ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2013. Випуск 78. С. 27–34
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2013. Issue 78. P. 27–34

УДК 517.53

УМОВА ЗАСТОСОВНОСТІ ФОРМУЛИ ДЛЯ ОБЧИСЛЕННЯ R-ПОРЯДКУ ЦІЛИХ РЯДІВ ДІРІХЛЕ

Тарас ГЛОВА[1], Петро ФІЛЕВИЧ[2]

[1]*Інститут прикладних проблем механіки і математики*
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3б, Львів, 79060
[2]*Прикарпатський національний університет ім. Василя Стефаника,*
вул. Шевченка, 57, Івано-Франківсьък, 76025
e-mail: hlova_taras@ukr.net, filevych@mail.ru

Нехай (λ_n) – невід'ємна зростаюча до $+\infty$ послідовність. Доведено, що умова $\ln n = o(\lambda_n \ln \lambda_n)$, $n \to \infty$, є необхідною для того, щоб R-порядок $R(F)$ кожного цілого ряду Діріхле вигляду $F(s) = \sum a_n e^{s\lambda_n}$ можна було обчислити за формулою

$$R(F) = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\lambda_n \ln \lambda_n}{-\ln |a_n|}.$$

Достатність цієї умови раніше довів К. Сугімура.

Ключові слова: степеневий ряд, ціла функція, максимум модуля, порядок, формула Коші-Адамара, ряд Діріхле, R-порядок.

1. Вступ. Для трансцендентної цілої функції

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad z = re^{i\theta}, \tag{1}$$

нехай $M(r, f) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$ – її максимум модуля. Важливою характеристикою зростання функції f є її порядок

$$\rho(f) = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln \ln M(r, f)}{\ln r}.$$

Добре відома класична формула Коші-Адамара

$$\rho(f) = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{n \ln n}{-\ln |a_n|},$$

яка дає змогу визначити порядок за послідовністю $(|a_n|)$ модулів тейлорових коефіцієнтів функції f.

Нехай Λ – клас невід'ємних зростаючих до $+\infty$ послідовностей $\lambda = (\lambda_n)$. Для послідовності $\lambda \in \Lambda$ через $S(\lambda)$ позначимо клас цілих (абсолютно збіжних в $\mathbb{C}$) рядів Діріхле вигляду

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{s\lambda_n}, \quad s = \sigma + it, \tag{2}$$

які не зводяться до експоненціального полінома. Для ряду (2) його максимум модуля визначимо за рівністю $M(\sigma, F) = \sup\{|F(s)| \ : \ \mathrm{Re}\, s = \sigma\}$. Як відомо, величину

$$R(F) = \overline{\lim_{\sigma \to +\infty}} \frac{\ln \ln M(\sigma, F)}{\sigma}$$

називатимемо R-порядком (порядком за Ріттом) ряду (2).

Поняття лінійного порядку цілого ряду Діріхле є узагальненням поняття порядку цілої функції, зображеної степеневим рядом. Справді, якщо в степеневому ряді (1) зробити заміну $z = e^s$, то отримаємо ряд Діріхле (2) з показниками $\lambda_n = n$, $n \in \mathbb{N}_0$, і за такої заміни одержимо $\sigma = \ln r$, $M(\sigma, F) = M(r, f)$, $R(F) = \rho(f)$, а для кожного ряду Діріхле $F \in S(\lambda)$ правильним буде аналог формули Коші-Адамара

$$R(F) = K(F) := \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\lambda_n \ln \lambda_n}{-\ln |a_n|}. \tag{3}$$

Ж. Рітт [1] довів, що формула (3) залишатиметься правильною для кожного ряду Діріхле $F \in S(\lambda)$ у випадку довільної послідовності $\lambda \in \Lambda$, що задовольняє умову

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\ln n}{\lambda_n} < +\infty.$$

Сильніший результат, який сформулюємо у вигляді теореми, отримав К. Сугімура [2].

Теорема А. *Нехай $\lambda \in \Lambda$. Умова*

$$\ln n = o(\lambda_n \ln \lambda_n), \quad n \to \infty, \tag{4}$$

є достатньою для того, щоб для кожного ряду Діріхле $F \in S(\lambda)$ була правильна рівність $R(F) = K(F)$.

Крім того, К. Сугімура [2] довів таку теорему.

Теорема В. *Нехай $\lambda \in \Lambda$. Умова*

$$\underline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\ln n}{\lambda_n \ln \lambda_n} = 0 \tag{5}$$

є необхідною для того, щоб для кожного ряду Діріхле $F \in S(\lambda)$ була правильна рівність $R(F) = K(F)$.

Отже, якщо умова (5) не виконується, то існує ряд Діріхле $F \in S(\lambda)$, для якого $R(F) \neq K(F)$. Насправді, для цього ряду $R(F) > K(F)$, оскільки завжди $R(F) \geq K(F)$ (див., наприклад, [3, с. 25-26]). Зауважимо таке: якщо $K(F) = +\infty$, то й $R(F) = +\infty$, тобто $R(F) = K(F)$.

Ф.Й. Гече [4] розглянув таке запитання: чи можна умову (4) в теоремі А замінити умовою (5), тобто чи є умова (5) необхідною і достатньою для того, щоб для кожного ряду Діріхле $F \in S(\lambda)$ була правильна рівність $R(F) = K(F)$? Ф.Й. Гече [4] довів таку теорему, з якої випливає негативна відповідь на розглянуте ним запитання.

Теорема C. *Для довільної спадної до 0 послідовності* (ε_n) *існують послідовність* $\lambda \in \Lambda$, *ряд Діріхле* $F \in S(\lambda)$ *і послідовність натуральних чисел* (n_k) *такі, що*

$$\frac{\ln n_k}{\lambda_{n_k} \ln \lambda_{n_k}} = \varepsilon_{n_k} \quad (k \in \mathbb{N}_0); \quad R(F) > K(F).$$

Наша мета – довести, що шуканою необхідною і достатньою умовою є, насправді, умова (4). Цей факт випливає з такої теореми (і теореми A).

Теорема 1. *Нехай* $\lambda \in \Lambda$. *Якщо умова* (4) *не виконується, тобто*

$$\delta(\lambda) := \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\lambda_n \ln \lambda_n} > 0,$$

то існує ряд Діріхле $F \in S(\lambda)$ *такий, що* $R(F) > K(F)$.

Зазначимо, що теорему A пізніше передоводили К. Танака [5] і А.Г. Аспейтія [6]. Найзагальніші результати щодо опису зростання цілих рядів Діріхле вигляду (2) в термінах послідовності $(|a_n|)$ отримав М.М. Шеремета [3]. Зокрема, з результатів М.М. Шеремети (див. в [3] наслідок 2 з теореми 1.11 і доведення наслідку 2 з теореми 1.12) випливає таке узагальнення теореми A.

Теорема D. *Нехай* $\lambda \in \Lambda$. *Якщо* $\delta(\lambda) < +\infty$, *то для кожного ряду Діріхле* $F \in S(\lambda)$ *такого, що* $K(F) < \frac{1}{\delta(\lambda)}$, *правильна нерівність*

$$R(F) \le \frac{K(F)}{1 - \delta(\lambda)K(F)}.$$

Отже, якщо $K(F) < \frac{1}{\delta(\lambda)}$ для деякого ряду Діріхле $F \in S(\lambda)$, то за теоремою D величини $K(F)$ і $R(F)$ є скінченними одночасно. Така ситуація загалом неможлива, якщо $K(F) \ge \frac{1}{\delta(\lambda)}$.

Теорема 2. *Нехай* $\lambda \in \Lambda$. *Якщо* $\delta(\lambda) > 0$, $K \in \left[\frac{1}{\delta(\lambda)}, +\infty\right)$, *а* H *– зростаюча до* $+\infty$ *на* $(-\infty, +\infty)$ *функція, то існує ряд Діріхле* $F \in S(\lambda)$ *такий, що* $K(F) = K$ *і*

$$\varlimsup_{\sigma\to+\infty} \frac{\ln M(\sigma, F)}{H(\sigma)} = +\infty. \tag{6}$$

Теорема 1 є наслідком з теореми 2 (достатньо вибрати $H(\sigma) = \exp(\sigma^2)$).

Теорема 2, з одного боку, свідчить про істотність умови $K(F) < \frac{1}{\delta(\lambda)}$ в теоремі D. З іншого боку, з цієї теореми можна зробити такий висновок: якщо $\delta(\lambda) > 0$, то ряди Діріхле $F \in S(\lambda)$ можуть зростати як завгодно швидко навіть тоді, коли величина $K(F)$ для них залишається скінченною.

2. Допоміжні результати. Сформулюємо декілька лем, якими скористаємось для доведення теореми 2.

Через Ω позначимо клас додатних на $(-\infty, +\infty)$ функцій Φ таких, що Φ' є неперервною, додатною і зростаючою до $+\infty$ на $(-\infty, +\infty)$ функцією.

Нехай $\Phi \in \Omega$. Тоді Φ – опукла на $(-\infty, +\infty)$ функція і

$$\frac{\Phi(\sigma)}{\sigma} \to +\infty, \quad \sigma \to +\infty.$$

З останнього співвідношення випливає, що для кожного $x > 0$ визначеною є функція

$$\widetilde{\Phi}(x) = \max\{\sigma x - \Phi(\sigma) \ : \ \sigma \in (-\infty, +\infty)\},$$

яка називається (див., наприклад, [8, с. 186]) спряженою за Юнгом з функцією Φ. Функція

$$\widehat{\Phi}(\sigma) = \sigma - \frac{\Phi(\sigma)}{\Phi'(\sigma)}, \quad \sigma \in (-\infty, +\infty),$$

називається (див., наприклад, [3, с. 18]) спряженою за Ньютоном з функцією Φ.

Легко переконатися, що Φ' набуває на $(-\infty, +\infty)$ усі значення з $(0, +\infty)$. Нехай φ – функція, обернена до Φ'. Тоді функція φ є зростаючою на $(0, +\infty)$ і набуває на зазначеному інтервалі усі значення з $(-\infty, +\infty)$. Добре відоме таке твердження (див. [3, с. 18], [8, с. 186-187]).

Лема A. *Нехай $\Phi \in \Omega$. Тоді:*

1) $\widehat{\Phi}(\sigma)$ є зростаючою до $+\infty$ на $(-\infty, +\infty)$ функцією;

2) $\widetilde{\Phi}(x) = x\widehat{\Phi}(\varphi(x))$, $x > 0$, де φ – функція, обернена до Φ'.

Перше з двох наведених далі тверджень добре відоме, а друге отримано в [7].

Лема B. *Нехай (x_n) – додатна неспадна послідовність. Якщо*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x_n} < +\infty,$$

то $n = o(x_n)$, $n \to \infty$.

Лема C. *Нехай $\lambda \in \Lambda$, а (a_n) – комплексна послідовність. Для того, щоб ряд Діріхле* (2) *був цілим, необхідно і досить, щоб виконувалась умова*

$$\frac{1}{\lambda_n} \ln \frac{1}{\sum_{k=n}^{\infty} |a_k|} \to +\infty, \quad n \to \infty.$$

3. Доведення теореми 2. Розглянемо послідовність $\lambda \in \Lambda$ таку, що $\delta(\lambda) > 0$, і нехай $K \in \left[\frac{1}{\delta(\lambda)}, +\infty\right)$ – довільне фіксоване число, а H – зростаюча до $+\infty$ на $(-\infty, +\infty)$ функція. Доведемо, що існує ряд Діріхле $F \in S(\lambda)$, для якого $K(F) = K$ і виконується співвідношення (6).

Приймемо $\delta = \frac{1}{K}$ і зафіксуємо числа α і β такі, що $0 < \alpha < \beta < \delta$.

Легко бачити, що існує функція $\Phi \in \Omega$, для якої

$$H(\sigma) = o(\Phi(\sigma)), \quad \sigma \to +\infty; \tag{7}$$

$$\Phi(\sigma) \geq \Psi(\sigma) := \exp\left(\frac{\sigma}{\alpha}\right), \quad \sigma \in (-\infty, +\infty). \tag{8}$$

Через φ позначимо функцію, обернену до Φ'. З (8) випливає, що $\widetilde{\Phi}(x) \leq \widetilde{\Psi}(x) = \alpha x \ln \frac{\alpha x}{e}$ для всіх $x > 0$, тому за лемою A отримаємо

$$x\widehat{\Phi}(\varphi(x)) = \widetilde{\Phi}(x) < \beta x \ln x, \quad x \geq x_0. \tag{9}$$

Нехай (β_k) – зростаюча до δ послідовність з інтервалу (β, δ). Оскільки $\beta_k < \delta(\lambda)$ для кожного $k \in \mathbb{N}_0$, то існує зростаюча послідовність (n_k) цілих чисел така, що

$$\frac{\ln n_k}{\lambda_{n_k} \ln \lambda_{n_k}} \geq \beta_k, \quad k \in \mathbb{N}_0. \tag{10}$$

Приймемо $\delta_n = \beta_0$ для всіх $n \leq n_0$ і $\delta_n = \beta_{k+1}$ для всіх $n \in (n_k, n_{k+1}]$ та $k \in \mathbb{N}_0$. Зауважимо, що (δ_n) – неспадна послідовність з інтервалу (β, δ), яка прямує до δ. Звідси, зокрема, випливає, що для деякого $p_0 \in \mathbb{N}_0$ такого, що $\lambda_{p_0} \geq x_0$, послідовність $(e^{\delta_n \lambda_n \ln \lambda_n})_{n=p_0}^{\infty}$ зростаюча. Крім того, для всіх $k \in \mathbb{N}_0$ за (10) одержуємо $e^{\delta_{n_k} \lambda_{n_k} \ln \lambda_{n_k}} \leq n_k$. Тому згідно з лемою B

$$\sum_{n=p_0}^{\infty} e^{-\delta_n \lambda_n \ln \lambda_n} = +\infty. \tag{11}$$

Далі зауважимо, що за (9) правильні нерівності

$$e^{-\delta_n \lambda_n \ln \lambda_n} < e^{-\lambda_n \widehat{\Phi}(\varphi(\lambda_n))}, \quad n \geq p_0. \tag{12}$$

З (11) і (12) випливає, що для кожного цілого $p \geq p_0$ визначеною є величина

$$m(p) = \min \left\{ m \in \{p, p+1, \dots\} \ : \ \sum_{n=p}^{m} e^{-\delta_n \lambda_n \ln \lambda_n} \geq e^{-\lambda_p \widehat{\Phi}(\varphi(\lambda_p))} \right\},$$

причому $m(p) > p$. Приймемо

$$l(p) = \max \left\{ l \in \{p, p+1, \dots, m(p)\} \ : \ \sum_{n=l}^{m(p)} e^{-\delta_n \lambda_n \ln \lambda_n} \geq e^{-\lambda_l \widehat{\Phi}(\varphi(\lambda_l))} \right\}.$$

Зазначений максимум існує, бо множина, від якої цей максимум береться, є скінченною і непорожньою (число p є її елементом, що випливає з означення величини $m(p)$). Тоді отримаємо $p \leq l(p) < m(p)$.

Виберемо зростаючу послідовність (p_k) цілих чисел (зауважимо, що p_0 вибрано вище) так, щоб виконувались нерівності

$$e^{-\lambda_{p_{k+1}} \widehat{\Phi}(\varphi(\lambda_{p_{k+1}}))} < \frac{1}{2} e^{-\lambda_{m(p_k)} \widehat{\Phi}(\varphi(\lambda_{m(p_k)}))}, \quad k \in \mathbb{N}_0. \tag{13}$$

Для всіх $k \in \mathbb{N}_0$ приймемо $l_k = l(p_k)$ і $m_k = m(p_k)$. Тоді $p_k \leq l_k < m_k < p_{k+1}$ для всіх $k \in \mathbb{N}_0$ і з (13) за індукцією отримуємо

$$e^{-\lambda_{p_{k+j}} \widehat{\Phi}(\varphi(\lambda_{p_{k+j}}))} < \frac{1}{2^j} e^{-\lambda_{m_k} \widehat{\Phi}(\varphi(\lambda_{m_k}))}, \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad j \in \mathbb{N}. \tag{14}$$

Крім того, з означення величини l_k випливає, що

$$\sum_{n=l_k}^{m_k} e^{-\delta_n \lambda_n \ln \lambda_n} = e^{-\delta_{l_k} \lambda_{l_k} \ln \lambda_{l_k}} + \sum_{n=l_k+1}^{m_k} e^{-\delta_n \lambda_n \ln \lambda_n} <$$
$$< e^{-\delta_{l_k} \lambda_{l_k} \ln \lambda_{l_k}} + e^{-\delta_{l_k+1} \lambda_{l_k+1} \ln \lambda_{l_k+1}} < 2 e^{-\delta_{l_k} \lambda_{l_k} \ln \lambda_{l_k}}, \quad k \in \mathbb{N}_0. \tag{15}$$

Нехай $n \in \mathbb{N}_0$. Якщо $n \in [l_k, m_k]$ для деякого $k \in \mathbb{N}_0$, то приймемо $a_n = e^{-\delta_n \lambda_n \ln \lambda_n}$; в іншому разі приймемо $a_n = 0$. Розглянемо ряд Діріхле (2) з так визначеними коефіцієнтами a_n і зауважимо, що його можна записати у вигляді

$$F(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=l_k}^{m_k} a_n e^{s\lambda_n}.$$

Покажемо, що зазначений ряд задовольняє умови теореми.

Насамперед доведемо, що цей ряд цілий. Для кожного $q \in \mathbb{N}_0$ введемо позначення

$$T_q := \sum_{n=q}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=q}^{\infty} a_n.$$

За нерівностями (15) і (12) для всіх $q \in (m_{k-1}, l_k]$ і $k \in \mathbb{N}$ одержуємо

$$\sum_{n=q}^{m_k} a_n = \sum_{n=l_k}^{m_k} a_n = \sum_{n=l_k}^{m_k} e^{-\delta_n \lambda_n \ln \lambda_n} < 2e^{-\delta_{l_k} \lambda_{l_k} \ln \lambda_{l_k}} \leq 2e^{-\delta_q \lambda_q \ln \lambda_q} < 2e^{-\lambda_q \widehat{\Phi}(\varphi(\lambda_q))},$$

а для всіх $q \in (l_k, m_k]$ і $k \in \mathbb{N}$, використовуючи означення величини l_k і нерівності (12), отримаємо

$$\sum_{n=q}^{m_k} a_n = \sum_{n=q}^{m_k} e^{-\delta_n \lambda_n \ln \lambda_n} < e^{-\lambda_q \widehat{\Phi}(\varphi(\lambda_q))}.$$

Тому, скориставшись нерівностями (15), (12) та (14), для всіх $q \in (m_{k-1}, m_k]$ і $k \in \mathbb{N}$ отримуємо

$$T_q = \sum_{n=q}^{m_k} a_n + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=l_{k+j}}^{m_{k+j}} a_n < 2e^{-\lambda_q \widehat{\Phi}(\varphi(\lambda_q))} + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=l_{k+j}}^{m_{k+j}} e^{-\delta_n \lambda_n \ln \lambda_n} <$$

$$< 2e^{-\lambda_q \widehat{\Phi}(\varphi(\lambda_q))} + \sum_{j=1}^{\infty} 2e^{-\delta_{l_{k+j}} \lambda_{l_{k+j}} \ln \lambda_{l_{k+j}}} \leq 2e^{-\lambda_q \widehat{\Phi}(\varphi(\lambda_q))} + 2\sum_{j=1}^{\infty} e^{-\delta_{p_{k+j}} \lambda_{p_{k+j}} \ln \lambda_{p_{k+j}}} <$$

$$< 2e^{-\lambda_q \widehat{\Phi}(\varphi(\lambda_q))} + 2\sum_{j=1}^{\infty} e^{-\lambda_{p_{k+j}} \widehat{\Phi}(\varphi(\lambda_{p_{k+j}}))} < 2e^{-\lambda_q \widehat{\Phi}(\varphi(\lambda_q))} + 2\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} e^{-\lambda_{m_k} \widehat{\Phi}(\varphi(\lambda_{m_k}))} \leq$$

$$\leq 2e^{-\lambda_q \widehat{\Phi}(\varphi(\lambda_q))} \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j}\right) = 4e^{-\lambda_q \widehat{\Phi}(\varphi(\lambda_q))},$$

звідки

$$\frac{1}{\lambda_q} \ln \frac{1}{T_q} \geq \widehat{\Phi}(\varphi(\lambda_q)) - \frac{\ln 4}{\lambda_q}, \quad q > m_0.$$

Оскільки з леми A випливає, що $\widehat{\Phi}(\varphi(\lambda_q)) \to +\infty$, $q \to \infty$, то

$$\frac{1}{\lambda_q} \ln \frac{1}{T_q} \to +\infty, \quad q \to \infty,$$

тому за лемою C побудований вище ряд Діріхле цілий, тобто $F \in S(\lambda)$.

Крім того, для цього ряду величина

$$\frac{\lambda_n \ln \lambda_n}{-\ln|a_n|}$$

дорівнює $\frac{1}{\delta_n}$ у випадку, якщо $n \in [l_k, m_k]$ для деякого $k \in \mathbb{N}_0$, і дорівнює 0 в іншому разі. Звідси, врахувавши, що $\delta_n \to \delta, n \to \infty$, легко отримуємо рівність $K(F) = \frac{1}{\delta} = K$.

Нарешті, оскільки $a_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}_0$, то

$$M(\sigma, F) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{\sigma\lambda_n} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=l_k}^{m_k} e^{-\delta_n \lambda_n \ln \lambda_n} e^{\sigma\lambda_n},$$

тому для всіх достатньо великих $k \in \mathbb{N}_0$, згідно з означенням величин l_k і m_k, одержуємо

$$M(\varphi(\lambda_{l_k}), F) > \sum_{n=l_k}^{m_k} e^{-\delta_n \lambda_n \ln \lambda_n} e^{\varphi(\lambda_{l_k})\lambda_n} \geq$$

$$\geq e^{\varphi(\lambda_{l_k})\lambda_{l_k}} \sum_{n=l_k}^{m_k} e^{-\delta_n \lambda_n \ln \lambda_n} \geq e^{\varphi(\lambda_{l_k})\lambda_{l_k}} e^{-\lambda_{l_k} \widehat{\Phi}(\varphi(\lambda_{l_k}))} = e^{\Phi(\varphi(\lambda_{l_k}))}.$$

Оскільки $\varphi(\lambda_{l_k}) \to +\infty$, $k \to \infty$, то звідси отримуємо

$$\varlimsup_{\sigma \to +\infty} \frac{\ln M(\sigma, F)}{\Phi(\sigma)} \geq 1. \tag{16}$$

Враховуючи (7), з (16) легко отримуємо (6). Теорему 2 доведено.

Список використаної літератури

1. *Ritt J.F.* On certain points in the theory of Dirichlet series / *J.F. Ritt* // Amer. J. Math. – 1928. – Vol. 50. – P. 73-78.
2. *Sugimura K.* Übertragung einiger Satze aus der Theorie der ganzen Funktionen auf Dirichletschen Reihen / *K. Sugimura* // Math. Z. – 1929. – Bd. 29. – S. 264-277.
3. *Шеремета М.М.* Цілі ряди Діріхле / *М.М. Шеремета.* – К.: ІСДО, 1993.
4. *Гече Ф.И.* Замечания о формулах для определения линейного порядка целой функции, представленной рядом Дирихле / *Ф.И. Гече* // Укр. мат. журн. – 1964. – Т. 16, № 5. – С. 7-12.
5. *Tonaka C.* Note on Dirichlet series (V). On the integral functions defined by Dirichlet series (I) / *C. Tonaka* // Tôhoku. Math. J. – 1953. – Vol. 2, № 1. – P. 67-78.
6. *Azpeitia A.G.* A remark on the Ritt order of entire functions defined by Dirichlet series / *A.G. Azpeitia* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1961. – Vol.12, № 5. – P. 722-723.
7. *Шеремета М.М.* Про зростання цілого ряду Діріхле / *М.М. Шеремета* // Укр. мат. журн. – 1999. – Т. 51, № 8. – С. 1149–1153.
8. *Евграфов М.А.* Асимптотические оценки и целые функции / *М.А. Евграфов.* – М.: Наука, 1979.

Стаття: надійшла до редакції 25.10.2013
прийнята до друку 11.12.2013

A CONDITION OF APPLICABILITY OF A FORMULA FOR CALCULATING OF R-ORDER OF ENTIRE DIRICHLET SERIES

Taras HLOVA[1], **Petro FILEVYCH**[2]

[1] *Pidsryhach Institute of Applied Problems of Mechanics and Mathematics of NAS of Ukraine,*
Naukova Str., 3b, Lviv, 79060
[2] *Vasyl Stefanyk Precarpathian National University,*
Shevchenko Str., 57, Ivano-Frankivsk, 76025
e-mail: hlova_taras@ukr.net, filevych@mail.ru

Let (λ_n) be a nonnegative sequence, increasing to $+\infty$. It is proved that the condition $\ln n = o(\lambda_n \ln \lambda_n)$, $n \to \infty$, is necessary in order that for every Dirichlet series of the form $F(s) = \sum a_n e^{s\lambda_n}$ its R-order $R(F)$ can be calculated by the formula

$$R(F) = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\lambda_n \ln \lambda_n}{-\ln |a_n|}.$$

Formerly K. Sugimura proved the sufficiency of this condition.

Key words: power series, entire function, maximum modulus, order, Cauchy-Hadamard formula, Dirichlet series, R-order.

УСЛОВИЕ ПРИМЕНИМОСТИ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ R-ПОРЯДКА ЦЕЛОГО РЯДА ДИРИХЛЕ

Тарас ГЛОВА, Петр ФИЛЕВИЧ

Институт прикладных проблем механики и математики
им. Я.С.Подстригача НАН Украины,
ул. Наукова, 3б, Львов, 79060
[2] *Прикарпатский национальный университет им. Василия Стефаника,*
ул. Шевченко, 57, Ивано-Франковск, 76025
e-mail: hlova_taras@ukr.net, filevych@mail.ru

Пусть (λ_n) – неотрицательная возрастающая к $+\infty$ последовательность. Доказано, что условие $\ln n = o(\lambda_n \ln \lambda_n)$, $n \to \infty$, является необходимым для того, чтобы R-порядок $R(F)$ любого целого ряда Дирихле вида $F(s) = \sum a_n e^{s\lambda_n}$ можно было найти по формуле

$$R(F) = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\lambda_n \ln \lambda_n}{-\ln |a_n|}.$$

Достаточность этого условия ранее доказал К. Сугимура.

Ключевые слова: степенной ряд, целая функция, максимум модуля, порядок, формула Коши-Адамара, ряд Дирихле, R-порядок.