ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2013. Випуск 78. С. 113–117
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2013. Issue 78. P. 113–117

УДК 511.3

СУМІСНІ НАБЛИЖЕННЯ ЗНАЧЕНЬ ДВОХ ЕЛІПТИЧНИХ ФУНКЦІЙ ВЕЙЄРШТРАССА

Ольга МИЛЬО, Ярослав ХОЛЯВКА

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: olga.mylyo@gmail.com, ya_khol@franko.lviv.ua

Нехай $\wp_i(z)$, $(i = 1, 2)$ – алгебрично незалежні еліптичні функції Вейєрштрасса з алгебричними інваріантами. Отримано оцінку сумісного наближення значень кожної з цих функцій у періодах іншої.

Ключові слова: сумісні наближення, еліптична функція Вейєрштрасса.

1. Вступ. Нехай $\wp_1(z)$, $\wp_2(z)$ – алгебрично незалежні еліптичні функції Вейєрштрасса з алгебричними інваріантами $g_{1,2}, g_{1,3}, g_{2,2}, g_{2,3}$. Позначимо (ω_1, ω_1'), (ω_2, ω_2') – пари основних періодів $\wp_1(z)$, $\wp_2(z)$, відповідно [1], [2]. Нехай $\omega_1^* \in \{\omega_1, \omega_1'\}$, $\omega_2^* \in \{\omega_2, \omega_2'\}$ – такі числа, що утворюють решітку. Без зменшення загальності приймемо $\omega_1^* = \omega_1$, $\omega_2^* = \omega_2$. Вважатимемо, що точки, кратні ω_1, не є полюсами $\wp_2(z)$, а кратні ω_2, не є полюсами $\wp_1(z)$.

Через $d(P)$, $L(P)$ позначимо степінь і довжину полінома P з цілими коефіцієнтами, через $d(\alpha)$, $L(\alpha)$ – степінь та довжину алгебричного числа α; ξ_i – довільні алгебричні числа, $d_i = d(\xi_i)$ та $L_i = L(\xi_i)$ – їхні степені та довжини, відповідно, $n = \deg \mathbb{Q}(\xi_1, \xi_2, g_{1,2}, g_{1,3}, g_{2,2}, g_{2,3})$.

Теорема 1. *Якщо хоча б одне з чисел $\wp_1(\omega_2)$, $\wp_2(\omega_1)$ трансцендентне, то для довільних алгебричних чисел ξ_1, ξ_2 справджується оцінка*

$$\max\{|\wp_1(\omega_2) - \xi_1|,\ |\wp_2(\omega_1) - \xi_2|\} > \exp\left(-\Lambda\, n^3 M^2\right), \tag{1}$$

де

$$M = \max\left(\frac{\ln L_1}{d_1} + \frac{\ln L_2}{d_2} + 1, \ln n\right), \tag{2}$$

$\Lambda > 0$ *– константа залежна лише від чисел $g_{1,2}, g_{1,3}, g_{2,2}, g_{2,3}$.*

Подібні оцінки та формулювання задач можна знайти в [3].

2. Доведення Теореми 1. Доводитимемо теорему другим методом Гельфонда, викладеним раніше у [4], [5]. Будемо використовувати відомі властивості еліптичних функцій Вейєрштрасса, формулювання яких можна знайти, наприклад, в [1], [4], [5].

Припустимо, що умова (1) не виконується, тобто

$$\max\{|\wp_1(\omega_1)-\xi_1|,\ |\wp_2(\omega_2)-\xi_2|\}<\exp\left(-\lambda^7\, n^2 M^3\right) \tag{3}$$

для досить великого $\lambda\in\mathbb{N}$. Приймемо

$$N^2=[\lambda^3\, n\, M],\quad S=L=[\ln\lambda\, N^2], \tag{4}$$

$$F(z)=\sum_{l_1=0}^{L}\sum_{l_2=0}^{L}C_{l_1,l_2}\wp_1^{l_1}z\wp_2^{l_2}z,\quad C_{l_1,l_2}=\sum_{\tau=1}^{n}C_{l_1,l_2,\tau}\zeta_\tau,\quad C_{l_1,l_2,\tau}\in\mathbb{Z}, \tag{5}$$

де ζ_τ – твірні елементи $\mathbb{Q}(\xi_1,\xi_2,g_{1,2},g_{1,3},g_{2,2},g_{2,3})$.

Позначимо $\phi_i(z)=\wp_i(z+\frac{\omega_i}{2})$, $i=1,2$. З формули додавання

$$\wp_i(z+w)=\left(\frac{\wp_i'(z)-\wp_i'(w)}{2(\wp_i(z)-\wp_i(w))}\right)^2-\wp_i(z)-\wp_i(w)$$

у відповідних позначеннях отримаємо

$$\wp_i(z+w)=\wp_i(z+\frac{\omega_i}{2}+w+\frac{\omega_i}{2})=\left(\frac{\phi_i'(z)-\phi_i'(w)}{2(\phi_i(z)-\phi_i(w))}\right)^2-\phi_i(z)-\phi_i(w)=\frac{\Lambda_{i,1}(z,w)}{\Lambda_{i,2}(z,w)}. \tag{6}$$

Існують поліноми $G_{i,s,k,l}(z)$, $H_{s,t}(z)$ такі, що

$$G_{i,s,k,l}(z)=\frac{d^s}{d\,w^s}(\Lambda_{i,1}^k(z,w)\Lambda_{i,2}^l(z,w))|_{w=0},H_{s,t}(z)=$$

$$=\frac{d^{s-t}}{d\,w^{s-t}}(\Lambda_{1,2}^{-L}(z,w)\Lambda_{2,2}^{-L}(z,w))|_{w=0}, \tag{7}$$

$\ln L(G_{i,s,k,l})\leqslant s\ln(s(k+l)+c_1(s+k+l))$, $\deg G_{i,s,k,l}\leqslant 4(k+l)$.

З (5)–(7), подібно, як у працях [4], [5], отримаємо

$$F^{(s)}(z)=\frac{d^s}{d\,w^s}((\Lambda_{1,2}^{-L}(z,w)\Lambda_{2,2}^{-L}(z,w))(F(z+w)\Lambda_{1,2}^{L}(z,w)\Lambda_{2,2}^{L}(z,w)))|_{w=0}=$$

$$=\sum_{t=0}^{s}\binom{s}{t}H_{s,t}(z)\sum_{l_1=0}^{L}\sum_{l_2=0}^{L}C_{l_1,l_2}\sum_{i=0}^{t}\binom{t}{i}G_{1,t-i,l_1,L-l_1}(z)G_{2,i,l_2,L-l_2}(z). \tag{8}$$

Позначимо

$$F_{s,t}(z)=\sum_{l_1=0}^{L}\sum_{l_2=0}^{L}C_{l_1,l_2}\sum_{i=0}^{t}\binom{t}{i}G_{1,t-i,l_1,L-l_1}(z)G_{2,i,l_2,L-l_2}(z). \tag{9}$$

Нехай $\xi_3^2=4\xi_1^3-g_{1,2}\xi_1-g_{1,3}$, $\xi_4^2=4\xi_2^3-g_{1,2}\xi_2-g_{1,3}$, $F_{s,n_1,n_2}(\xi_1,\xi_2)$ та $F_{s,t,n_1,n_2}(\xi_1,\xi_2)$ – вирази, отримані з виразів $F^{(s)}(n_1\omega_1+n_2\omega_2)$ та $F_{s,t}(n_1\omega_1+n_2\omega_2)$ заміною $\wp_1(\omega_2)$, $\wp_2(\omega_1)$, $\wp_1'(\omega_2)$, $\wp_2'(\omega_1)$ на ξ_1,ξ_2,ξ_3,ξ_4. Розглянемо $F_{s,t,n_1,n_2}(\xi_1,\xi_2)$, $1\leqslant n_1,n_2\leqslant N$, $0\leqslant t\leqslant s\leqslant S$, як N^2S лінійні форми від nL^2 змінних $C_{l_1,l_2,\tau}$. Згідно з принципом Діріхле ([2], лема 4.1) та (4), (9) виберемо не всі рівні нулю числа $C_{l_1,l_2,\tau}$ так, що для $1\leqslant n_1,n_2\leqslant N$, $0\leqslant t\leqslant s\leqslant S$

$$F_{s,t,n_1,n_2}(\xi_1,\xi_2)=0,\quad |C_{l_1,l_2,\tau}|<\exp(c_2\lambda^6\ln\lambda\, n^2M^3). \tag{10}$$

З (1), (2), (4), (10) одержимо: для $1\leqslant n_1,n_2\leqslant N$, $0\leqslant s\leqslant S$

$$|F^{(s)}(n_1\omega_1+n_2\omega_2)-F_{s,n_1,n_2}(\xi_1,\xi_2)|<\exp(-\frac{1}{2}\lambda^7n^2M^3). \tag{11}$$

З (8)–(11), якщо $1 \leqslant n_1, n_2 \leqslant N$, $0 \leqslant s \leqslant S$, одержимо

$$|F^{(s)}(n_1\omega_1 + n_2\omega_2)| < \exp(-\frac{1}{2}\lambda^7 n^2 M^3). \tag{12}$$

Доведемо, що оцінка (12) також виконується і для $1 \leqslant n_1, n_2 \leqslant N$, $0 \leqslant s \leqslant \lambda S$. Нехай

$$G(z) = F(z)\sigma_1^L(z - \omega_1/2)\sigma_2^L(z - \omega_2/2), \tag{13}$$

де $\sigma_i(z)$ – σ-функція, що відповідає $\wp_i(z)$ [1]. Виберемо найменше можливе ціле r так, щоб виконувалась умова

$$r > 4(N+1)(|\omega_1| + |\omega_1'| + |\omega_2| + |\omega_2'|). \tag{14}$$

Позначимо $R = 4r$. Тоді з формули Ерміта ([2, лема 4.7]) і виразів (2), (4), (5), (10), (13), (14) випливає

$$|G(z)|_{|z|\leqslant R} < \exp(-\lambda^6 \ln\lambda\, n^2 M^3). \tag{15}$$

З (15) отримаємо для $0 \leqslant s \leqslant \lambda S$

$$|G^{(s)}(z)|_{|z|\leqslant r} < \exp(-\frac{1}{2}\lambda^6 \ln\lambda\, n^2 M^3). \tag{16}$$

Для досить малого ε в ε-околах точок $n_1\omega_1$ функція $\sigma_1(z - \omega_1/2)$ та ε-околах точок $n_2\omega_2$ функція $\sigma_2(z - \omega_2)$ не мають нулів, тому для $|n_1|, |n_2| \leqslant 2N$

$$|\sigma_i(z - \omega_i/2)|_{z\in V(\varepsilon, n_1\omega_1 + n_2\omega_2)} > \exp(-c_3\lambda^5 \ln\lambda\, n^2 M^2). \tag{17}$$

З (15)–(17) для $1 \leqslant n_1, n_2 \leqslant N$, $0 \leqslant s \leqslant \lambda S$ отримаємо

$$|F^{(s)}(n_1\omega_1 + n_2\omega_2)| < \exp(-\frac{\lambda^6}{3} \ln\lambda\, n^2 M^3). \tag{18}$$

Враховуючи (11), для $1 \leqslant n_1, n_2 \leqslant N$ та $0 \leqslant s \leqslant \lambda S$ з (18) випливає

$$|F_{s,n_1,n_2}(\xi_1, \xi_2)| < \exp(-\frac{\lambda^6}{4} \ln\lambda\, n^2 M^3). \tag{19}$$

Розглядаючи $F_{s,t,n_1,n_2}(\xi_1, \xi_2)$, $0 \leqslant t \leqslant s \leqslant \lambda S$, $1 \leqslant n_1, n_2 \leqslant N$, як значення відповідного полінома в алгебричних точках, з теореми Ліувілля ([2], лема 9.2), рівностей (2) та (4) отримаємо для $F_{s,t,n_1,n_2}(\xi_1, \xi_2) \neq 0$ оцінку

$$|F_{s,t,n_1,n_2}(\xi_1, \xi_2)| > \exp(-\lambda^5 \ln\lambda\, n^2 M^3). \tag{20}$$

З (9), (20) одержимо

$$|F_{s,n_1,n_2}(\xi_1, \xi_2)| > \exp(-2\lambda^5 \ln\lambda\, n^2 M^3). \tag{21}$$

Оцінки (19) та (21) суперечливі, тому для $1 \leqslant n_1, n_2 \leqslant N$, $0 \leqslant t \leqslant s \leqslant \lambda S$ отримаємо

$$F_{s,n_1,n_2}(\xi_1, \xi_2) = 0. \tag{22}$$

З (22) випливає, що поліном $F(z)$ має не менше $c_4\lambda^7 \ln\lambda\, n^2 M^2$ нулів (з урахуванням кратності), але нулів може бути не більше $c_5\lambda^6 \ln\lambda\, n^2 M^2$ [6], тому для досить великого $\lambda \in \mathbb{N}$ припущення (3) призводить до протиріччя, яке й доводить теорему.

Список використаної літератури

1. *Lawden D.F.* Elliptic functions and applications / *D.F. Lawden.* – 1989.
2. *Фельдман Н.И.* Седьмая проблема Гильберта / *Н.И. Фельдман.* – М.: Изд-во МГУ, 1982.
3. *Fel'dman N.I.* Transcendental Numbers / *N.I. Fel'dman, Yu.V. Nesterenko.* – Springer, 1998.
4. *Chudnovsky G.V.* Algebraic independence of the values of elliptic functions at algebraic points; Elliptic analogue of the Lindemann-Weierschtrass theorem / *G.V. Chudnovsky* // Inventiones Math. – 1980. – Vol. 61. – P. 267-290.
5. *Нестеренко Ю.В.* О мере алгебраической независимости значений эллиптической функции / *Ю.В. Нестеренко* // Изв. РАН. Сер. мат. – 1995. – Т. 59, №4. – С. 155-178.
6. *Brownawell W.D.* Multipliciti estimates for analitic functions (I) / *W.D. Brownawell, D.W. Masser* // J. Reine Angew. Math. – 1980. – Vol. 314. – P. 200-216.

Стаття: надійшла до редакції 05.09.2013
прийнята до друку 16.10.2013

SIMULTANEOUS APPROXIMATION OF VALUES OF TWO WEIERSTRASS ELLIPTIC FUNCTIONS

Ol'ha MYLYO, Yaroslav KHOLYAVKA

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000
e-mail: ya_khol@franko.lviv.ua, olga.mylyo@gmail.com

Let $\wp_i(z)$, $(i = 1, 2)$, be algebraically independent Weierstrass elliptic functions with algebraic invariants. We estimate from below a simultaneous approximation of the values of each of these functions in other periods.

Key words: simultaneous approximation, Weierstrass elliptic function.

СОВМЕСТНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ЗНАЧЕНИЙ ДВУХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ВЕЙЕРШТРАССА

Ольга МИЛЬО, Ярослав ХОЛЯВКА

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000
e-mail:olga.mylyo@gmail.com, ya_khol@franko.lviv.ua

Пусть $\wp_i(z)$ – алгебраически независимые эллиптические функции Вейерштрасса с алгебраическими инвариантами ($i = 1, 2$). Получено оценку совместного приближения значений каждой из этих функций в периодах другой.

Ключевые слова: совместные приближения, эллиптическая функция Вейерштрасса.