ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2016. Випуск 82. С. 20–26
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2016. Issue 82. P. 20–26

УДК 517.95, 519.21

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ДЛЯ ГІЛЛЯСТИХ ПРОЦЕСІВ З НЕПЕРЕРВНИМ ЧАСОМ ТА МІГРАЦІЄЮ

Ірина БАЗИЛЕВИЧ, Христина ЯКИМИШИН

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mails: I_Bazylevych@yahoo.com, Yakymyshyn_Hrystyna@ukr.net

Виведено диференціальне рівняння для твірної функції гіллястого процесу з міграцією та неперервним часом і систему диференціальних рівнянь для розподілу ймовірностей цього гіллястого процесу.

Ключові слова: гіллястий процес, неперервний час, міграція, твірна функція, диференціальне рівняння, система диференціальних рівнянь, розподіл ймовірностей.

1. Вступ. Перша стаття для гіллястих процесів з імміграцією [1] була опублікована в 1957 р. Цей напрямок вивчали багато вчених. В 1980 р. С.В. Нагаєв і Л.В. Хан [2] та Н. Янев і К. Мітов [3] паралельно опублікували статті, де вперше досліджували задачу поєднання еміграції та імміграції, тобто дослідження міграційних процесів. Майже у всіх відомих публікаціях, де досліджувались гіллясті процеси з міграцією, розглядався випадок дискретного часу.

2. Постановка задачі. Розглядаємо гіллястий процес $\mu(t)$ з одним типом частинок, з міграцією та неперервним часом. Тут $\mu(t)$ – кількість частинок у момент часу t. Вважаємо, що в початковий момент часу в системі одна частинка, тобто

$$\mu(0) = 1.$$

Процес $\mu(t)$ можна подати як поєднання двох процесів – однорідний гіллястий процес Белмана-Харріса $\xi(t)$ та однорідний процес міграції $\zeta(t)$. Якщо в момент часу t в системі існує випадкова кількість $\mu(t)$ частинок, то вони розмножуються незалежно одна від одної та незалежно від свого походження за тим самим законом. Закон розмноження частинок у середині деякої системи визначається процесом $\xi(t)$. Крім того, в систему ще можуть іммігрувати частинки та відбуватися еміграція. Імміграція та еміграція визначаються процесом $\zeta(t)$, де $\zeta(t)$ – позначає кількість частинок у момент часу t, які емігрують із системи або іммігрують в неї. Очевидно, що

$$\mu(t) = max\{0, \xi(t) + \zeta(t)\}. \tag{1}$$

2010 Mathematics Subject Classification: 30D15, 30D35

Опишемо детальніше процеси $\xi(t)$ та $\zeta(t)$.

Спочатку розглядаємо $\xi(t)$. Нехай у момент часу t в системі існує $\mu(t)$ частинок. Ці частинки незалежно від походження та незалежно одна від одної, розмножуються за тим самим законом $\xi(t)$. Тому достатньо визначити закон розподілу однієї частинки.

Позначимо через $\xi_i(\Delta t)$ $(i = 1, \ldots, \mu(t))$ кількість нащадків i-ї частинки за час Δt, тобто в момент часу $t + \Delta t$ і, враховуючи однорідність $\xi(t)$ припускаємо, що

$$P\{\xi_i(t+\Delta t) = n \mid \xi_i(t) = 1\} = P\{\xi_i(\Delta t) = n \mid \xi_i(0) = 1\} =$$
$$= H_n(\Delta t) = \begin{cases} h_n\Delta t + o(\Delta t), & \text{якщо } n = 0,\, 2,\, 3, \ldots; \\ 1 + h_n\Delta t + o(\Delta t), & \text{якщо } n = 1, \end{cases}$$

де $\sum\limits_{n=0}^{\infty} h_n = 0$, $h_1 \leqslant 0$, $h_j \geqslant 0$ $(j = 0, 2, \ldots)$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} H_n(t) = 1$.

Процес $\xi(t + \Delta t)$ визначається як сукупність нащадків кожної частинки $\mu_i(t)$, а саме

$$\xi(t+\Delta t) = \sum_{i=1}^{\mu(t)} \xi_i(\Delta t).$$

Переходимо до процесу $\zeta(t)$. Насамперед вважаємо, що $\zeta(0) = 0$. У довільний момент часу $t \in [0; \infty)$ з ймовірністю $P_k(t)$ в популяцію іммігрує k частинок $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ або з ймовірністю $P_r(t)$ з популяції емігрує r частинок $(r = -m, \ldots, -1)$ і

$$\sum_{k=-m}^{\infty} P_k(t) = 1, \tag{2}$$

$$P\{\zeta(t) = k\} = P_k(t),\ k \geqslant -m. \tag{3}$$

Процес міграції відбувається так. Як уже зазначалось, у випадковий момент часу (позначимо його τ_1) вперше відбувається міграція у процесі $\mu(t)$, ймовірнісний розподіл якої визначається співвідношеннями (2), (3). Після цього вважаємо, що процес $\zeta(t)$ знову набуває нульового значення та перебуває у цьому стані випадковий час τ_2. У момент часу $\tau_1 + \tau_2$ у систему знову іммігрують або навпаки емігрують з неї частинки та після цього процес $\zeta(t)$ знову набуває значення нуль, у якому перебуває випадковий час τ_3, і так далі. Випадкові величини τ_1, τ_2, τ_3, $\ldots$, τ_n вважаємо незалежними та однаково розподіленими.

Введемо таке позначення $S_n = \tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_n$. Процес S_n є процесом відновлення, а $S_1, S_2, \ldots, S_n$ — моментами відновлення.

Далі припускаємо, що розподіли процесу $\zeta(t)$ у моменти часу $S_1, S_2, \ldots, S_n$ збігаються, а також, що $\zeta(t)$ — однорідний марковський процес.

Задамо асимптотику при $\Delta t \to 0$:

$$P_0(\Delta t) = 1 + p_0\Delta t + o(\Delta t),\ P_k(\Delta t) = p_k\Delta t + o(\Delta t),\ k = -m, \ldots, -1, 1, \ldots$$

причому

$$\sum_{k=-m}^{\infty} p_k = 0,\ p_0 \leqslant 0,\ p_j \geqslant 0\ (j = -m \ldots, -1, 1, 2, \ldots).$$

Надалі будемо вважати, що $P_{-m}(t) > 0$ для довільного $t > 0$.

Отже, процес $\mu(t)$ можна описати так. У початковий момент часу у системі міститься одна частинка, тобто $\mu(0) = 1$. Ця частинки розмножуються за уже вказаним законом розподілу процесу $\xi(t)$. Далі поряд з еволюцією процесу $\xi(t)$ з певною ймовірністю можуть ще потрапляти частинки чи навпаки емігрувати внаслідок дії процесу $\zeta(t)$. Розподіл процесу $\zeta(t)$ не залежить від $\xi(t)$.

Враховуючи (1), кількість частинок у момент часу $t + \Delta t$ дорівнює

$$\mu(t + \Delta t) = \max\Big\{\sum_{i=1}^{\mu(t)} \xi_i(\Delta t) + \zeta_t(\Delta t);\ 0\Big\},$$

де $\zeta_t(\Delta t)$ – кількість частинок, які емігрували з системи або іммігрували в систему протягом часу $(t, t + \Delta t]$.

Вважаємо, що випадкові моменти $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n, \ldots$ не залежать від процесу $\xi(t)$ та не залежать значення процесу $\zeta(t)$ у ці моменти. Також кількість частинок, які іммігрують у систему або емігрують з неї, не залежить від $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n, \ldots$, а також від процесу $\xi(t)$.

Твірну функцію процесу $\mu(t)$ будемо позначати через $F_\mu(t, s)$, а процесу $\xi(t)$ — через $F_\xi(t, s)$ і

$$F_\mu(t, s) = \sum_{n=0}^{\infty} P\{\mu(t) = n\}s^n,\ F_\xi(t, s) = \sum_{n=0}^{\infty} P\{\xi(t) = n\}s^n,\ |s| \leqslant 1,\ s \in \mathbb{C}.$$

Твірні функції щільностей перехідних ймовірностей для процесів $\mu(t)$, $\xi(t)$ позначимо через $f_\mu(s)$ та $h(s)$, відповідно. $h(s)$ визначаємо так:

$$h(s) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n s^n,\ |s| \leqslant 1,\ s \in \mathbb{C}.$$

Замість класичної твірної функції для процесу $\zeta(t)$ розглядатимемо функцію

$$\widehat{F}_\zeta(t, s) = \sum_{n=-m}^{\infty} P\{\zeta(t) = n\}s^n, \quad 0 < |s| \leqslant 1,$$

яку назвемо *узагальненою твірною функцією.* Також введемо *узагальнену твірну функцію щільностей* перехідних ймовірностей для процесу $\zeta(t)$

$$f_\zeta(s) = \sum_{l=-m}^{\infty} p_l s^l, \quad 0 < |s| \leqslant 1.$$

Далі будемо використовувати таке позначення.

Нехай $\{a_n\}_{-\infty}^{\infty}$ – деяка послідовність дійсних чисел. Позначимо

$$A(s) = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n s^n,$$

де $s \in \mathbb{C}$, $0 < |s| < s_0$, k — деяке натуральне число і $\sum\limits_{n=-k}^{\infty} a_n(s_0)^n < \infty$.Тоді

$$\langle A(s)\rangle_0 = \sum_{n=-k}^{0} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} a_n s^n.$$

Очевидно, що $\langle A(s)$ визначено для всіх $s \in [-1, 1]$.

Лема 1. *Нехай* $A(s) = \sum\limits_{n=-k}^{\infty} a_n s^n$ *і* $B(s) = \sum\limits_{n=-k}^{\infty} b_n s^n$. *Тоді*

$$\langle A(s) + B(s)\rangle_0 = \langle A(s)\rangle_0 + \langle B(s)\rangle_0 .$$

Якщо C *— довільна константа, то* $\langle CA(s)\rangle_0 = C\langle A(s)\rangle_0$.

Лема 2. *Твірна функція процесу* $\mu(t)$ *в момент часу* $t + \Delta t$ *дорівнює*

$$F_\mu(t + \Delta t, s) = \langle F_\xi(t + \Delta t, s)\widehat{F}_{\zeta_t}(\Delta t, s)\rangle_0.$$

Позначимо через θ_1 — момент першого потрапляння в нуль процесу $\mu(t)$, а також введемо систему таких позначень

$$Q(t) = P\{\mu(t) > 0 \mid \theta_1 > t\},$$

$$Q_i(t) = P\{\mu(t) = i \mid \theta_1 > t\} = \left.\frac{\partial^i F_\mu(t, s)}{i!\partial s^i}\right|_{s=0}, \quad i = 0, 1, 2, \dots .$$

3. Основні результати.

Теорема 1. *Твірна функція процесу* $\mu(t)$ *задовольняє диференціальне рівняння*

$$\frac{\partial F_\mu(t, s)}{\partial t} = h(F_\mu(t, s)) + \langle F_\mu(t, s)\widehat{f_\zeta}(s)\rangle_0,$$

з початковою умовою

$$\mu(0) = 1.$$

Доведення. Позаяк процеси $\xi(t)$, $\zeta(t)$ – однорідні, то процес, який задається співвідношенням

$$\mu(t + \Delta t) = \sum_{j=1}^{\mu(t)} \xi_j(\Delta t) + \zeta_t(\Delta t),$$

також однорідний.

Відомо, що в початковий момент часу в системі є одна частинка.

Позначимо через $\xi_1(\Delta t)$ кількість нащадків цієї частинки за час Δt. Враховуючи, що кількість частинок у системі визначається еволюцією цієї частинки та дією міграції, то в момент часу Δt в системі буде

$$\max\{\xi_1(\Delta t) + \zeta_0(\Delta t), 0\}$$

частинок. Кожна з існуючих частинок у момент часу Δt через час t, з врахуванням міграційних процесів, матимеме випадкову кількість нащадків

$$\mu(t + \Delta t) = \sum_{j=0}^{max\{\xi_1(\Delta t)+\zeta_0(\Delta t),0\}} \mu_j(t).$$

Отже, твірну функцію процесу $\mu(t)$ у момент часу $t+\Delta t$ можна подати у вигляді

$$F_\mu(t+\Delta t, s) = F_{\max\{\xi_1(\Delta t)+\zeta_0(\Delta t),0\}}(F_\mu(t,s)).$$

Це означає, що

$$\begin{aligned} F_\mu(t+\Delta t, s) &= \langle F_{\xi_1}(\Delta t, F_\mu(t,s))\widehat{F}_\zeta(\Delta t, s)\rangle_0 = \\ &= \langle (F_\mu(t,s) + \Delta t h(F_\mu(t,s)) + o(\Delta t))(1+\Delta t\widehat{f}_\zeta(s) + o(\Delta t))\rangle_0 = \\ &= \langle F_\mu(t,s) + \Delta t(h(F_\mu(t,s)) + F_\mu(t,s)\widehat{f}_\zeta(s)) + o(\Delta t)\rangle_0 = \\ &= F_\mu(t,s) + \Delta t(h(F_\mu(t,s)) + \langle F_\mu(t,s)\widehat{f}_\zeta(s)\rangle_0) + o(\Delta t). \end{aligned}$$

Звідси випливає диференціальне рівняння для твірної функції процесу $\mu(t)$

$$\frac{\partial F_\mu(t,s)}{\partial t} = h(F_\mu(t,s)) + \langle F_\mu(t,s)\widehat{f}_\zeta(s)\rangle_0.$$

Теорема доведена. □

Зауваження 1. Розпишемо детальніше $F_\mu(t,s)\widehat{f}_\zeta(s)$.

$$F_\mu(t,s)\widehat{f}_\zeta(s) = \sum_{n=0}^{\infty} P\{\mu(t)=n\}s^n \sum_{l=-m}^{\infty} p_l s^l =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=-m}^{\infty} P\{\mu(t)=n\}p_l s^{n+l} = \sum_{k=-m}^{\infty}\sum_{l=-m}^{k} P\{\mu(t)=k-l\}p_l s^k.$$

Отже,

$$\langle F_\mu(t,s)\widehat{f}_\zeta(s)\rangle_0 = \sum_{k=-m}^{0}\sum_{l=-m}^{k} P\{\mu(t)=k-l\}p_l + \sum_{k=1}^{\infty} s^k \sum_{l=-m}^{k} P\{\mu(t)=k-l\}p_l.$$

Отже, диференціальне рівняння можна записати так:

$$\frac{\partial F_\mu(t,s)}{\partial t} = h(F_\mu(t,s)) + \sum_{k=-m}^{0}\sum_{l=-m}^{k} P\{\mu(t)=k-l\}p_l + \sum_{k=1}^{\infty} s^k \sum_{l=-m}^{k} P\{\mu(t)=k-l\}p_l. \quad (4)$$

Теорема 2. 1. *Якщо існує таке натуральне число n, що для кожного $t>0$ виконується умова $\sum_{u=n+1}^{\infty} Q_u(t) = o\big(\sum_{u=-m}^{n} Q_u(t)\big)$, то для процесу $\mu(t)$ виконується система диференціальних рівнянь*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q_0(t)}{\partial t} = h(Q_0(t)) + \displaystyle\sum_{l=-m}^{0} Q_{0-l}(t)p_l, \\ \dfrac{\partial Q_1(t)}{\partial t} = h'(Q_0(t))Q_1(t) + \displaystyle\sum_{l=-m}^{1} Q_{1-l}(t)p_l, \\ \dfrac{\partial Q_2(t)}{\partial t} = h''(Q_0(t))Q_1^2(t) + h'(Q_0(t))Q_2(t) + \displaystyle\sum_{l=-m}^{2} Q_{2-l}(t)p_l, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \dfrac{\partial Q_n(t)}{\partial t} = \sum n! h^{(n)}(Q_0(t)) \displaystyle\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{n_i!}\left(\frac{Q_i(t)}{i!}\right)^i + \sum_{l=-m}^{n} Q_{n-l}(t)p_l, \quad \sum_{i=1}^{n} i n_i = n, \end{cases} \quad (5)$$

з початковими умовами

$$Q_1(0) = 1,\ Q_k(0) = 0, \quad k = 0, 2, ..., n.$$

2. *Якщо права частина кожного рівняння системи* (5) *задовольняє умову Ліпшиця, то існує розв'язок і він єдиний.*

Доведення. Продиференціюємо (4) по s

$$\frac{\partial^2 F_\mu(t,s)}{\partial t \partial s} = h'(F_\mu(t,s))\frac{\partial F_\mu(t,s)}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial s}\left(\sum_{k=1}^{\infty} s^k \sum_{l=-m}^{k} P\{\mu(t) = k-l\}p_l\right) =$$

$$= h'(F_\mu(t,s))\frac{\partial F_\mu(t,s)}{\partial s} + \sum_{k=1}^{\infty} k s^{k-1} \sum_{l=-m}^{k} P\{\mu(t) = k-l\}p_l.$$

Підставимо $s = 0$. Тоді

$$\left.\frac{\partial^2 F_\mu(t,s)}{\partial t \partial s}\right|_{s=0} = \left.\left(h'(F_\mu(t,s))\frac{\partial F_\mu(t,s)}{\partial s} + \sum_{k=1}^{\infty} k s^{k-1} \sum_{l=-m}^{k} P\{\mu(t) = k-l\}p_l\right)\right|_{s=0},$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left.\left(\frac{\partial F_\mu(t,s)}{\partial s}\right)\right|_{s=0} = \left.\left(h'(F_\mu(t,s)\frac{\partial F_\mu(t,s)}{\partial s}\right)\right|_{s=0} + \left.\sum_{l=-m}^{1} P\{\mu(t) = 1-l\}p_l\right|_{s=0},$$

$$\frac{\partial Q_1(t)}{\partial t} = h'(Q_0(t))Q_1(t) + \sum_{l=-m}^{1} Q_{1-l}(t)p_l.$$

Продиференціюємо рівняння (4) ще раз по змінній s

$$\frac{\partial^3 F_\mu(t,s)}{\partial t \partial s^2} = h''(F_\mu(t,s))(\frac{\partial F_\mu(t,s)}{\partial s})^2 +$$

$$+ h'(F_\mu(t,s))\frac{\partial^2 F_\mu(t,s)}{\partial s^2} + \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)s^{k-2} \sum_{l=-m}^{k} P\{\mu(t) = k-l\}p_l,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 F_\mu(t,s)}{\partial s^2}\right) = (h''(F_\mu(t,s))\left(\frac{\partial F_\mu(t,s)}{\partial s}\right)^2 + h'(F_\mu(t,s))\frac{\partial^2 F_\mu(t,s)}{\partial s^2} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)s^{k-2} \sum_{l=-m}^{k} P\{\mu(t) = k-l\}p_l,$$

і знову підставимо $s = 0$. У підсумку отримуємо

$$\frac{\partial Q_2(t)}{\partial t} = h''(Q_0(t))Q_1^2(t) + h'(1 - Q(t))Q_2(t) + \sum_{l=-m}^{2} Q_{2-l}(t)p_l.$$

Продовжуючи аналогічні міркування, одержуємо

$$\frac{\partial Q_k(t)}{\partial t} = \sum k! h^{(k)}(Q_0(t)) \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{n_i!}\left(\frac{Q_i(t)}{i!}\right)^i + \sum_{l=-m}^{n} Q_{n-l}(t)p_l + \sum_{l=n+1}^{k} Q_{k-l}(t)p_l,$$

де $\sum\limits_{i=1}^{k} in_i = k$.

Враховуючи те, що існує таке натуральне число n, що для кожного $t > 0$ виконується умова $\sum\limits_{u=n+1}^{\infty} P_u(t) = o\big(\sum\limits_{u=-m}^{n} P_u(t)\big)$, то отримуємо систему (5). Це є система нелінійних диференціальних рівнянь. Враховуючи те, що функції

$$\sum k! h^{(k)}(Q_0(t)) \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{n_i!} \left(\frac{Q_i(t)}{i!}\right)^i + \sum_{l=-m}^{k} Q_{k-l}(t) p_l,$$

(де $\sum\limits_{i=1}^{k} in_i = k$, $k = 1, \ldots, n$) задовольняють умову Ліпшиця, то згідно з [5] для цієї системи існує розв'язок, причому він єдиний. Теорему доведено. □

Список використаної літератури

1. *Севастьянов Б.А.* Предельные теоремы для ветвящихся случайных процессов специального вида // Теория вероятн. и ее примен. — 1957. — **2**, №3. — С. 339–348.
2. *Нагаев С.В., Хан Л.В.* Предельные теоремы для критического ветвящегося процесса Гальтона-Ватсона с миграцией // Теория вероятн. и ее примен. — 1980. — **25**, №3. — С. 523–534.
3. *Yanev N.M., Mitov K.V.* Controlled branching processes: the case of random migration // C. R. Acad. Bulg. Sci. — 1980. — **33**. — P. 473–475.
4. *Севастьянов Б. А.* Ветвящиеся процессы. — Москва: Наука, 1971. — 436 с.
5. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Пер. с нем. — 4-е изд., испр. — Москва: Наука, 1971. — 576 с.

Стаття: надійшла до редколегії 01.10.2016
прийнята до друку 14.12.2016

DIFFERENTIAL EQUATIONS FOR BRANCHING PROCESSES WITH CONTINUOUS TIME AND MIGRATION

Iryna BAZYLEVYCH, Khrystyna YAKYMYSHYN

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytets'ka Str., 1, Lviv, 79000
e-mails: I_Bazylevych@yahoo.com, Yakymyshyn_Hrystyna@ukr.net

In the paper, we derive a differential equation for a generating function of a branching process with migration and continuous time as well as a system of differential equations for the probability distribution of this branching process.

Key words: branching process, continuous time, generating function, differential equation, system of differential equations, probability distribution.