ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2017. Випуск 83. С. 5–19
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2017. Issue 83. P. 5–19

УДК 512.534

ПРО НАПІВГРУПУ ID_∞

Олег ГУТІК, Анатолій САВЧУК

Львівський національний університет ім. Івана Франка,
вул. Університетська, 1, 79000, Львів
e-mails: o_gutik@lnu.edu.ua, ovgutik@yahoo.com,
asavchuk1@meta.ua

Досліджуємо напівгрупу ID_∞ всіх часткових коскінченних ізометрій множини цілих чисел $\mathbb{Z}$. Доведено, що фактор-напівгрупа $\mathsf{ID}_\infty/\mathfrak{C}_{\mathsf{mg}}$ за мінімальною груповою конгруенцією $\mathfrak{C}_{\mathsf{mg}}$ ізоморфна групі $\mathsf{Iso}(\mathbb{Z})$ усіх ізометрій множини $\mathbb{Z}$, ID_∞ є F-інверсною напівгрупою, а також, що напівгрупа ID_∞ ізоморфна напівпрямому добутку $\mathsf{Iso}(\mathbb{Z}) \ltimes_{\mathfrak{h}} \mathscr{P}_\infty(\mathbb{Z})$ вільної напівґратки з одиницею $(\mathscr{P}_\infty(\mathbb{Z}), \cup)$ групою $\mathsf{Iso}(\mathbb{Z})$. Знайдено достатні умови, за виконання яких, трансляційно неперевнна топологія на ID_∞ є дискретною, а також побудовано недискретну гаусдорфову напівгрупову топологію на ID_∞. Досліджуємо проблему ізоморфного занурення дискретної напівгрупи ID_∞ у гаусдорфові топологічні напівгрупи близькі до компактних.

Ключові слова: напівгрупа ізометрій, часткова біекція, напівтопологічна напівгрупа, топологічна напівгрупа, компактний, зліченно компактний, слабко компактний, дискретний простір, вкладення.

1. Термінологія та означення.

Ми користуватимемося термінологією з [14, 16, 32, 35, 37].

Надалі у тексті потужність множини A позначатимемо через $|A|$, перший нескінченний кардинал через ω, і множину цілих чисел — через $\mathbb{Z}$. Через $\operatorname{cl}_X(A)$ і $\operatorname{int}_X(A)$ позначатимемо *замикання* та *внутрішність* підмножини A в топологічному просторі X.

Якщо визначене часткове відображення $\alpha\colon X \rightharpoonup Y$ з множини X у множину Y, то через $\operatorname{dom}\alpha$ і $\operatorname{ran}\alpha$ будемо позначати його *область визначення* й *область значень*, відповідно, а через $(x)\alpha$ і $(A)\alpha$ — образи елемента $x \in \operatorname{dom}\alpha$ та підмножини $A \subseteq \operatorname{dom}\alpha$ при частковому відображенні α, відповідно. Часткове відображення $\alpha\colon X \rightharpoonup Y$ називається *ко-скінченним*, якщо множини $X \setminus \operatorname{dom}\alpha$ та $Y \setminus \operatorname{ran}\alpha$ — скінченні.

Рефлексивне, антисиметричне та транзитивне відношення на множині X називається *частковим порядком* на X. Множина X із заданим на ній частковим порядком $\leqslant$ називається *частково впорядкованою множиною* і позначається $(X, \leqslant)$.

2010 Mathematics Subject Classification: 20M18, 20M20, 20M30, 22A15, 22A25, 54D30, 54D40, 54E52, 54H10

Елемент x частково впорядкованої множини $(X, \leqslant)$ називається:

- *максимальним* (*мінімальним*) в $(X, \leqslant)$, якщо з відношення $x \leqslant y$ ($y \leqslant x$) в $(X, \leqslant)$ випливає рівність $x = y$;
- *найбільшим* (*найменшим*) в $(X, \leqslant)$, якщо $y \leqslant x$ ($x \leqslant y$) для всіх $y \in X$.

У випадку, якщо $(X, \leqslant)$ — частково впорядкована множина і $x \leqslant y$, для деяких $x, y \in X$, то будемо говорити, що елементи x та y — *порівняльні* в $(X, \leqslant)$. Якщо ж для елементів $x \leqslant y$ не виконується жодне з відношень $x \leqslant y$ або $y \leqslant x$, то говоритимемо, що елементи x та y — непорівняльні у частково впорядкованій множині $(X, \leqslant)$. Частковий порядок $\leqslant$ на X називається *лінійним*, якщо довільні два елементи в $(X, \leqslant)$ — порівняльні.

Відображення $h\colon X \to Y$ з частково впорядкованої множини $(X, \leqslant)$ в частково впорядковану множину $(Y, \leqslant)$ називається *монотонним*, якщо з $x \leqslant y$ випливає $(x)h \leqslant (y)h$.

Якщо S — напівгрупа, то її підмножина ідемпотентів позначається через $E(S)$. Напівгрупа S називається *інверсною*, якщо для довільного її елемента x існує єдиний елемент $x^{-1} \in S$ такий, що $xx^{-1}x = x$ та $x^{-1}xx^{-1} = x^{-1}$. В інверсній напівгрупі S вищеозначений елемент x^{-1} називається *інверсним до* x. *В'язка* — це напівгрупа ідемпотентів, а *напівґратка* — це комутативна в'язка. Надалі через $(\mathscr{P}_\infty(\mathbb{R}), \cup)$ позначатимемо *вільну напівґратку* з одиницею над множиною дійсних чисел, тобто множину усіх скінченних (разом з порожньою) підмножин множини $\mathbb{R}$ з операцією об'єднання.

Відношення еквівалентності $\mathfrak{K}$ на напівгрупі S називається *конгруенцією*, якщо для елементів a і b напівгрупи S з того, що виконується умова $(a, b) \in \mathfrak{K}$ випливає, що $(ca, cb), (ad, bd) \in \mathfrak{K}$, для всіх $c, d \in S$. Відношення $(a, b) \in \mathfrak{K}$ ми також будемо записувати $a\mathfrak{K}b$, і в цьому випадку говоритимемо, що *елементи* a *і* b *є* $\mathfrak{K}$*-еквівалентними*.

Якщо S — напівгрупа, то на $E(S)$ визначено частковий порядок

$$e \leqslant f \qquad \text{тоді і лише тоді, коли} \qquad ef = fe = e.$$

Так означений частковий порядок на $E(S)$ називається *природним*.

Означимо відношення $\leqslant$ на інверсній напівгрупі S так:

$$s \leqslant t \qquad \text{тоді і лише тоді, коли} \qquad s = te,$$

для деякого ідемпотента $e \in S$. Так означений частковий порядок називається *природним частковим порядком* на інверсній напівгрупі S [32]. Очевидно, що звуження природного часткового порядку $\leqslant$ на інверсній напівгрупі S на її в'язку $E(S)$ є природним частковим порядком на $E(S)$. Інверсна напівгрупа S називається *факторизовною*, якщо для кожного елемента $s \in S$ існує елемент g групи одиниць напівгрупи S такий, що $s \leqslant g$ стосовно природного часткового порядку $\leqslant$ на S.

Відомо, що група $\mathsf{Iso}(\mathbb{Z})$ ізометрій множини цілих чисел $\mathbb{Z}$ ізоморфна напівпрямому добутку $\mathbb{Z}(+) \rtimes \mathbb{Z}_2$ адитивної групи цілих чисел $\mathbb{Z}(+)$ циклічною групою другого порядку $\mathbb{Z}_2$.

Через ID_∞ позначимо напівгрупу всіх часткових коскінченних ізометрій множини цілих чисел $\mathbb{Z}$. Напівгрупа ID_∞ означена в праці Безущак [8], де описано її твірні та доведено, що вона має експоненціальний ріст. Зауважимо, що напівгрупа

ID_∞ є інверсною і, очевидно, є піднапівгрупою напівгрупи всіх часткових коскінченних біекцій множини цілих чисел $\mathbb{Z}$, а елементи напівгрупи ID_∞ — це саме звуження ізометрій множини цілих чисел $\mathbb{Z}$ на коскінченні підмножини в розумінні Лоусона (див. [32, с. 9]). У праці [9] описані відношення Ґріна та головні ідеали напівгрупи ID_∞.

Підмножина A топологічного простору X називається:

- *щільною* в X, якщо $\mathrm{cl}_X(A) = X$;
- *кощільною* в X, якщо $X \setminus A$ — щільна в X;
- *ніде не щільною* в X, якщо $\mathrm{cl}_X(A)$ — кощільна в X;
- F_σ*-множиною*, якщо A є зліченним об'єднанням замкнених множин.

Компактифікацією Стоуна-Чеха тихоновського простору X називається компактний гаусдорфовий простір βX, який містить X як щільний підпростір такий, що довільне неперервне відображення $f\colon X \to Y$ в компактний гаусдорфовий простір Y продовжується до неперервного відображення $\overline{f}\colon \beta X \to Y$ [16].

Топологічний простір X називається:

- *квазірегулярним*, якщо для довільної непорожньої відкритої підмножини U в X існує відкрита непорожня підмножина $V \subseteq U$ така, що $\mathrm{cl}_X(V) \subseteq U$;
- *компактним*, якщо довільне відкрите покриття простору X містить скінченне підпокриття;
- *секвенціально компактним*, якщо довільна послідовність в X містить збіжну підпослідовність;
- *зліченно компактним*, якщо довільне зліченне відкрите покриття простору X містить скінченне підпокриття;
- *слабко компактним*, якщо довільна локально скінченна сім'я відкритих непорожніх підмножин в X є скінченною [4];
- d*-слабко компактним* або DFCC*-простором*, якщо довільна дискретна сім'я відкритих непорожніх підмножин в X є скінченною (див. [33]);
- *псевдокомпактним*, якщо X є цілком регулярним і кожна неперервна дійснозначна функція на X є обмеженою;
- *локально компактним*, якщо для кожної точки $x \in X$ існує відкритий окіл $U(x)$ точки x в X з компактним замиканням $\mathrm{cl}_X(U(x))$;
- *повним за Чехом*, якщо X є цілком регулярним і наріст $\beta X \setminus X$ є F_σ-множиною в βX;
- *берівським*, якщо для кожної послідовності $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ ніде нещільних множин з X об'єднання $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ є кощільною підмножиною в X;
- *спадково берівським*, якщо довільна непорожна замкнена підмножина в X є берівським простором.

За теоремою 3.10.22 з [16], цілком регулярний простір X є слабко компактним тоді і лише тоді, коли X є псевдокомпактним. Кожен компакний та кожен секвенціально компактний простір є зліченно компактним, кожен зліченно компактний простір є слабко компактним, а кожен слабко компактний простір є d-слабко компактним.

Топологічний простір X із заданою на ньому напівгруповою операцією називається *напівтопологічною* (*топологічною*) *напівгрупою*, якщо ця напівгрупова операція на X є нарізно (сукупно) неперервною. Інверсна топологічна напівгрупа з неперервною інверсією називається *топологічною інверсною напівгрупою.* Топологія τ на [інверсній] напівгрупі S називається [*інверсною*] *напівгруповою*, якщо (S,τ) — топологічна [інверсна] напівгрупа. Також, топологія τ на напівгрупі S називається *трансляційно неперервною*, (S,τ) — напівтопологічна напівгрупа

Вивчення напівгрупових недискретних тополологізацій напівгруп починається з класичної праці Ебергарта та Селдена [15], у якій доведено, що кожна напівгрупова гаусдорфова топологія на біциклічному моноїді $\mathscr{C}(p,q)$ є дискретною. У праці [7] Бертман і Уест довели, що кожна гаусдорфова трансляційно неперервна топологія на $\mathscr{C}(p,q)$ є також дискретною. У працях [17, 23] згадані результати були поширені на розширену біциклічну напівгрупу $\mathscr{C}_{\mathbb{Z}}$ та на інтерасоціативності біциклічного моноїда. Також Тайманов у [38] побудував приклад напівгрупи, яка допускає лише дискретну напівгрупову гаусдорфову топологію та в [39] він визначив достатні ознаки недискретної напівгрупової топологізації комутативної напівгрупи. Напівгрупа T називається *Таймановою*, якщо вона містить дві різні точки $0_T, \infty_T$ такі, що $xy=\infty_T$ для довільних різних точок $x,y\in T\setminus\{0_T,\infty_T\}$ і $xy=\infty_T$ у всіх інших випадках [20]. У праці [20] доведено, що довільна Тайманова напівгрупа має такі топологічні властивості: (i) кожна T_1-топологія з неперервними зсувами на T є дискретною; (ii) T замкнена в довільній T_1-топологічній напівгрупі, що містить T як піднапівгрупу; (iii) кожен неізоморфний гомоморфний образ Z напівгрупи T є напівгрупою з нульовим множенням і, отже, є топологічною напівгрупою в довільній топології на Z. Дискретні та недискретні топологізації напівгруп перетворень за модулем берівського чи локально компактного простору вивчали в працях [5, 6, 12, 13, 19, 22, 26, 28, 29].

Проблема ізоморфного занурення напівгруп у гаусдорфові топологічні напівгрупи близькі до компактних досліджували в [1, 2, 3, 6, 12, 13, 18, 21, 23, 24, 25, 27].

Ми доводимо, що фактор-напівгрупа $\mathsf{ID}_\infty/\mathfrak{C}_{\mathsf{mg}}$ за мінімальною груповою конгруенцією $\mathfrak{C}_{\mathsf{mg}}$ ізоморфна групі $\mathsf{Iso}(\mathbb{Z})$ усіх ізометрій множини $\mathbb{Z}$; напівгрупа ID_∞ є F-інверсною напівгрупою, а також, що напівгрупа ID_∞ ізоморфна напівпрямому добутку $\mathsf{Iso}(\mathbb{Z})\ltimes_{\mathfrak{h}}\mathscr{P}_\infty(\mathbb{Z})$ вільної напівґратки з одиницею $(\mathscr{P}_\infty(\mathbb{Z}),\cup)$ групою $\mathsf{Iso}(\mathbb{Z})$. Визначено достатні умови, за виконання яких трансляційно неперервна топологія на ID_∞ є дискретною, а також побудовано недискретну гаусдорфову напівгрупову топологію на ID_∞. Досліджується проблема ізоморфного занурення дискретної напівгрупи ID_∞ у гаусдорфові топологічні напівгрупи близькі до компактних.

2. Структурна теорема для напівгрупи ID_∞.

Найменша групова конгруенція $\mathfrak{C}_{\mathsf{mg}}$ на інверсній напівгрупі S визначається так (див. [35, III.5]):

$$s\mathfrak{C}_{\mathsf{mg}}t \text{ в } S \quad \text{тоді і лише тоді, коли існує ідемпотент} \quad e\in S \quad \text{такий, що} \quad es=et.$$

З означення напівгрупи ID_∞ випливає, що для довільного елемента α напівгрупи ID_∞ існує єдиний елемент γ_α групи одиниць $H(1)$ такий, що $\alpha\leqslant\gamma_\alpha$, а отже, означено відображення

$$\mathfrak{G}\colon \mathsf{ID}_\infty\to H(1)\colon \alpha\mapsto\gamma_\alpha. \tag{1}$$

З означення напівгрупи $\mathbf{ID}_\infty$ випливає, що так означене відображення $\mathfrak{G}$ є сюр'єктивним гомоморфізмом, і тим більше для $\alpha, \beta \in \mathbf{ID}_\infty$ маємо, що

$$\alpha \mathfrak{C}_{\mathsf{mg}} \beta \quad \text{тоді і лише тоді, коли} \quad (\alpha)\mathfrak{G} = (\beta)\mathfrak{G}.$$

Отож, ми довели таку теорему

Теорема 1. *Фактор-напівгрупа $\mathbf{ID}_\infty/\mathfrak{C}_{\mathsf{mg}}$ ізоморфна групі $\mathsf{Iso}(\mathbb{Z})$ усіх ізометрій множини $\mathbb{Z}$, причому природний гомоморфізм $\mathfrak{C}^\natural_{\mathsf{mg}} \colon \mathbf{ID}_\infty \to \mathsf{Iso}(\mathbb{Z})$ визначається за формулою* (1).

Нагадаємо, що інверсна напівгрупа S називається *F-інверсною*, якщо $\mathfrak{C}_{\mathsf{mg}}$-клас $s_{\mathfrak{C}_{\mathsf{mg}}}$ кожного елемента s має найбільший елемент стосовно природного часткового порядку в S [34]. Очевидно, що кожна F-інверсна напівгрупа містить одиницю.

З означення напівгрупи $\mathbf{ID}_\infty$ випливає, що довільного елемента α напівгрупи $\mathbf{ID}_\infty$ існує єдиний елемент γ_α групи одиниць $H(1)$ такий, що $\alpha \leqslant \gamma_\alpha$, а отже, виконується

Наслідок 1. *$\mathbf{ID}_\infty$ є F-інверсною напівгрупою.*

Для довільного елемента s інверсної напівгрупи S позначимо

$$\downarrow s = \{x \in S \colon x \leqslant s\},$$

де $\leqslant$ — природний частковий порядок на S.

Нехай S — довільна F-інверсна напівгрупа. Тоді для довільного елемента s напівгрупи S через e_s позначимо ідемпотент $ss^{-1} \in S$, через t_s — найбільший елемент стосовно природного часткового порядку на S в $\mathfrak{C}_{\mathsf{mg}}$-класі $s_{\mathfrak{C}_{\mathsf{mg}}}$ елемента s, і нехай $T_S = \{t_s \colon s \in S\}$. Тоді напівгрупа S є диз'юнктним об'єднанням множин $\downarrow t$, де $t \in T_S$ [34].

Структура F-інверсних напівгруп викладена у [34], надалі ми далі використаємо такі два твердження для описання напівгрупи $\mathbf{ID}_\infty$.

Лема 1 ([34, лема 3])**.** *Нехай S — F-інверсна напівгрупа з одиницею 1_S. Тоді:*

(*i*) *1_S — одиниця напівґратки $E(S)$;*

(*ii*) *множина T_S з бінарною операцією*

$$u * v = t_{uv}, \qquad u, v \in T_S,$$

є групою з нейтральним елементом 1_S, і t^{-1} є оберненим до елемента t в групі $(T_S, *)$;

(*iii*) *для кожного елемента $t \in T_S$ відображення $\mathfrak{F}_t \colon E(S) \to \downarrow e_t$, означене за формулою*

$$(f)\mathfrak{F}_t = tft^{-1}, \qquad f \in E(S),$$

є сюр'єктивним гомоморфізмом, причому $\mathfrak{F}_{1_S}$ є тотожним відображенням на $E(S)$;

(*iv*) *$(1_S)\mathfrak{F}_t = e_t$ й $(e_t)\mathfrak{F}_{t^{-1}} = e_{t^{-1}}$, для довільного елемента $t \in T_S$;*

(*v*) *для довільних елементів $u, v \in S$ виконується рівність*

$$((1_S)\mathfrak{F}_u)\,\mathfrak{F}_v \cdot (f)\mathfrak{F}_{u*v} = ((f)\mathfrak{F}_u)\,\mathfrak{F}_v, \qquad \text{для довільного ідемпотента} \quad f \in S;$$

(vi) *якщо* $u, v \in T_S$, *то*

$$f \cdot (g)\mathfrak{F}_u \leqslant e_{u*v},$$

для всіх ідемпотентів $f \leqslant e_u$ *та* $g \leqslant e_v$ *напівгрупи* S.

Теорема 2 ([34, теорема 3]). *Нехай* S — F*-інверсна напівгрупа та* $\mathscr{S} = \bigcup_{t \in T_S} (\downarrow e_t \times \{t\})$. *Означимо на* $\mathscr{S}$ *бінарну операцію* $\circ$ *так: якщо* $u, v \in T_S$, *то для ідемпотентів* $f \leqslant e_u$ *та* $g \leqslant e_v$ *приймемо*

$$(f, u) \circ (g, v) = (f \cdot (g)\mathfrak{F}_u, u * v)\,. \tag{2}$$

Тоді $\circ$ — *напівгрупова операція на* $\mathscr{S}$ *і напівгрупа* $(\mathscr{S}, \circ)$ *ізоморфна напівгрупі* S *стосовно відображення* $\mathfrak{H}\colon S \to \mathscr{S}\colon s \mapsto \left(ss^{-1}, t_s\right)$.

Нехай A та B — напівгрупи, $\mathsf{End}(B)$ — напівгрупа ендоморфізмів напівгрупи B і визначено гомоморфізм $\mathfrak{h}\colon A \to \mathsf{End}(B)\colon b \mapsto \mathfrak{h}_b$. Тоді множина $A \times B$ з бінарною операцією

$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 a_2, (b_1)\mathfrak{h}_{a_2} b_2)\,, \qquad a_1, a_2 \in A,\ b_1, b_2 \in B$$

називається *напівпрямим добутком* напівгрупи A напівгрупою B стосовно гомоморфізму $\mathfrak{h}$ і позначається $A \ltimes_{\mathfrak{h}} B$ [32]. У цьому випадку кажуть, що визначена права дія напівгрупи A на напівгрупі B ендоморфізмів (гомоморфізмів). Зауважимо, що напівпрямий добуток інверсних напівгруп не завжди є інверсною напівгрупою (див. [32, розділ 5.3]).

Лема 2. *Відображення* $\mathfrak{h}\colon H(1) \to \mathit{End}(E(\boldsymbol{ID}_\infty))\colon \gamma \mapsto \mathfrak{h}_\gamma$, *де* $(\alpha)\mathfrak{h}_\gamma = \gamma^{-1}\alpha\gamma$ — *автоморфізм напівґратки* $E(\boldsymbol{ID}_\infty)$, *є гомоморфізмом, причому* $\mathfrak{h}_1$ — *тотожний автоморфізм напівґратки* $E(\boldsymbol{ID}_\infty)$.

Доведення. Для довільних $\gamma \in H(1)$, $\varepsilon, \iota \in E(\mathbf{ID}_\infty)$ отримаємо, що

$$(\varepsilon\iota)\mathfrak{h}_\gamma = \gamma^{-1}\varepsilon\iota\gamma = \gamma^{-1}\varepsilon\gamma\gamma^{-1}\iota\gamma = (\varepsilon)\mathfrak{h}_\gamma(\iota)\mathfrak{h}_\gamma,$$

а отже, $\mathfrak{h}_\gamma$ — гомоморфізм напівґратки $E(\mathbf{ID}_\infty)$. Оскільки для довільних $\gamma \in H(1)$ та $\varepsilon \in E(\mathbf{ID}_\infty)$ елемент $\gamma\varepsilon\gamma^{-1}$ є ідемпотентом напівгрупи $\mathbf{ID}_\infty$ і

$$(\gamma\varepsilon\gamma^{-1})\mathfrak{h}_\gamma = \gamma^{-1}(\gamma\varepsilon\gamma^{-1})\gamma = \varepsilon,$$

то гомоморфізм $\mathfrak{h}_\gamma$ — сюр'єктивне відображення. Очевидно, що $\mathfrak{h}_1$ — тотожне відображення напівґратки $E(\mathbf{ID}_\infty)$.

Припустимо, що $(\varepsilon)\mathfrak{h}_\gamma = (\iota)\mathfrak{h}_\gamma$, для деяких $\gamma \in H(1)$, $\varepsilon, \iota \in E(\mathbf{ID}_\infty)$. Оскільки $H(1)$ — група одиниць напівгрупи $\mathbf{ID}_\infty$, то з рівностей

$$\gamma^{-1}\varepsilon\gamma = (\varepsilon)\mathfrak{h}_\gamma = (\iota)\mathfrak{h}_\gamma = \gamma^{-1}\iota\gamma$$

випливає, що

$$\varepsilon = 1\varepsilon 1 = \gamma\gamma^{-1}\varepsilon\gamma\gamma^{-1} = \gamma\gamma^{-1}\iota\gamma\gamma^{-1} = 1\iota 1 = \iota,$$

а отже, $\mathfrak{h}_\gamma$ — автоморфізм напівґратки $E(\mathbf{ID}_\infty)$.

Зафіксуємо довільні $\gamma, \delta \in H(1)$. Тоді для довільного ідемпотента $\varepsilon \in \mathbf{ID}_\infty$ маємо, що

$$(\varepsilon)\mathfrak{h}_{\gamma\delta} = (\gamma\delta)^{-1}\varepsilon\gamma\delta = \delta^{-1}\gamma^{-1}\varepsilon\gamma\delta = \delta^{-1}(\varepsilon)\mathfrak{h}_\gamma\delta = ((\varepsilon)\mathfrak{h}_\gamma)\,\mathfrak{h}_\delta = (\varepsilon)\,(\mathfrak{h}_\gamma \cdot \mathfrak{h}_\delta)\,,$$

а отже, так означене відображення $\mathfrak{h}\colon H(1) \to \mathsf{End}\,(E(\mathbf{ID}_\infty))$ є гомоморфізмом. $\square$

Наступна теорема описує структуру напівгрупи $\mathbf{ID}_\infty$.

Теорема 3. *Напівгрупа $\mathbf{ID}_\infty$ ізоморфна напівпрямому добутку $\mathsf{Iso}(\mathbb{Z}) \ltimes_{\mathfrak{h}} \mathscr{P}_\infty(\mathbb{Z})$ вільної напівґратки з одиницею $(\mathscr{P}_\infty(\mathbb{Z}), \cup)$ групою $\mathsf{Iso}(\mathbb{Z})$ усіх ізометрій множини цілих чисел $\mathbb{Z}$.*

Доведення. Оскільки група одиниць $H(1)$ напівгрупи $\mathbf{ID}_\infty$ ізоморфна групі $\mathsf{Iso}(\mathbb{Z})$ усіх ізометрій множини $\mathbb{Z}$, то нам достатньо довести, що напівгрупа $\mathbf{ID}_\infty$ ізоморфна напівпрямому добутку $H(1) \ltimes_{\mathfrak{h}} E(\mathbf{ID}_\infty)$ напівґратки $E(\mathbf{ID}_\infty)$ групою одиниць $H(1)$ напівгрупи $\mathbf{ID}_\infty$ стосовно гомоморфізму $\mathfrak{h}\colon H(1) \to \mathsf{End}\,(E(\mathbf{ID}_\infty)) : \gamma \mapsto \mathfrak{h}_\gamma$, де $(\alpha)\mathfrak{h}_\gamma = \gamma^{-1}\alpha\gamma$.

Означимо відображення $\mathfrak{T}\colon \mathbf{ID}_\infty \to H(1) \ltimes_{\mathfrak{h}} E(\mathbf{ID}_\infty)$ за формулою

$$(\alpha)\mathfrak{T} = \left(\gamma_\alpha, \alpha^{-1}\alpha\right),$$

де елемент γ_α групи одиниць $H(1)$ напівгрупи $\mathbf{ID}_\infty$, визначений формулою (1). Оскільки для довільного елемента α напівгрупи $\mathbf{ID}_\infty$ існує єдиний елемент γ_α групи одиниць $H(1)$ такий, що $\alpha \leqslant \gamma_\alpha$, то з наслідку 1 випливає, що відображення $\mathfrak{T}\colon \mathbf{ID}_\infty \to H(1) \ltimes_{\mathfrak{h}} E(\mathbf{ID}_\infty)$ означене коректно, і воно є сюр'єктивним. Припустимо, що існують елементи α та β напівгрупи $\mathbf{ID}_\infty$ такі, що $(\alpha)\mathfrak{T} = (\beta)\mathfrak{T}$. Тоді $\left(\gamma_\alpha, \alpha^{-1}\alpha\right) = \left(\gamma_\beta, \beta^{-1}\beta\right)$ і, використавши властивість, що для довільного елемента α напівгрупи $\mathbf{ID}_\infty$ існує єдиний елемент γ_α групи одиниць $H(1)$ такий, що $\alpha \leqslant \gamma_\alpha$, і лему 1.4.6 з [32], отримуємо

$$\alpha = \gamma_\alpha\alpha^{-1}\alpha = \gamma_\beta\beta^{-1}\beta = \beta,$$

а отже, відображення $\mathfrak{T}\colon \mathbf{ID}_\infty \to H(1) \ltimes_{\mathfrak{h}} E(\mathbf{ID}_\infty)$ є сюр'єктивним.

Нехай α та β — довільні елементи напівгрупи $\mathbf{ID}_\infty$. Тоді з формули (1) і теореми 1 випливає, що $\alpha\beta\mathfrak{C}_{\mathsf{mg}}\gamma_\alpha\gamma_\beta$, і оскільки $\gamma_\alpha, \gamma_\beta \in H(1)$, то отримуємо, що $\gamma_\alpha\gamma_\beta = \gamma_{\alpha\beta}$. Звідси випливає, що

$$\begin{aligned}
(\alpha)\mathfrak{T}(\beta)\mathfrak{T} &= \left(\gamma_\alpha, \alpha^{-1}\alpha\right)\left(\gamma_\beta, \beta^{-1}\beta\right) = \\
&= \left(\gamma_\alpha\gamma_\beta, \gamma_\beta^{-1}\alpha^{-1}\alpha\gamma_\beta\beta^{-1}\beta\right) = \\
&= \left(\gamma_{\alpha\beta}, \gamma_\beta^{-1}\alpha^{-1}\alpha\gamma_\beta\beta^{-1}\beta\right).
\end{aligned}$$

За лемою 2 відображення $\mathfrak{h}_\gamma\colon E(\mathbf{ID}_\infty) \to E(\mathbf{ID}_\infty)\colon \alpha \mapsto \gamma^{-1}\alpha\gamma$ є автоморфізмом напівґратки $E(\mathbf{ID}_\infty)$, а отже отримуємо, що елемент $\gamma_\beta^{-1}\alpha^{-1}\alpha\gamma_\beta$ є ідемпотентом напівгрупи $\mathbf{ID}_\infty$. Оскільки $\mathbf{ID}_\infty$ — інверсна напівгрупа, то для довільного елемента α напівгрупи $\mathbf{ID}_\infty$ існує єдиний елемент γ_α групи одиниць $H(1)$ такий, що $\alpha \leqslant \gamma_\alpha$. З леми 1.4.6 з [32] виливає, що $\beta = \gamma_\beta\beta^{-1}\beta$, а отже,

$$\begin{aligned}
\gamma_\beta^{-1}\alpha^{-1}\alpha\gamma_\beta\beta^{-1}\beta &= \left(\gamma_\beta^{-1}\alpha^{-1}\alpha\gamma_\beta\right)\left(\beta^{-1}\beta\right)\left(\beta^{-1}\beta\right) = \\
&= \left(\beta^{-1}\beta\gamma_\beta^{-1}\right)\left(\alpha^{-1}\alpha\right)\left(\gamma_\beta\beta^{-1}\beta\right) = \\
&= \left(\gamma_\beta\beta^{-1}\beta\right)^{-1}\left(\alpha^{-1}\alpha\right)\left(\gamma_\beta\beta^{-1}\beta\right) = \\
&= \beta^{-1}\left(\alpha^{-1}\alpha\right)\beta = \\
&= \left(\beta^{-1}\alpha^{-1}\right)(\alpha\beta) = \\
&= (\alpha\beta)^{-1}(\alpha\beta).
\end{aligned}$$

Отож, отримуємо

$$(\alpha\beta)\mathfrak{T} = \left(\gamma_{\alpha\beta}, (\alpha\beta)^{-1}\alpha\beta\right) = (\alpha)\mathfrak{T}(\beta)\mathfrak{T},$$

а отже, відображення $\mathfrak{T}\colon \mathsf{ID}_\infty \to H(1) \ltimes_\mathfrak{h} E(\mathsf{ID}_\infty)$ є гомоморфізмом, що і завершує доведення теореми. $\square$

Позаяк група $\mathsf{Iso}(\mathbb{Z})$ ізоморфна напівпрямому добутку $\mathbb{Z}(+) \rtimes \mathbb{Z}_2$, то з теореми 3 випливає наслідок.

Наслідок 2. *Напівгрупа $\boldsymbol{ID}_\infty$ ізоморфна напівпрямому добутку*

$$(\mathbb{Z}(+) \rtimes \mathbb{Z}_2) \ltimes_\mathfrak{h} \mathscr{P}_\infty(\mathbb{Z}).$$

Надалі нам буде потрібне таке твердження.

Твердження 1. *Для довільного $\alpha \in \boldsymbol{ID}_\infty$ множина*

$$\uparrow\alpha = \{\beta \in \boldsymbol{ID}_\infty \colon \alpha \leqslant \beta\}$$

скінченна.

Доведення. З леми 1.4.6 [32] випливає, що

$$\uparrow\alpha = \left\{\beta \in \mathsf{ID}_\infty \colon \alpha = \alpha\alpha^{-1}\beta\right\},$$

і, використавши те, що у напівгрупі ID_∞ усі ідемпотенти є частковими тотожними відображеннями коскінченних у $\mathbb{Z}$ підмножин, отримуємо, що підмножина $\uparrow\alpha$ є скінченною в ID_∞. $\square$

Твердження 2. *Для довільних $\alpha, \beta \in \boldsymbol{ID}_\infty$ множини*

$$R(\alpha|\beta) = \{\chi \in \boldsymbol{ID}_\infty \colon \alpha\chi = \beta\} \qquad i \qquad L(\alpha|\beta) = \{\chi \in \boldsymbol{ID}_\infty \colon \chi\alpha = \beta\}$$

скінченні. Причому, якщо $R(\alpha|\beta) \neq \varnothing$ ($L(\alpha|\beta) \neq \varnothing$), то $|R(\alpha|\beta) \cap H(1)| = 1$ ($|L(\alpha|\beta) \cap H(1)| = 1$).

Доведення. Зауважимо, очевидно, що $R(\alpha|\beta)$ є підмножиною множини

$$R = \left\{\chi \in \mathsf{ID}_\infty \colon \alpha^{-1}\alpha\chi = \alpha^{-1}\beta\right\},$$

оскільки $\alpha^{-1}\alpha$ є ідемпотентом напівгрупи ID_∞, то отримуємо, що $R \subseteq \uparrow\alpha^{-1}\beta$. Тоді за твердженням 1 отримуємо, що R — скінченна, а отже, $R(\alpha|\beta)$ — скінченна підмножина в ID_∞. Останнє твердження випливає з того, що ID_∞ є F-напівгрупою. Доведення твердження у випадку множини $L(\alpha|\beta)$ є аналогічним. $\square$

3. Про (напів)топологічну напівгрупу ID_∞.

Твердження 3. *Нехай τ — T_1-топологія на напівгрупі $\boldsymbol{ID}_\infty$ стосовно якої ліві (праві) зсуви в $(\boldsymbol{ID}_\infty, \tau)$ є неперервними відображеннями та топологічний простір $(\boldsymbol{ID}_\infty, \tau)$ містить ізольовану точку. Тоді група одиниць $H(1)$ є дискретним підпростором в $(\boldsymbol{ID}_\infty, \tau)$.*

Доведення. Припустимо, що ліві зсуви в $(\mathbf{ID}_\infty, \tau)$ є неперервними відображеннями. Нехай α_0 — ізольована точка в $(\mathbf{ID}_\infty, \tau)$. Тоді з неперервності лівих зсувів у $(\mathbf{ID}_\infty, \tau)$ випливає, що множина $\uparrow\alpha_0$ — відкрито-замкнена, як повний прообраз відкрито-замкненої множини при неперервному лівому зсуві на ідемпотент $\alpha_0\alpha_0^{-1}$. Позаяк τ — T_1-топологія на напівгрупі $\mathbf{ID}_\infty$, то за твердженням 2 група одиниць $H(1)$ напівгрупи $\mathbf{ID}_\infty$ містить ізольовану точку в $(\mathbf{ID}_\infty, \tau)$. Але в кожній групі рівняння $ax = b$ має єдиний розв'язок і множина $\mathbf{ID}_\infty \setminus H(1)$ є двобічним ідеалом в напівгрупі $\mathbf{ID}_\infty$, то з неперервності лівих зсувів у $(\mathbf{ID}_\infty, \tau)$ випливає, що кожен елемент групи одиниць $H(1)$ є ізольованою точкою в просторі $(\mathbf{ID}_\infty, \tau)$.

Для правих зсувів доведення аналогічне. □

Теорема 4. *Нехай τ — берівська T_1-топологія на напівгрупі $\mathbf{ID}_\infty$, стосовно якої ліві (праві) зсуви в $(\mathbf{ID}_\infty, \tau)$ є неперервними відображеннями. Тоді група одиниць $H(1)$ є дискретним підпростором в $(\mathbf{ID}_\infty, \tau)$.*

Доведення. Припустимо, що ліві зсуви в $(\mathbf{ID}_\infty, \tau)$ є неперервними відображеннями. Позаяк напівгрупа $\mathbf{ID}_\infty$ зліченна, то з беровості T_1-простору $(\mathbf{ID}_\infty, \tau)$ випливає, що хоча б один елемент сім'ї $\{\{\alpha\} : \alpha \in \mathbf{ID}_\infty\}$ має непорожню внутрішність в $(\mathbf{ID}_\infty, \tau)$, а отже, простір $(\mathbf{ID}_\infty, \tau)$ містить ізольовану точку. Далі скористаємося твердженням 3. □

Кажуть, що топологія τ на напівгрупі S є *ліво* (*право*) *E-берівською*, якщо для довільного ідемпотента $e \in S$ підпростір eS (Se) в S є берівським.

Теорема 5. *Кожна ліво (право) E-берівська T_1-топологія τ на напівгрупі $\mathbf{ID}_\infty$, стосовно якої праві (ліві) зсуви в $(\mathbf{ID}_\infty, \tau)$ є неперервними відображеннями, дискретна.*

Доведення. Нехай τ — ліво E-берівська T_1-топологія на напівгрупі $\mathbf{ID}_\infty$, стосовно якої ліві (праві) зсуви в $(\mathbf{ID}_\infty, \tau)$ є неперервними відображеннями. Оскільки $\mathbf{ID}_\infty$ — інверсна напівгрупа, то $\alpha\mathbf{ID}_\infty = \alpha\alpha^{-1}\mathbf{ID}_\infty$ для довільного елемента $\alpha \in \mathbf{ID}_\infty$, а отже, $\alpha\mathbf{ID}_\infty$ — берівський підпростір в $(\mathbf{ID}_\infty, \tau)$. Тоді з беровості T_1-простору $\alpha\mathbf{ID}_\infty$ випливає, що хоча б один елемент сім'ї $\{\{\beta\} : \beta \in \alpha\mathbf{ID}_\infty\}$ має непорожню внутрішність в $\alpha\mathbf{ID}_\infty$, а отже, простір $\alpha\mathbf{ID}_\infty$ містить ізольовану точку. Нехай α_0 — ізольована точка в $\alpha\mathbf{ID}_\infty$ і $\alpha\beta = \alpha_0$ для деякого $\beta \in \mathbf{ID}_\infty$. Тоді з неперервності правих зсувів у $(\mathbf{ID}_\infty, \tau)$ та твердження 2 випливає, що множина

$$\{\chi \in \mathbf{ID}_\infty : \chi\beta = \alpha_0\}$$

є скінченною та відкритою в $(\mathbf{ID}_\infty, \tau)$ як повний прообраз відкритої множини при неперервному правому зсуві на елемент β, і, крім того, вона містить елемент α. Звідки випливає, що α — ізольована точка в $(\mathbf{ID}_\infty, \tau)$. З довільності вибору елемента $\alpha \in \mathbf{ID}_\infty$ випливає, що усі точки простору $(\mathbf{ID}_\infty, \tau)$ ізольовані. □

Позаяк в гаусдорфовій напівтопологічній напівгрупі S множини eS і Se — замкнені для довільного ідемпотента $e \in S$, то з теореми 5 випливає такий наслідок

Наслідок 3. *Кожна гаусдорфова трансляційно неперервна спадково берівська топологія τ на напівгрупі $\mathbf{ID}_\infty$ є дискретною.*

Оскільки кожен гаусдорфовий локально компактний топологічний простір є повним за Чехом, а кожен повний за Чехом є спадково берівським (див. [16]), то з наслідку 3 випливає наслідок 4.

Наслідок 4. *Кожна гаусдорфова трансляційно неперервна повна за Чехом (а отже, і локально компактна) топологія τ на напівгрупі $\boldsymbol{ID}_\infty$ є дискретною.*

З наступного прикладу випливає, що на напівгрупі $\mathbf{ID}_\infty$ існує недискретна неберівська гаусдорфова топологія τ_{NB} така, що $(\mathbf{ID}_\infty, \tau_{\mathsf{NB}})$ є топологічною напівгрупою.

Приклад 1. Відомо, що група ізометрій $\mathsf{Iso}(\mathbb{T}^1)$ одиничного кола

$$\mathbb{T}^1 = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| = 1\}$$

на комплексній площині ізоморфна напівпрямому добутку $\mathbb{T}^1 \rtimes \mathbb{Z}_2$ та відображення

$$\theta \colon \mathbb{Z}(+) \rtimes \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{T}^1 \rtimes \mathbb{Z}_2 \colon (z, a) \mapsto (e^{iz}, a)$$

є ізоморфним (алгебричним) зануренням групи $\mathsf{Iso}(\mathbb{Z})$ в групу $\mathsf{Iso}(\mathbb{T}^1)$. Нехай на одиничному колі $\mathbb{T}^1$ задано компактну топологію, індуковану з $\mathbb{C}$, де на $\mathbb{C}$ визначена звичайна евклідова топологія, а на групі $\mathbb{Z}_2$ визначена дискретна топологія. Тоді $\mathbb{T}^1 \rtimes \mathbb{Z}_2$ з топологією добутку є компактною топологічною групою (див. [36, приклад 6.22]), яка індукує на підгрупі $\mathsf{Iso}(\mathbb{Z})$ недискретну групову топологію.

Нехай на напівґратці $\mathscr{P}_\infty(\mathbb{Z})$ задана дискретна топологія. Тоді за теоремою 2.10 з [11, том 1, с. 67] напівгрупа $(\mathbb{Z}(+) \rtimes \mathbb{Z}_2) \ltimes_{\mathfrak{h}} \mathscr{P}_\infty(\mathbb{Z})$ з топологією добутку є топологічною напівгрупою, яка, очевидно, не є дискретним простором.

Лема 3. *Якщо A — дискретний щільний підпростір T_1-топологічного простору X, то A — відкритий підпростір в X.*

Доведення. Припустимо протилежне: існує точка $x \in A$ така, що кожен її відкритий окіл $U(x)$ перетинає множину $X \setminus A$. Зафіксуємо довільний відкритий окіл $U_0(x)$ точки x в топологічному просторі X такий, що $U_0(x) \cap A = \{x\}$. Тоді $U_0(x)$ є відкритим околом деякої точки $y \in U_0(x) \cap X \setminus A$ в топологічному просторі X, а отже, $U_0(x)$ містить нескінченну кількість точок множини A, що суперечить вибору околу $U_0(x)$. З отриманої суперечності випливає твердження леми. □

Теорема 6. *Нехай дискретна напівгрупа $\boldsymbol{ID}_\infty$ є щільною піднапівгрупою T_1-напівтопологічної напівгрупи S й $I = S \setminus \boldsymbol{ID}_\infty \neq \varnothing$. Тоді I є двобічним ідеалом в S.*

Доведення. З леми 3 випливає, що $\mathbf{ID}_\infty$ є відкритим підпростором в S.

Зафіксуємо довільний елемент $y \in I$, якщо $x \cdot y = z \notin I$ для деякого елемента $x \in \mathbf{ID}_\infty$, то існує відкритий окіл $U(y)$ точки y в топологічному просторі S такий, що $\{x\} \cdot U(y) = \{z\} \subset \mathbf{ID}_\infty$. Окіл $U(y)$ містить нескінченну кількість елементів напівгрупи $\mathbf{ID}_\infty$, що суперечить твердженню 2. З отриманого протиріччя випливає, що $x \cdot y \in I$ для всіх $x \in \mathbf{ID}_\infty$ and $y \in I$. Доведення твердження, що $y \cdot x \in I$ для всіх $x \in \mathbf{ID}_\infty$ та $y \in I$ є аналогічним.

Припустимо протилежне: $x \cdot y = w \notin I$, для деяких $x, y \in I$. Тоді $w \in \mathbf{ID}_\infty$ і з нарізної неперервності напівгрупової операції в S випливає, що існують відкриті околи $U(x)$ та $U(y)$ точок x та y в просторі S, відповідно, такі, що $\{x\} \cdot U(y) = \{w\}$ and $U(x) \cdot \{y\} = \{w\}$. Однак обидва околи $U(x)$ і $U(y)$ містять нескінченну кількість елементів напівгрупи ID_∞, а отже, обидві рівності $\{x\}\cdot U(y)=\{w\}$ й $U(x)\cdot\{y\}=\{w\}$ суперечать попередній частині доведення теореми, оскільки $\{x\}\cdot(U(y)\cap\mathsf{ID}_\infty)\subseteq I$. З отриманого протиріччя випливає, що $x\cdot y\in I$. □

Твердження 4. *Нехай гаусдорфова топологічна напівгрупа S містить дискретну напівгрупу ID_∞ як щільну піднапівгрупу. Тоді для довільного $c\in\mathsf{ID}_\infty$ множина*

$$D_c=\{(x,y)\in\mathsf{ID}_\infty\times\mathsf{ID}_\infty\colon xy=c\}$$

вікрито-замкнена в $S\times S$.

Доведення. З леми 3 випливає, що ID_∞ є відкритим підпростором в S. Тоді з неперервності напівгрупової операції в напівгрупі S отримуємо, що D_c — відкрита підмножина в просторі $S\times S$ для довільного елемента $c\in\mathsf{ID}_\infty$.

Припустимо, що існує такий елемент $c\in\mathsf{ID}_\infty$, що D_c є незамкненою підмножиною в $S\times S$. Тоді існує точка накопичення $(a,b)\in S\times S$ множини D_c. З неперервності напівгрупової операції в S випливає, що $a\cdot b=c$. Але $\mathsf{ID}_\infty\times\mathsf{ID}_\infty$ є дискретним підпростором в $S\times S$, а отже, за теоремою 6 точки a і b належать до двобічного ідеалу $I=S\setminus\mathsf{ID}_\infty$, а звідси випливає, що добуток $a\cdot b\in S\setminus\mathsf{ID}_\infty$ не може дорівнювати елементові c. □

Теорема 7. *Якщо гаусдорфова топологічна напівгрупа S містить напівгрупу ID_∞ як щільну дискретну піднапівгрупу, то квадрат $S\times S$ не є слабко компактним простором.*

Доведення. З твердженням 4 для довільного елемента $c\in\mathsf{ID}_\infty$ квадрат $S\times S$ містить відкрито-замкнений дискретний підпростір D_c. У випадку, коли c є одиницею групи одиниць напівгрупи ID_∞, то множина D_c містить нескінченну підмножину $\left\{\left(x,x^{-1}\right):x\in H(1)\right\}$, а отже, множина D_c є нескінченною. Звідси випливає, що простір $S\times S$ не є слабко компактним. □

З іншого боку, кожен зліченно компактний простір є слабко компактним і за теоремою 3.10.4 з [16] замкнений підпростір зліченно компактного простору є знову зліченно компактним, то з теореми 7 випливає наслідок 5.

Наслідок 5. *Якщо гаусдорфова топологічна напівгрупа S містить дискретну напівгрупу ID_∞, то її квадрат $S\times S$ не є зліченно компактним простором.*

Відомо, що компактність і секвенціальна компактність зберігається скінченними добутками (див. [16, розділ 3]), а отже, з наслідку 5 випливають такі два наслідки

Наслідок 6. *Дискретна напівгрупа ID_∞ не занурюється топологічно ізоморфно в жодну гаусдорфову компактну топологічну напівгрупу.*

Наслідок 7. *Дискретна напівгрупа ID_∞ не занурюється топологічно ізоморфно в жодну гаусдорфову секвенціально компактну топологічну напівгрупу.*

Теорема 8. *Якщо гаусдорфова топологічна напівгрупа S містить напівгрупу ID_∞ з ізольованою точкою в ID_∞, то квадрат $S\times S$ не є зліченно компактним простором.*

Доведення. Якщо напівгрупа ID_∞ містить ізольовану точку, то за твердженням 3 група одиниць $H(1)$ є дискретним підпростором в ID_∞. Тоді за твердженням 2.3.3 з [16] отримаємо, що $\operatorname{cl}_{S\times S}(H(1)\times H(1)) = \operatorname{cl}_S(H(1))\times \operatorname{cl}_S(H(1))$, а тоді з теореми 3.10.4 з [16] випливає, що $\operatorname{cl}_{S\times S}(H(1)\times H(1))$ — зліченно компактний простір. Однак $\operatorname{cl}_{S\times S}(H(1)\times H(1))$ — замкнена піднапівгрупа в $S\times S$ (див. [11, т. 1, с. 9–10]), то з аналогічних міркувань (як і в доведенні твердження 4 і теореми 7) отримуємо, що $\operatorname{cl}_{S\times S}(H(1)\times H(1))$ не є слабко компактним підпростором в $S\times S$, а отже, за теоремою 3.10.4 з [16] простір $S\times S$ не є зліченно компактним. □

Теорема 9. *Слабко компактна квазі-регулярна T_1-топологічна інверсна напівгрупа не містить напівгрупу ID_∞ як щільну піднапівгрупу.*

Доведення. Припустимо протилежне: існує слабко компактна квазі-регулярна T_1-топологічна інверсна напівгрупа S, яка містить напівгрупу ID_∞ як щільну піднапівгрупу. Тоді з теореми 2.8 монографії [31] випливає, що простір напівгрупи S є берівським, а отже, хоча б один елемент сім'ї $\mathscr{U} = \{s\colon s\in \mathsf{ID}_\infty\}\cup\{S\setminus \mathsf{ID}_\infty\}$ має непорожню внутрішність. Позаяк усі точки множини $S\setminus \mathsf{ID}_\infty$ є точками дотику до множини ID_∞ у просторі S, то $\operatorname{int}_S(S\setminus \mathsf{ID}_\infty)=\varnothing$, а отже, напівгрупа ID_∞ містить ізольовану точку в просторі S. Тоді за твердженням 3 група одиниць $H(1)$ напівгрупи ID_∞ є дискретним підпростором у напівгрупі ID_∞, а отже, і у просторі S. Припустимо, що група одиниць $H(1)$ напівгрупи ID_∞ не є замкненим підпростором у топологічній інверсній напівгрупі S. Зафіксуємо довільний елемент $s\in S$ такий, що $s\in \operatorname{cl}_S(H(1))\setminus H(1)$. Доведемо, що $ss^{-1}\neq 1\neq s^{-1}s$. Нехай $U(1)$ — довільний відкритий окіл одиниці 1 напівгрупи ID_∞ у топологічній інверсній напівгрупі S такий, що $U(1)\cap \mathsf{ID}_\infty=\{1\}$. Однак S — топологічна інверсна напівгрупа, а отже, існує відкритий окіл $V(s)$ елемента s у просторі S такий, що

$$V(s)\cdot (V(s))^{-1}\cup (V(s))^{-1}\cdot V(s)\subseteq U(1).$$

Але окіл $V(s)$ елемента s містить нескінченну кількість елементів групи одиниць $H(1)$ напівгрупи ID_∞, то

$$\Big(V(s)\cdot (V(s))^{-1}\cup (V(s))^{-1}\cdot V(s)\Big)\cap \mathsf{ID}_\infty\neq\{1\},$$

а це суперечить вибору околу $U(1)$. З отриманої суперечності випливає, що група одиниць $H(1)$ напівгрупи ID_∞ є замкненим підпростором у топологічній інверсній напівгрупі S, і більше того, група одиниць $H(1)$ напівгрупи ID_∞ є групою одиниць напівгрупи S.

Далі зауважимо, що група одиниць $H(1)$ напівгрупи ID_∞ є відкритим підпростором в просторі S. Справді, з наведених міркувань випливає, що напівгрупа S містить ізольовану точку $s_0\in \mathsf{ID}_\infty$ в просторі S. Позаяк S — топологічна інверсна напівгрупа, то повний прообраз $(\{s_0\})\rho_{s_0}^{-1}$ стосовно правого зсуву $\rho_{s_0}\colon S\to S : s\mapsto s\cdot s_0$ є відкритою підмножиною в S. З означення напівгрупи ID_∞ випливає, що $(\{s_0\})\rho_{s_0}^{-1}\cap H(1)=\{1\}$. Доведемо, шо множина $(\{s_0\})\rho_{s_0}^{-1}$ скінченна. Припустимо протилежне. Нехай $(\{s_0\})\rho_{s_0}^{-1}$ — нескінченна множина в S. Тоді з твердження 2 випливає, що відкрита підмножина $(\{s_0\})\rho_{s_0}^{-1}$ містить нескінченну кількість елементів з наросту $S\setminus \mathsf{ID}_\infty$, а отже, вона є відкритим околом деякої точки $x\in S\setminus \mathsf{ID}_\infty$. Але довільний відкритий окіл точки $x \in S \setminus \mathbf{ID}_\infty$ містить нескінченну кількість елементів напівгрупи $\mathbf{ID}_\infty$, а це суперечить твердженню 2, оскільки $\left((\{s_0\})\rho_{s_0}^{-1}\right)\rho_{s_0} = \{s_0\}$. Отож, ми отримали, що множина $(\{s_0\})\rho_{s_0}^{-1}$ відкрита та скінченна, і, крім того, вона містить одиницю 1 групи одиниць $H(1)$. Отже, одиниця 1 групи одиниць $H(1)$ напівгрупи $\mathbf{ID}_\infty$ є ізольованою точкою в просторі S. Зафіксуємо довільний елемент x_0 групи одиниць $H(1)$. Позаяк S — топологічна інверсна напівгрупа, то повний прообраз $(\{1\})\rho_{x_0^{-1}}^{-1}$ стосовно правого зсуву $\rho_{x_0^{-1}} \colon S \to S : s \mapsto s \cdot x_0^{-1}$ є відкритою підмножиною в S. Тоді з означення напівгрупи $\mathbf{ID}_\infty$ випливає, що $(\{1\})\rho_{x_0^{-1}}^{-1} \cap \mathbf{ID}_\infty = \{x_0\}$. Використовуючи твердження 2, отримуємо, що $(\{1\})\rho_{x_0^{-1}}^{-1} \cap S = \{x_0\}$. Отож, група одиниць $H(1)$ напівгрупи $\mathbf{ID}_\infty$ є відкрито-замкненим дискретним підпростором у топологічній інверсній напівгрупі S, а це суперечить слабкій компактності простору S. З отриманого протиріччя випливає твердження теореми. $\square$

Теорема 10. *Напівгрупа $\mathbf{ID}_\infty$ не занурюється в жодну зліченно компактну T_3-топологічну інверсну напівгрупу.*

Доведення. Припустимо, що існує зліченно компактна T_3-топологічна інверсна напівгрупа S, яка містить напівгрупу $\mathbf{ID}_\infty$. Тоді з теорем 2.1.6 і 3.10.4 з [16] випливає, що замикання $\mathrm{cl}_S(\mathbf{ID}_\infty)$ є зліченно компактним T_3-простором, а з твердження II.2 з [15], що $\mathrm{cl}_S(\mathbf{ID}_\infty)$ — топологічна інверсна напівгрупа. Отже, T_3-топологічна інверсна напівгрупа $\mathrm{cl}_S(\mathbf{ID}_\infty)$ містить щільну напівгрупу, а це суперечить теоремі 9. З отриманого протиріччя випливає твердження теореми. $\square$

Подяка

Автори висловлюють подяку С. Бардилі, О. Равському та рецензенту за корисні коментарі та зауваження.

Список використаної літератури

1. L. W. Anderson, R. P. Hunter, and R. J. Koch, *Some results on stability in semigroups*, Trans. Amer. Math. Soc. **117** (1965), 521–529.
2. T. O. Banakh, S. Dimitrova, and O. V. Gutik, *The Rees-Suschkewitsch Theorem for simple topological semigroups*, Mat. Stud. **31** (2009), no. 2, 211–218.
3. T. Banakh, S. Dimitrova, and O. Gutik, *Embedding the bicyclic semigroup into countably compact topological semigroups*, Topology Appl. **157** (2010), no. 18, 2803–2814.
4. R. W. Bagley, E. H. Connell, and J. D. McKnight, Jr., *On properties characterizing pseudo-compact spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **9** (1958), no. 3, 500–506.
5. S. Bardyla, *Classifying locally compact semitopological polycyclic monoids*, Мат. вісник Наук. т-ва ім. Т. Шевченка **13** (2016), 21–28.
6. S. Bardyla and O. Gutik, On a semitopological polycyclic monoid, Algebra Discrete Math. **21** (2016), no. 2, 163–183.
7. M. O. Bertman and T. T. West, *Conditionally compact bicyclic semitopological semigroups*, Proc. Roy. Irish Acad. **A76** (1976), no. 21–23, 219–226.
8. O. Bezushchak, *On growth of the inverse semigroup of partially defined co–finite automorphisms of integers*, Algebra Discrete Math. (2004), no. 2, 45–55.

9. О. О. Безущак, *Відношення Ґріна інверсної напівгрупи частково визначених коскінченних ізометрій дискретної лінійки*, Вісник Київ. ун-ту. Сер. фіз.-мат. (2008), no. 1, 12–16.
10. В. В. Вагнер, *Обощенные группы*, ДАН СССР **84** (1952), 1119–1122.
11. J. H. Carruth, J. A. Hildebrant, and R. J. Koch, *The theory of topological semigroups*, Vols. **I** and **II**, Marcell Dekker, Inc., New York and Basel, 1983 and 1986.
12. I. Chuchman and O. Gutik, *Topological monoids of almost monotone, injective cofinite partial selfmaps of positive integers*, Carpathian Math. Publ. **2** (2010), no. 1, 119–132.
13. I. Chuchman and O. Gutik, *On monoids of injective partial selfmaps almost everywhere the identity*, Demonstr. Math. **44** (2011), no. 4, 699–722.
14. A. H. Clifford and G. B. Preston, *The algebraic theory of semigroups*, Vols. **I** and **II**, Amer. Math. Soc. Surveys 7, Providence, R.I., 1961 and 1967.
15. C. Eberhart and J. Selden, *On the closure of the bicyclic semigroup*, Trans. Amer. Math. Soc. **144** (1969), 115–126.
16. R. Engelking, *General topology*, 2nd ed., Heldermann, Berlin, 1989.
17. I. Fihel and O. Gutik, *On the closure of the extended bicyclic semigroup*, Carpathian Math. Publ. **3** (2011), no. 2, 131–157.
18. І. Гуран, О. Гутік, О. Равський, І. Чучман, *Симетричні топологічні групи та півгрупи*, Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. **74** (2011), 61–73.
19. O. Gutik, *On the dichotomy of a locally compact semitopological bicyclic monoid with adjoined zero*, Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. **80** (2015), 33–41.
20. O. Gutik, *Topological properties of Taimanov semigroups*, Мат. вісник Наук. т-ва ім. Т. Шевченка **13** (2016), 29–34.
21. O. Gutik, J. Lawson, and D. Repovš, *Semigroup closures of finite rank symmetric inverse semigroups*, Semigroup Forum **78** (2009), no. 2, 326–336.
22. O. Gutik and K. Maksymyk, *On semitopological bicyclic extensions of linearly ordered groups*, Мат. методи та фіз.-мех. поля **59** (2016), no. 4, 31–43.
23. O. Gutik and K. Maksymyk, *On semitopological interassociates of the bicyclic monoid*, Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. **82** (2016), 98–108.
24. O. V. Gutik and K. P. Pavlyk, *On topological semigroups of matrix units*, Semigroup Forum **71** (2005), no. 3, 389–400.
25. O. Gutik, K. Pavlyk, and A. Reiter, Topological semigroups of matrix units and countably compact Brandt λ^0-extensions, Mat. Stud. **32** (2009), no. 2, 115–131.
26. O. Gutik and I. Pozdnyakova, *On monoids of monotone injective partial selfmaps of Ln?lex? with cofinite domains and images*, Algebra Discrete Math. **17** (2014), no. 2, 256—279.
27. O. Gutik and D. Repovš, *On countably compact* 0*-simple topological inverse semigroups*, Semigroup Forum, **75** (2007), no. 2, 464–469.
28. O. Gutik and D. Repovš, *Topological monoids of monotone, injective partial selfmaps of* $\mathbb{N}$ *having cofinite domain and image*, Stud. Sci. Math. Hungar. **48** (2011), no. 3, 342–353.
29. O. Gutik and D. Repovš, *On monoids of injective partial selfmaps of integers with cofinite domains and images*, Georgian Math. J. **19** (2012), no. 3, 511–532.
30. O. Gutik and D. Repovš, *On monoids of injective partial cofinite selfmaps*, Math. Slovaca **65** (2015), no. 5, 981–992.
31. R. C. Haworth and R. A. McCoy, *Baire spaces*, Diss. Math **141**, PWN, Warszawa, 1977.
32. M. V. Lawson, *Inverse semigroups. The theory of partial symmetries*, World Scientific, Singapore, 1998.
33. M. Matveev, *A survey of star covering properties*, Topology Atlas preprint, April 15, 1998.
34. R. McFadden and L. O'Carroll, *F-inverse semigroups*, Proc. Lond. Math. Soc., III Ser. **22** (1971), 652–666.

35. M. Petrich, *Inverse semigroups*, John Wiley & Sons, New York, 1984.
36. W. Roelcke and S. Dierolf, Uniform structures on topological groups and their quotients, McGraw-Hill College, New-York, 1982.
37. W. Ruppert, *Compact semitopological semigroups: an intrinsic theory*, Lect. Notes Math. **1079**, Springer, Berlin, 1984.
38. А. Д. Тайманов, *Пример полугруппы, допускающей только дискретную топологию*, Алгебра и логика **12** (1973), no. 1, 114–116; English transl. in: Algebra and Logic **12** (1973), no. 1, 64–65.
39. А. Д. Тайманов, *О топологизации коммутативных полугрупп*, Матем. заметки **17** (1975), no. 5, 745–748; English transl. in: Math. Notes **17** (1975), no. 5, 443–444.

ON THE SEMIGROUP $\mathbf{ID}_\infty$

Oleg GUTIK, Anatolii SAVCHUK

Ivan Franko National University of Lviv,
1, Universytetska Str., 79000, Lviv, Ukraine
e-mails: o_gutik@lnu.edu.ua, ovgutik@yahoo.com,
asavchuk1@meta.ua

We study the semigroup ID_∞ of all partial isometries of the set of integers $\mathbb{Z}$. It is proved that the quotient semigroup $ID_\infty/\mathfrak{C}_{\mathsf{mg}}$, where $\mathfrak{C}_{\mathsf{mg}}$ is the minimum group congruence, is isomorphic to the group $\mathsf{Iso}(\mathbb{Z})$ of all isometries of $\mathbb{Z}$, ID_∞ is an F-inverse semigroup, and ID_∞ is isomorphic to the semidirect product $\mathsf{Iso}(\mathbb{Z}) \ltimes_{\mathfrak{h}} \mathscr{P}_\infty(\mathbb{Z})$ of the free semilattice with unit $(\mathscr{P}_\infty(\mathbb{Z}), \cup)$ by the group $\mathsf{Iso}(\mathbb{Z})$. We give the sufficient conditions on a shift-continuous topology τ on ID_∞ when τ is discrete. A non-discrete Hausdorff semigroup topology on ID_∞ is constructed. Also, the problem of an embedding of the discrete semigroup ID_∞ into Hausdorff compact-like topological semigroups is studied.

Key words: semigroup of isometries, partial bijection, semitopological semigroup, topological semigroup, compact, countably compact, feebly compact, discrete space, embedding.

Стаття: надійшла до редколегії 24.04.2017
доопрацьована 29.05.2017
прийнята до друку 13.11.2017