^1, \widetilde{a}^2 \in \mathbb{C}^2$, необхідних і достатніх для виконання $H^m_\rho - H^q$-властивості на кривій ∂K.

Після підстановки розкладу (1) в умову (8) отримаємо співвідношення

$$\pi(\alpha_n^C \cos n\varphi_j - \alpha_n^S \sin n\varphi_j) = \mu_n^j, \quad j = 1, 2,$$

враховуючи які визначимо підпростори M_q^j, $j = 1, 2$, рівностями

$$M_q^1: \quad \alpha_n^C \cos n\varphi_1 - \alpha_n^S \sin n\varphi_1 = 0,$$
$$M_q^2: \quad \alpha_n^C \cos n\varphi_2 - \alpha_n^S \sin n\varphi_2 = 0.$$

Тепер дослідимо задачу $H^m_\rho - H^q$ на колі ∂K у припущенні, що $\alpha \in H^m_\rho(\partial K)$ – довільна функція, яка має розвинення (1). Інакше кажучи, одержимо для правої частини задачі (5) розвинення у суму двох функцій, які належать звичайним соболєвським просторам, тобто визначимо показник гладкості q.

Спроектуємо вектор $(\alpha_n^C, \alpha_n^S) \in \mathbb{C}^2$ на пряму $\alpha_n^C \cos n\varphi_1 - \alpha_n^S \sin n\varphi_1 = 0$. Координати $(\alpha_n^{1,C}, \alpha_n^{1,S})$ проекції одержимо з системи

$$\begin{cases} \alpha_n^{1,C} \cos n\varphi_1 - \alpha_n^{1,S} \sin n\varphi_1 = 0, \\ \alpha_n^{1,C} \cos n\varphi_2 - \alpha_n^{1,S} \sin n\varphi_2 = \alpha_n^C \cos n\varphi_2 - \alpha_n^S \sin n\varphi_2, \end{cases}$$

звідки

$$(\alpha_n^{1,C}, \alpha_n^{1,S}) = \left(\frac{\alpha_n^C - \alpha_n^S \operatorname{tg} n\varphi_2}{1 - \operatorname{tg} n\varphi_2 \operatorname{ctg} n\varphi_1}, \frac{\operatorname{ctg} n\varphi_1 (\alpha_n^C - \alpha_n^S \operatorname{tg} n\varphi_2)}{1 - \operatorname{tg} n\varphi_2 \operatorname{ctg} n\varphi_1} \right).$$

Прямим доповненням цього вектора у $\mathbb{C}^2$, розташованим на другій прямій $\alpha_n^C \cos n\varphi_2 - \alpha_n^S \sin n\varphi_2 = 0$, буде вектор з компонентами

$$(\alpha_n^{2,C}, \alpha_n^{2,S}) = \left(\alpha_n^C - \frac{\alpha_n^C - \alpha_n^S \operatorname{tg} n\varphi_2}{1 - \operatorname{tg} n\varphi_2 \operatorname{ctg} n\varphi_1}, \alpha_n^S - \frac{\operatorname{ctg} n\varphi_1 (\alpha_n^C - \alpha_n^S \operatorname{tg} n\varphi_2)}{1 - \operatorname{tg} n\varphi_2 \operatorname{ctg} n\varphi_1} \right) =$$

$$= \left(\frac{\operatorname{tg} n\varphi_2 (-\alpha_n^C \operatorname{ctg} n\varphi_1 + \alpha_n^S)}{1 - \operatorname{tg} n\varphi_2 \operatorname{ctg} n\varphi_1}, \frac{-\alpha_n^C \operatorname{ctg} n\varphi_1 + \alpha_n^S}{1 - \operatorname{tg} n\varphi_2 \operatorname{ctg} n\varphi_1} \right).$$

Далі, маючи координати проекції і прямого доповнення, знайдемо функції $\alpha^j \in M_q^j$, $j = 1, 2$,

$$\alpha^1 = \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n^{1,C} \cos n\tau + \alpha_n^{1,S} \sin n\tau) =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha_n^C - \alpha_n^S \operatorname{tg} n\varphi_2}{1 - \operatorname{tg} n\varphi_2 \operatorname{ctg} n\varphi_1} \cos n\tau + \frac{\operatorname{ctg} n\varphi_1 (\alpha_n^C - \alpha_n^S \operatorname{tg} n\varphi_2)}{1 - \operatorname{tg} n\varphi_2 \operatorname{ctg} n\varphi_1} \sin n\tau \right),$$
$$\alpha^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n^{2,C} \cos n\tau + \alpha_n^{2,S} \sin n\tau) = \tag{9}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\operatorname{tg} n\varphi_2 (-\alpha_n^C \operatorname{ctg} n\varphi_1 + \alpha_n^S)}{1 - \operatorname{tg} n\varphi_2 \operatorname{ctg} n\varphi_1} \cos n\tau + \frac{-\alpha_n^C \operatorname{ctg} n\varphi_1 + \alpha_n^S}{1 - \operatorname{tg} n\varphi_2 \operatorname{ctg} n\varphi_1} \sin n\tau \right).$$

Розглянемо вектори $\widetilde{a}^1, \widetilde{a}^2 \in \mathbb{C}^2$, які задано рівняннями (3') і (4), та з'ясуємо, при якому значенні показника q, $q \leqslant m$, вони мають $H^m_\rho - H^q$ - властивість на кривій ∂K. Дослідимо окремо два випадки, про які йшла мова у вступі:

2) $\varphi_0 = \varphi_2 - \varphi_1$ – дійсне π-ірраціональне число;

3) φ_0 – комплексне число.

Оцінимо коефіцієнти при множниках $\alpha_n^C \cos n\tau$, $\alpha_n^S \cos n\tau$, $\alpha_n^C \sin n\tau$, $\alpha_n^S \sin n\tau$ у виразах (9) функцій α^1 і α^2

$$\left|\frac{1}{1-\operatorname{tg} n\varphi_2 \operatorname{ctg} n\varphi_1}\right| = \left|\frac{\sin n\varphi_1 \cos n\varphi_2}{\sin n\varphi_1 \cos n\varphi_2 - \sin n\varphi_2 \cos n\varphi_1}\right| = \left|\frac{\sin n\varphi_1 \cos n\varphi_2}{\sin n\varphi_0}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{e^{n|\operatorname{Im}\varphi_1|}\cdot e^{n|\operatorname{Im}\varphi_2|}}{|\sin n\varphi_0|} = \frac{e^{n|\operatorname{Im}(\varphi_1+\varphi_2)|}}{|\sin n\varphi_0|};$$
$$\left|\frac{\operatorname{tg} n\varphi_2}{1-\operatorname{tg} n\varphi_2 \operatorname{ctg} n\varphi_1}\right| = \left|\frac{\sin n\varphi_1 \sin n\varphi_2}{\sin n\varphi_0}\right| \leqslant \frac{e^{n|\operatorname{Im}(\varphi_1+\varphi_2)|}}{|\sin n\varphi_0|}; \tag{10}$$
$$\left|\frac{\operatorname{ctg} n\varphi_1}{1-\operatorname{tg} n\varphi_2 \operatorname{ctg} n\varphi_1}\right| = \left|\frac{\cos n\varphi_1 \cos n\varphi_2}{\sin n\varphi_0}\right| \leqslant \frac{e^{n|\operatorname{Im}(\varphi_1+\varphi_2)|}}{|\sin n\varphi_0|};$$
$$\left|\frac{\operatorname{ctg} n\varphi_1 \operatorname{tg} n\varphi_2}{1-\operatorname{tg} n\varphi_2 \operatorname{ctg} n\varphi_1}\right| = \left|\frac{\cos n\varphi_1 \sin n\varphi_2}{\sin n\varphi_0}\right| \leqslant \frac{e^{n|\operatorname{Im}(\varphi_1+\varphi_2)|}}{|\sin n\varphi_0|}.$$

Випадок 2). Нагадаємо (див. зауваження 1), що ми використовуємо вагу для коефіцієнтів Фур'є у вигляді $\rho = e^{n(|\operatorname{Im}(\varphi_1+\varphi_2)|-|\operatorname{Im}(\varphi_2-\varphi_1)|)}$, тому $\rho = e^{n|\operatorname{Im}(\varphi_1+\varphi_2)|}$ для дійсного φ_0, оскільки в цьому випадку $\operatorname{Im}\varphi_1 = \operatorname{Im}\varphi_2$.

Далі нам знадобиться таке твердження.

Твердження 1 ([3]). *Нехай $\mu + 1 > 0$. Нерівність для числа $\varphi_0 \in \mathbb{R}$*
$$\exists\, C_0 > 0, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad |\sin n\varphi_0| > C_0 n^{-\mu} \tag{11}$$
рівносильна нерівності
$$\exists\, C_1 > 0, \quad \forall\, \frac{q}{r} \in \mathbb{Q}, \quad \left|\frac{\varphi_0}{\pi} - \frac{q}{r}\right| > C_1 r^{-\mu-1}.$$

Застосовуючи нерівність (11), можна зробити висновок, що при дійсному φ_0 всі згадані вище відношення в лівих частинах виразів (10) оцінюються зверху величиною ρn^μ. Отже, коефіцієнти функцій α^1, α^2 задовольняють оцінку
$$|\alpha_n^{j,C}| \leqslant \rho n^\mu(|\alpha_n^C| + |\alpha_n^S|), \qquad |\alpha_n^{j,S}| \leqslant \rho n^\mu(|\alpha_n^C| + |\alpha_n^S|), \qquad j = 1, 2,$$
яка з урахуванням $\alpha \in H^m_\rho(\partial K)$ означає, що $\alpha^j \in H^{m-\mu}(\partial K)$. Справді,
$$\infty > \sum_{n=1}^{\infty}(|\alpha_n^C|^2 + |\alpha_n^S|^2)\rho^2 n^{2m} \geqslant \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\alpha_n^{j,\,C}|^2 + |\alpha_n^{j,S}|^2}{\rho^2 n^{2\mu}}\cdot \rho^2 n^{2m} =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(|\alpha_n^{j,\,C}|^2 + |\alpha_n^{j,\,S}|^2\right) n^{2(m-\mu)}.$$

Отже, ми з'ясували, враховуючи нерівність (2) означення 1, що у випадку **2)** функції $\alpha^j \in H^{m-\mu}(\partial K)$ (тобто шукане $q = m - \mu$).

Випадок 3). Якщо φ_0 – комплексне число, то всі чотири відношення у (10) оцінюють зверху вагою $\rho = e^{n(|\mathrm{Im}(\varphi_1+\varphi_2)|-|\mathrm{Im}(\varphi_2-\varphi_1)|)}$. Але тоді

$$|\alpha_n^{j,C}| \leqslant \rho(|\alpha_n^C| + |\alpha_n^S|), \qquad |\alpha_n^{j,S}| \leqslant \rho(|\alpha_n^C| + |\alpha_n^S|), \qquad j = 1, 2,$$

тому знову, у зв'язку з означенням 1, доходимо висновку, що функції $\alpha^j \in H^m(\partial K)$ (тут індекс q збігається з m).

Резюмуючи одержані результати, сформулюємо доведене твердження у вигляді теореми 2.

Теорема 2. *Нехай φ_0 – дійсне число, $\alpha \in H_\rho^m(\partial K)$ і нехай виконується нерівність (11) при деякому $\mu > -1$. Тоді функції α^j, $j = 1, 2$, належать простору $H^{m-\mu}(\partial K)$. Якщо φ_0 – комплексне число і знову $\alpha \in H_\rho^m(\partial K)$, то функції $\alpha^j \in H^m(\partial K)$.*

Зауваження 2. Уточнимо, що в сенсі означення 2 твердження теореми 2 означає, що при дійсному φ_0 вектори $\widetilde{a}^1, \widetilde{a}^2 \in \mathbb{C}^2$ мають $H_\rho^m - H^{m-\mu}$-властивість на колі ∂K, а у випадку комплексного φ_0 зазначені вектори мають $H_\rho^m - H^m$-властивість на ∂K.

5. Розв'язність задачі з косою похідною. Застосуємо тепер усі викладені вище міркування до задачі (4), (5) і, використовуючи зв'язок з проблемою моментів, доведемо основний результат щодо розв'язності досліджуваної задачі.

Згідно з означенням $H_\rho^m - H^q$-властивості векторів $\widetilde{a}^1, \widetilde{a}^2$ правильне розвинення: $\alpha = w_1 + w_2$, де $w_i \in M_q^i \subset H^q(\partial K)$, $q \leqslant m$, $i = 1, 2$. Позначивши

$$\begin{cases} v_1 = (u'_{\nu_*} + \frac{\overline{\Delta}}{2} u'_\tau)|_{\partial K} = \kappa + \frac{\overline{\Delta}}{2}\gamma, \\ v_2 = (u'_{\nu_*} - \frac{\overline{\Delta}}{2} u'_\tau)|_{\partial K} = \kappa - \frac{\overline{\Delta}}{2}\gamma, \end{cases}$$

отримаємо в термінах v_1 і v_2 функції κ і γ

$$\begin{cases} \kappa = \frac{1}{2}(v_1 + v_2), \\ \gamma = \frac{1}{\overline{\Delta}}(v_1 - v_2). \end{cases} \tag{12}$$

Тоді

$$\alpha = \kappa - g\gamma = \frac{1}{2}(v_1 + v_2) - \frac{g}{\overline{\Delta}}(v_1 - v_2) = (\frac{1}{2} - \frac{g}{\overline{\Delta}})v_1 + (\frac{1}{2} + \frac{g}{\overline{\Delta}})v_2,$$

звідки

$$v_1 = \frac{w_1}{\frac{1}{2} - \frac{g}{\overline{\Delta}}} = \frac{2\overline{\Delta} w_1}{\overline{\Delta} - 2g}, \qquad v_2 = \frac{w_2}{\frac{1}{2} + \frac{g}{\overline{\Delta}}} = \frac{2\overline{\Delta} w_2}{\overline{\Delta} + 2g},$$

тобто за наданими функціями w_i, які побудовано за відомою функцією α, ми з останніх формул одержимо функції v_i, а далі, зважаючи на (12), визначимо функції κ і γ

$$\kappa = \overline{\Delta} \cdot \left(\frac{w_1}{\overline{\Delta} - 2g} + \frac{w_2}{\overline{\Delta} + 2g} \right) \in H^q(\partial K); \ \gamma = 2\left(\frac{w_1}{\overline{\Delta} - 2g} - \frac{w_2}{\overline{\Delta} + 2g} \right) \in H^q(\partial K). \tag{13}$$

Оскільки $w_1, w_2 \in H^q(\partial K)$, то функції γ і κ також належать $H^q(\partial K)$, а з побудови функцій w_i випливає, що вони задовольняють інтегральну рівність (6). Але тоді з теореми 2 робимо висновок щодо існування єдиного розв'язку $u(x) \in H^{q+3/2}(K)$ задачі

$$\begin{cases} Lu = 0, \\ u'_{\nu_*}|_{\partial K} = \kappa, \quad u'_\tau|_{\partial K} = \gamma. \end{cases}$$

З цього факту випливає існування єдиного розв'язку задачі (4), (5). Справді, отримавши вирази для w_1 і w_2 із рівностей (13) у термінах κ і γ та підставивши значення у розвинення $\alpha = w_1 + w_2$, отримаємо саме крайову умову (5). Отже, функція $u(x) \in H^{q+3/2}(K)$ задовольняє початкове рівняння (4) і умову (5), тобто є розв'язком задачі з косою похідною.

Зауваження 3. 1) Якщо $\varphi_0 = \varphi_2 - \varphi_1$ – дійсне і π-ірраціональне число та $\alpha \in H^m_\rho(\partial K)$, то функції $\gamma, \kappa \in H^{m-\mu}(\partial K)$ (у цьому випадку $q = m - \mu$). 2) Якщо ж φ_0 – комплексне число і знову $\alpha \in H^m_\rho(\partial K)$, то $\gamma, \kappa \in H^m(\partial K)$ (тобто $q = m$).

Сформулюємо остаточний результат щодо розв'язності задачі з косою похідною (5) для рівняння (4).

Теорема 3. *Нехай кут $\varphi_0 = \varphi_2 - \varphi_1$ між характеристиками рівняння (4) є дійсним і π-ірраціональним, і нехай, крім того, виконується нерівність (11) при деякому $\mu > -1$. Тоді розв'язок крайової задачі (4), (5) з $\alpha \in H^m_\rho(\partial K)$ існує, єдиний і належить простору $H^{m+\frac{3}{2}-\mu}(K)$. Якщо ж число φ_0 є комплексним і знову $\alpha \in H^m_\rho(\partial K)$, то розв'язок крайової задачі (4), (5) існує, єдиний і належить простору $H^{m+\frac{3}{2}}(K)$.*

Список використаної літератури

1. *Бурский В.П.* О нарушении единственности решения задачи Дирихле для эллиптических систем в круге / *В.П. Бурский* // Мат. заметки. – 1990. – Т. 48, № 3. – С. 32-36.
2. *Бурский В.П.* О краевых задачах для эллиптического уравнения с комплексными коэффициентами и одной проблеме моментов / *В.П. Бурский* // Укр. мат. журнал. – 1993. – Т. 45, № 11. – С. 1476-1483.
3. *Бурский В.П.* Методы исследования граничных задач для общих дифференциальных уравнений / *В.П. Бурский*. – Киев: Наук. думка, 2002.
4. *Бурский В.П.* О задаче Дирихле для неправильно эллиптического уравнения / *В.П. Бурский, Е.В. Кириченко* // Укр. мат. журнал. – 2011. – Т. 63, № 2. – С. 156-164.
5. *Егоров Ю.В.* О задаче с косой производной / *Ю.В. Егоров, В.А. Кондратьев* // Мат. сборник. – 1969. – Т. 78 (120). – С. 148-176.
6. *Егоров Ю.В.* Линейные дифференциальные уравнения с частными производными. Основы классической теории / *Ю.В. Егоров, М.А. Шубин* // ИНТ, Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 30, 1987. – С. 1-264.
7. *Мазья В.Г.* О вырождающейся задаче с косой производной / *В.Г. Мазья* // Мат. сборник. – 1972. – Т. 87 (129). – С. 417-454.
8. *Панеях Б.П.* К теории разрешимости задачи с косой производной / *Б.П. Панеях* // Мат. сборник. – Т. 114 (156). – 1981. – С. 226-268.

9. *Хёрмандер Л.* Псевдодифференциальные операторы и неэллиптические краевые задачи / *Л. Хёрмандер* // Сборник "Псевдодифференциальные операторы". – М.: Мир, 1967. – С. 166-297.

Стаття: надійшла до редакції 05.11.2013
прийнята до друку 11.12.2013

SOLVABILITY OF THE SKEW DERIVATIVE PROBLEM FOR IMPROPERLY ELLIPTIC EQUATION

Yevgeniya LESINA

Institute of applied mathematics and mechanics NASU,
R. Luxemburg Str., 74, Donetsk, 83114
e-mail: lesina17@gmail.com

The skew derivative problem for second order scalar improperly elliptic equation with complex coefficients is investigated. The solvability is proved in the simple scale of Sobolev spaces under condition that the boundary value data belong to some class of analytic functions.

Key words: improperly elliptic equation, Sobolev weight space, moment problem, skew derivative problem.

РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ С КОСОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ДЛЯ НЕПРАВИЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Евгения ЛЕСИНА

Институт прикладной математики и механики НАНУ,
ул. Р. Люксембург, 74, Донецк, 83114
e-mail: lesina17@gmail.com

Исследовано задачу с косой производной в единичном круге для скалярного неправильно эллиптического дифференциального уравнения второго порядка с комплексными коэффициентами. Доказана разрешимость задачи в обычной соболевской шкале пространств при условии, что граничные данные принадлежат некоторому классу аналитических функций.

Ключевые слова: неправильно эллиптическое уравнение, весовое пространство Соболева, проблема моментов, задача с косой производной.