ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2018. Випуск 86. С. 91–102
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2018. Issue 86. P. 91–102
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
doi: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2018.86.091-102

УДК 512.534

НАПІВГРУПА ЗІРКОВИХ ЧАСТКОВИХ ГОМЕОМОРФІЗМІВ СКІНЧЕННОВИМІРНОГО ЕВКЛІДОВОГО ПРОСТОРУ

Присвячуєтьcя 60-ти річчю проф. М. М. Зарічного

Олег ГУТІК, Катерина МЕЛЬНИК

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, м. Львів, 79000
e-mails: oleg.gutik@lnu.edu.ua, ovgutik@yahoo.com,
chepil.kate@gmail.com

Введено поняття зіркового часткового гомеоморфізму скінченновимірного евклідового простору $\mathbb{R}^n$ і досліджується структура напівгрупи $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$ зіркових часткових гомеоморфізмів простору $\mathbb{R}^n$. Описано структуру ідемпотентів напівгрупи $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$ і відношення Ґріна на $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$. Зокрема доведено, що $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$ — біпроста інверсна напівгрупа, а також, що кожна неодинична конгруенція на $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$ є груповою.

Ключові слова: напівгрупа перетворень, інверсна напівгрупа, частковий гомеоморфізм, зірка, відношення Ґріна, конгруенція.

Ми користуватимемося термінологією з [26, 27, 33, 39].

Надалі будемо вважати, що на n-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ визначена звичайна (евклідова) топологія.

Якщо визначене часткове відображення $\alpha\colon X \rightharpoonup Y$ з множини X у множину Y, то через $\operatorname{dom}\alpha$ і $\operatorname{ran}\alpha$ будемо позначати його *область визначення* та *область значень*, відповідно, а через $(x)\alpha$ і $(A)\alpha$ — образи елемента $x \in \operatorname{dom}\alpha$ та підмножини $A \subseteq \operatorname{dom}\alpha$ при частковому відображенні α, відповідно.

Часткове відображення (перетворення) $\alpha\colon X \rightharpoonup X$ топологічного простору X називається *частковим гомеоморфізмом* простору $\mathbb{R}$, якщо його звуження $\alpha|_{\operatorname{dom}\alpha}\colon \operatorname{dom}\alpha \to \operatorname{ran}\alpha$ є гомеоморфізмом.

Якщо S — напівгрупа, то її підмножина ідемпотентів позначається через $E(S)$. Напівгрупа S називається *інверсною*, якщо для довільного її елемента x існує єдиний елемент $x^{-1} \in S$ такий, що $xx^{-1}x = x$ та $x^{-1}xx^{-1} = x^{-1}$. В інверсній напівгрупі S

2010 Mathematics Subject Classification: 20M15, 20M50, 18B40

вище означений елемент x^{-1} називається *інверсним до* x. *В'язка* — це напівгрупа ідемпотентів, а *напівґратка* — це комутативна в'язка.

Відношення еквівалентності $\mathfrak{K}$ на напівгрупі S називається *конгруенцією*, якщо для елементів a і b напівгрупи S з того, що виконується умова $(a,b) \in \mathfrak{K}$ випливає, що $(ca,cb),(ad,bd) \in \mathfrak{K}$, для всіх $c,d \in S$. Відношення $(a,b) \in \mathfrak{K}$ ми також будемо записувати $a\mathfrak{K}b$, і в цьому випадку будемо говорити, що *елементи* a *і* b *є* $\mathfrak{K}$*-еквівалентними*. На кожній напівгрупі S існують такі конгруенції: *універсальна* $\mathfrak{U}_S = S \times S$ та *одинична* (*діагональ*) $\Delta_S = \{(s,s) \colon s \in S\}$. Такі конгруенції називаються *тривіальними*. Кожен двобічний ідеал I напівгрупи S породжує на ній конгруенцію Ріса: $\mathfrak{K}_I = (I \times I) \cup \Delta_S$. Конгруенція $\mathfrak{K}$ на напівгрупі S називається *груповою*, якщо фактор-напівгрупа $S/\mathfrak{K}$ є групою.

Якщо S — напівгрупа, то на $E(S)$ визначено частковий порядок

$$e \leqslant f \quad \text{тоді і лише тоді, коли} \quad ef = fe = e.$$

Так означений частковий порядок на $E(S)$ називається *природним*.

Означимо відношення $\leqslant$ на інверсній напівгрупі S так:

$$s \leqslant t \qquad \text{тоді і лише тоді, коли} \qquad s = te,$$

для деякого ідемпотента $e \in S$. Так означений частковий порядок називається *природним частковим порядком* на інверсній напівгрупі S [33]. Очевидно, що звуження природного часткового порядку $\leqslant$ на інверсній напівгрупі S на її в'язку $E(S)$ є природним частковим порядком на $E(S)$.

Нагадаємо (див., наприклад [26, §1.12]), що *біциклічною напівгрупою* (або *біциклічним моноїдом*) $\mathscr{C}(p,q)$ називається напівгрупа з одиницею, породжена двоелементною множиною $\{p,q\}$ і визначена одним визначальним співвідношенням $pq = 1$. Біциклічна напівгрупа відіграє важливу роль у теорії напівгруп. Зокрема, класична теорема Олафа Андерсена [22] стверджує, що (0-)проста напівгрупа з ідемпотентом є цілком (0-)простою тоді і лише тоді, коли вона не містить ізоморфну копію біциклічної напівгрупи.

Через $\mathscr{I}_\lambda$ позначимо множину всіх часткових взаємнооднозначних перетворень кардинала λ разом з такою напівгруповою операцією

$$x(\alpha\beta) = (x\alpha)\beta \quad \text{якщо} \quad x \in \operatorname{dom}(\alpha\beta) = \{y \in \operatorname{dom}\alpha \colon y\alpha \in \operatorname{dom}\beta\}, \qquad \text{для } \alpha,\beta \in \mathscr{I}_\lambda.$$

Напівгрупа $\mathscr{I}_\lambda$ називається *симетричною інверсною напівгрупою* або *симетричним інверсним моноїдом* над кардиналом λ (див. [26]). Симетрична інверсна напівгрупа введена В. В. Вагнером у працях [3, 4] і вона відіграє важливу роль у теорії напівгруп.

Якщо A — підмножина евклідового простору $\mathbb{R}^n$, то через $\operatorname{int} A$ позначатимемо внутрішність множини A в просторі $\mathbb{R}^n$. Ми позначатимемо одиничну сферу та замкнену кулю радіуса $r > 0$ в $\mathbb{R}^n$ через $\mathbb{S}^{n-1}$ і $\mathbf{B}_r$, відповідно.

Для довільних двох точок $x, y \in \mathbb{R}^n$ через $[x,y]$ позначатимемо відрізок в $\mathbb{R}^n$, який з'єднує точки x, y, тобто $[x,y] = \{z \in \mathbb{R}^n \colon \overrightarrow{xz} = \alpha \cdot \overrightarrow{xy}, 0 \leqslant \alpha \leqslant 1\}$.

Компактна опукла підмножина в $\mathbb{R}^n$ з непорожньою внутрішністю називається *опуклим тілом*. Підмножина $L \subseteq \mathbb{R}^n$ називається *зіркою* в початку $\mathbf{0}$, якщо для довільної точки $x \in L$ відрізок $[\mathbf{0}, x]$ міститься в L. Якщо L є компактною підмножиною, яка є зіркою в початку $\mathbf{0}$, то її радіальна функція ρ_L визначається для всіх

$u \in \mathbb{S}^{n-1}$ так, що промінь відкладений у початку $\mathbf{0}$ паралельно до u перетинає L, за формулою

$$(u)\rho_L = \max\{c \geqslant 0 \colon cx \in L\}.$$

Зауважимо, що в [28], у якій введено всі вище означенні поняття, не припускається, що початок $\mathbf{0}$ належить зірці L. Надалі, ще крім того, ми будемо вважати, що $\mathbf{0} \in \operatorname{int} L$ для довільної зірки $L \subseteq \mathbb{R}^n$, що еквівалентно умові $\rho_L(u) \neq 0$ для всіх $u \in \mathbb{S}^{n-1}$, а також припускатимемо, що радіальна функція $\rho_L \colon \mathbb{S}^{n-1} \to L$ є неперервною.

Нехай L_1 і L_2 — зірки в початку $\mathbf{0}$. Тоді гомеоморфізм $\alpha \colon L_1 \to L_2$ називається *зірковим*, якщо $(\mathbf{0})\alpha = \mathbf{0}$ і $([\mathbf{0}, x])\alpha = [\mathbf{0}, (x)\alpha]$ для довільного відрізка $[\mathbf{0}, x] \subseteq L_1$. Надалі вважатимемо, що всі зірки $L \subseteq \mathbb{R}^n$ є в початку $\mathbf{0}$ і під *частковими зірковими гомеоморфізмами* простору $\mathbb{R}^n$ будемо розуміти гомеоморфізми між зірками в $\mathbb{R}^n$.

З означення зіркового гомеоморфізму випливає твердження 1.

Твердження 1. *Композиція двох часткових зіркових гомеоморфізмів простору $\mathbb{R}^n$ і обернене часткове відображення до часткового зіркового гомеоморфізму є частковими зірковими гомеоморфізмами простору $\mathbb{R}^n$.*

Твердження 2. *Довільні дві зірки в $\mathbb{R}^n$ є зірково гомеоморфними.*

Доведення. Доведемо, що довільна зірка L зірково гомеоморфна одиничній кулі $\mathbf{B}_1$ в $\mathbb{R}^n$. Означимо відображення $\alpha_L \colon L \to \mathbf{B}_1$ наступним чином. Нехай $\rho_L \colon \mathbb{S}^{n-1} \to L$ — радіальна функція зірки L. Для довільного $x \in \mathbf{B}_1$ покладемо $(x)r$ — точка на одиничній сфері $\mathbb{S}^{n-1}$ така, що $x \in [\mathbf{0}, (x)r]$. Тоді з неперервності радіальної функції $\rho_L \colon \mathbb{S}^{n-1} \to L$ випливає, що відображення $\beta_L \colon \mathbf{B}_1 \to L$, означене за формулою

$$(x)\beta_L = \begin{cases} \mathbf{0}, & \text{якщо } x = \mathbf{0}; \\ x \cdot ((x)r)\rho_L, & \text{в іншому випадку}, \end{cases}$$

є бієктивним і неперервним, і оскільки $\mathbf{B}_1$ — компактний підпростір в $\mathbb{R}^n$, то β_L є зірковим гомеоморфізмом. Покладемо $\alpha_L \colon L \to \mathbf{B}_1$ — обернене відображення до β_L. Очевидно, що відображення α_L є зірковим гомеоморфізмом. $\square$

З твердження 14.1.7 [36] і з міркувань викладених в [27, §1.4, с. 29–30] випливає твердження 3.

Твердження 3. *Перетин двох зірок є зіркою в $\mathbb{R}^n$.*

Через $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$ позначимо множину всіх часткових зіркових гомеоморфізмів простору $\mathbb{R}^n$ з операцією композицією відображень.

З тверджень 2 і 3 випливає твердження 4.

Твердження 4. $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$ *— інверсна піднапівгрупа симетричного інверсного моноїда $\mathscr{I}_{\mathfrak{c}}$.*

Дослідження автоморфізмів і груп автоморфізмів многовидів малої розмірності формують широку область сучасної математики, яка дуже швидко розвивається та розташована на стику топології, алгебри й теорії динамічних систем. Ця область охоплює вивчення груп гомеоморфізмів прямої та кола, теорію автоморфізмів поверхонь і теорію груп класів відображень.

Автоморфізмам і групам автоморфізмів многовидів розмірності 1 і 2 присвячено фундаментальні праці Клейна, Фрике, Пуанкаре, Гурвіца, Дена, Данжуа, Александера, Нільсена, Артіна, Керек'ярто, А. А. Маркова. Сучасні дослідження груп гомеоморфізмів прямої викладено в оглядах Бекларяна [1, 2] та її застосування в теорії динамічних систем у монографії [32].

Основні результати теорії напівгруп перетворень отримані в період 50-70-х років минулого століття, викладені в оглядах Меггіла [34] та Глускіна, Шайна, Шнепермана та Ярокера [29]. У цьому напрямі працювали такі відомі математики: Гауі, Гельфанд, Глускін, Грін, Енгелькінг, Кліффорд, Ляпін, Меггіл, Престон, Саббах, Серпінський, Сушкевич, Улам, Шайн, Шнеперман, Шутов, Ярокер. На думку Меггіла (див. [34]) Теорія напівгруп неперервних перетворень топологічних просторів бере свій початок з праць Глускіна [5, 6, 7, 8, 9, 10]. В основному ці праці Глускіна присвячені описанню структури напівгрупи $S(I)$ неперервних перетворень одиничного відрізка I, а також описанню піднапівгруп напівгрупи $S(X)$ неперервних перетворень топологічного простору X. Напівгрупу $S(I)$ неперервних перетворень одиничного відрізка також досліджував Шутов у працях [20, 21], де він описав максимальну власну конгруенцію на $S(I)$.

Напівгрупу $S(I)$ також досліджували в [12, 14, 15, 16, 17, 19, 24, 31, 35, 40, 41], зокрема в [5, 12] описано конгруенц-прості піднапівгрупи в $S(I)$. Шнеперман [18] та Уарндоф [42] довели, що одиничний відрізок визначається напівгрупою неперервних перетворень. Інші класи топологічних просторів, що визначаються своїми напівгрупами неперервних перетворень, описав Уарндоф у [42] і Росіцкий у [40, 41]. Зокрема такими є: локально зв'язні сепарабельні метричні континууми, локально евклідові гаусдорфові простори, нульвимірні метричні простори, CW-комплекси та ін. Також О'Рейлі в праці [38] довела, що кожен гаусдорфовий простір X визначається напівгрупою усіх компактних відношень на X.

Зауважимо, що група гомеоморфізмів дійсної прямої ізоморфна групі гомеоморфізмів одиничного відрізка (інтервалу). Таким чином виникає задача: *описати структуру напівгрупи часткових гомеоморфізмів топологічного простору* X, а в частковому випадку одиничного відрізка, чи дійсної прямої. Однією з останніх робіт з цієї тематики є праця Чучмана [25], в якій описано структуру напівгрупи замкнених зв'язних часткових гомеоморфізмів одиничного відрізка з однією нерухомою точкою. Також у [11] описана структура напівгрупи $\mathscr{PH}^{+}_{\mathsf{cf}}(\mathbb{R})$ усіх монотонних коскінченних часткових гомеоморфізмів звичайної дійсної прямої $\mathbb{R}$. Зокрема, в [11] доведено, що фактор-напівгрупа $\mathscr{PH}^{+}_{\mathsf{cf}}(\mathbb{R})/\mathfrak{C}_{\mathsf{mg}}$ за найменшою груповою конгруенцією $\mathfrak{C}_{\mathsf{mg}}$ ізоморфна групі $\mathscr{H}^{+}(\mathbb{R})$ усіх гомеоморфізмів, що зберігають орієнтацію простору $\mathbb{R}$, а також, що напівгрупа $\mathscr{PH}^{+}_{\mathsf{cf}}(\mathbb{R})$ ізоморфна напівпрямому добутку $\mathscr{H}^{+}(\mathbb{R}) \ltimes_{\mathfrak{h}} \mathscr{P}_{\infty}(\mathbb{R})$ вільної напівґратки з одиницею $(\mathscr{P}_{\infty}(\mathbb{R}), \cup)$ з групою $\mathscr{H}^{+}(\mathbb{R})$.

Нагадаємо [25], що часткове перетворення $\alpha\colon X \rightharpoonup X$ топологічного простору X називається *замкненим зв'язним частковим гомеоморфізмом*, якщо його звуження $\alpha\colon \operatorname{dom}\alpha \to \operatorname{ran}\alpha$ є гомеоморфізмом і $\operatorname{dom}\alpha$ та $\operatorname{ran}\alpha$ — замкнені зв'язні підмножини в X. Очевидно, що кожен замкнений зв'язний частковий гомеоморфізм одиничного відрізка, чи прямої, з однією нерухомою точкою можна розглядати як зірковий частковий гомеоморфізм цього простору. Тому природно виникає задача про можливість поширення результатів, отриманих у праці [25] на вищі виміри.

У цій праці досліджується структура напівгрупи $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$ зіркових часткових гомеоморфізмів скінченновимірного евклідового простору $\mathbb{R}^n$. Описана структура ідемпотентів напівгрупи $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$ і відношення Ґріна на $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$. Зокрема доведено, що $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$ – біпроста інверсна напівгрупа, а також, що кожна неодинична конгруенція на $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$ є груповою.

Надалі в статті через $\mathbf{St}_0(\mathbb{R}^n)$ позначатимемо множину усіх зірок в початку $\mathbf{0}$.

З означення напівгрупи $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$ і твердження 4 випливає твердження 5.

Твердження 5. (*i*) *Елемент α є ідемпотентом напівгрупи $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$ тоді і лише тоді, коли $\alpha\colon S \to S$ – тотожне відображення для деякої зірки $S \in \boldsymbol{St}_0(\mathbb{R}^n)$.*

(*ii*) *В'язка $E(\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n})$ ізоморфна напівґратці $(\boldsymbol{St}_0(\mathbb{R}^n), \cap)$.*

(*iii*) *$\varepsilon \leqslant \iota$ в $E(\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n})$ тоді і лише тоді, коли $\operatorname{dom}\varepsilon \subseteq \operatorname{dom}\iota$.*

(*iv*) *$\alpha \leqslant \beta$ в $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$ тоді і лише тоді, коли $\beta|_{\operatorname{dom}\alpha} = \alpha$.*

Зауважимо, що пункти (*i*) і (*ii*) твердження 5 випливають з того факту, що в симетричному інверсному моноїді ідемпотентами є лише тотожні часткові перетворення (див. [33, твердження 1.1.2]), а пункти (*iii*) і (*iv*) випливають з означення природного часткового порядку на $E(\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n})$ і $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$, відповідно, та з леми 3 [33].

Якщо S — напівгрупа, то відношення Ґріна $\mathscr{R}$, $\mathscr{L}$, $\mathscr{J}$, $\mathscr{D}$ і $\mathscr{H}$ на S визначаються так (див. [30] або [26, §2.1]):

$$\begin{aligned}
&a\mathscr{R}b \text{ тоді і лише тоді, коли } aS^1 = bS^1;\\
&a\mathscr{L}b \text{ тоді і лише тоді, коли } S^1a = S^1b;\\
&a\mathscr{J}b \text{ тоді і лише тоді, коли } S^1aS^1 = S^1bS^1;\\
&\mathscr{D} = \mathscr{L}\circ\mathscr{R} = \mathscr{R}\circ\mathscr{L};\\
&\mathscr{H} = \mathscr{L}\cap\mathscr{R}.
\end{aligned}$$

Напівгрупа S називається *простою*, якщо S не має власного двобічного ідеалу, тобто S має єдиний $\mathscr{J}$-клас, і *біпростою*, якщо S має єдиний $\mathscr{D}$-клас.

Позаяк за твердженням 4, $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$ — інверсна піднапівгрупа симетричного інверсного моноїда $\mathscr{I}_{\mathfrak{c}}$, то з визначень відношень Ґріна на $\mathscr{I}_{\mathfrak{c}}$ і твердження 3.2.11 [33] випливає твердження 6.

Твердження 6. *Нехай α, β – елементи напівгрупи $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$. Тоді:*

(*i*) *$\alpha\mathscr{R}\beta$ в $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$ тоді і лише тоді, коли $\operatorname{ran}\alpha = \operatorname{ran}\beta$;*

(*ii*) *$\alpha\mathscr{L}\beta$ в $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$ тоді і лише тоді, коли $\operatorname{dom}\alpha = \operatorname{dom}\beta$;*

(*iii*) *$\alpha\mathscr{H}\beta$ в $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$ тоді і лише тоді, коли $\operatorname{ran}\alpha = \operatorname{ran}\beta$ і $\operatorname{dom}\alpha = \operatorname{dom}\beta$.*

Твердження 7. $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$ *– біпроста напівгрупа.*

Доведення. Нехай ε і ι – довільні ідемпотенти напівгрупи $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$. Тоді за твердженням 5(*i*) існують зірки $E, I \in \mathbf{St}_0(\mathbb{R}^n)$ такі, що $\varepsilon\colon \operatorname{dom}\varepsilon = E \to \operatorname{ran}\varepsilon = E$ і $\iota\colon \operatorname{dom}\iota = I \to \operatorname{ran}\iota = I$ – тотожні відображення. За твердженням 2 існує зірковий гомеоморфізм $\alpha\colon E \to I$. Очевидно, що $\alpha\alpha^{-1} = \varepsilon$ і $\alpha^{-1}\alpha = \iota$. Позаяк напівгрупа $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$ є інверсною, то з леми Манна (див. [37, лема 1.1]) випливає, що $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$ є біпростою напівгрупою. □

Оскільки кожен $\mathscr{D}$-клас елемента a напівгрупи S міститься в його $\mathscr{J}$-класі (див. [26, §2.1]), то з твердження 7 випливає наслідок 1.

Наслідок 1. $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$ *– проста напівгрупа.*

З твердження 7 і теореми 2.20 [26] випливає наслідок 2.

Наслідок 2. *Довільні дві максимальні підгрупи в* $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$ *є ізоморфними. Більше того кожна максимальна підгрупа в* $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$ *ізоморфна групі всіх зіркових гомеоморфізмів одиничної кулі* $\mathbf{B}_1$ *в* $\mathbb{R}^n$.

Лема 1. *Нехай* $\mathfrak{C}$ *— конгруенція на напівгрупі* $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$, r_1, r_2 *— довільні різні дійсні додатні числа та* $\varepsilon_{r_1}\colon \mathbf{B}_{r_1} \to \mathbf{B}_{r_1}$ *і* $\varepsilon_{r_2}\colon \mathbf{B}_{r_2} \to \mathbf{B}_{r_2}$ *— тотожні відображення. Якщо* $\varepsilon_{r_1}\mathfrak{C}\varepsilon_{r_2}$, *то всі ідемпотенти напівгрупи* $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$ *є* $\mathfrak{C}$*-еквівалентними.*

Доведення. Спочатку доведемо, що для довільного дійсного додатного числа r ідемпотент ε_r, де $\varepsilon_r\colon \mathbf{B}_r \to \mathbf{B}_r$ — тотожне відображення, є $\mathfrak{C}$-еквівалентним ідемпотентам ε_{r_1} і ε_{r_2}.

Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що $r_1 < r_2$. Розглянемо можливі випадки:

$$a)\ r < r_1; \qquad b)\ r_1 < r < r_2; \qquad \text{і} \qquad c)\ r_2 < r.$$

Припустимо, що виконується випадок $b)$ $r_1 < r < r_2$. Тоді з твердження 5 випливає, що $\varepsilon_{r_1} = \varepsilon_{r_1}\varepsilon_r\mathfrak{C}\varepsilon_{r_2}\varepsilon_r = \varepsilon_r$, а отже, $\varepsilon_{r_1}\mathfrak{C}\varepsilon_r$ і $\varepsilon_r\mathfrak{C}\varepsilon_{r_2}$.

Припустимо, що виконується випадок $a)$ $r < r_1$. Означимо часткове відображення $\alpha\colon \mathbb{R}^n \rightharpoonup \mathbb{R}^n$ наступним чином:

$$\operatorname{dom}\alpha = \mathbf{B}_{r_2}, \qquad \operatorname{ran}\alpha = \mathbf{B}_{r_1} \qquad \text{і} \qquad (x)\alpha = x\cdot\frac{r_1}{r_2}.$$

Тоді часткове відображення α та обернене до нього α^{-1} є елементами напівгрупи $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$ й існує натуральне число n_r таке, що $\left(\dfrac{r_1}{r_2}\right)^{n_r} < r$.

Нехай $S = \langle\alpha,\alpha^{-1}\rangle$ — піднапівгрупа в $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$, породжена елементами α і α^{-1}. Тоді легко бачити, що

$$\varepsilon_{r_2}\alpha = \alpha\varepsilon_{r_2} = \alpha, \qquad \varepsilon_{r_2}\alpha^{-1} = \alpha^{-1}\varepsilon_{r_2} = \alpha^{-1}, \qquad \alpha\alpha^{-1} = \varepsilon_{r_2} \quad \text{і} \quad \alpha^{-1}\alpha = \varepsilon_{r_1} \neq \varepsilon_{r_2},$$

а отже, за лемою 1.31 з [26] напівгрупа $S = \langle\alpha,\alpha^{-1}\rangle$ ізоморфна біциклічному моноїдові $\mathscr{C}(p,q)$, причому всі елементи напівгрупи S єдиним чином зображаються у вигляді $\left(\alpha^{-1}\right)^i\alpha^j$, де i та j — невід'ємні цілі числа, а ізоморфізм $\mathfrak{I}\colon S \to \mathscr{C}(p,q)$ визначається за формулою $\left(\left(\alpha^{-1}\right)^i\alpha^j\right)\mathfrak{I} = q^ip^j$. За наслідком 1.32 з [26] кожна неодинична конгруенція на біциклічному моноїді $\mathscr{C}(p,q)$ є груповою, а отже з наших припущень випливає, що усі ідемпотенти напівгрупи S є $\mathfrak{C}$-еквівалентними. Тоді для $r_0 = \left(\dfrac{r_1}{r_2}\right)^{n_r}$ маємо, що ідемпотент ε_{r_0}, де $\varepsilon_{r_0}\colon \mathbf{B}_{r_0} \to \mathbf{B}_{r_0}$ — тотожне відображення, є $\mathfrak{C}$-еквівалентним ідемпотентам ε_{r_1} і ε_{r_2}. Але за побудовою, $\varepsilon_{r_0} \leqslant \varepsilon_r \leqslant \varepsilon_{r_1}$ в $E(\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n})$, а отже, з випадку $b)$ випливає, що $\varepsilon_r\mathfrak{C}\varepsilon_{r_2}$.

Припустимо, що виконується випадок $c)$ $r_2 < r$. Тоді існує натуральне число n_r таке, що $r_2\cdot\left(\dfrac{r_2}{r_1}\right)^{n_r} > r$. Означимо часткове відображення $\beta\colon \mathbb{R}^n \rightharpoonup \mathbb{R}^n$ наступним чином:

$$\operatorname{dom}\beta = \mathbf{B}_{r_2\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{n_r}}, \qquad \operatorname{ran}\beta = \mathbf{B}_{r_2\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{n_r-1}} \qquad \text{і} \qquad (x)\beta = x\cdot\frac{r_1}{r_2}.$$

Тоді часткове відображення β та обернене до нього β^{-1} є елементами напівгрупи $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$. Нехай $\varepsilon_1\colon \mathbf{B}_{r_2\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{n_r}} \to \mathbf{B}_{r_2\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{n_r}}$ і $\varepsilon_2\colon \mathbf{B}_{r_2\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{n_r-1}} \to \mathbf{B}_{r_2\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{n_r-1}}$ — тотожні відображення. Тоді очевидно, що ε_1 і ε_2 є різними ідемпотентами напівгрупи $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$, причому $\varepsilon_2 \leqslant \varepsilon_1$. Також легко бачити, що виконуються такі рівності

$$\varepsilon_1\beta = \beta\varepsilon_1 = \beta, \qquad \varepsilon_1\beta^{-1} = \beta^{-1}\varepsilon_1 = \beta^{-1}, \qquad \beta\beta^{-1} = \varepsilon_1 \qquad \text{і} \qquad \beta^{-1}\beta = \varepsilon_2 \neq \varepsilon_1,$$

а отже, за лемою 1.31 з [26] піднапівгрупа $T = \left\langle \beta, \beta^{-1} \right\rangle$ в $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$, породжена елементами β і β^{-1}, ізоморфна біциклічному моноїдові $\mathscr{C}(p,q)$, причому всі елементи напівгрупи T єдиним чином зображаються у вигляді $\left(\beta^{-1}\right)^i\beta^j$, де i та j — невід'ємні цілі числа, а ізоморфізм $\mathfrak{I}\colon T \to \mathscr{C}(p,q)$ визначається за формулою $\left(\left(\beta^{-1}\right)^i\beta^j\right)\mathfrak{I} = q^ip^j$. Очевидно, що ідемпотенти $\left(\beta^{-1}\right)^{n_r}\beta^{n_r}$ і $\left(\beta^{-1}\right)^{n_r+1}\beta^{n_r+1}$ напівгрупи $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$, як часткові відображення, є тотожними відображеннями куль $\mathbf{B}_{r_2}$ і $\mathbf{B}_{r_1}$, відповідно, а отже, $\left(\beta^{-1}\right)^{n_r}\beta^{n_r} = \varepsilon_{r_2}$ і $\left(\beta^{-1}\right)^{n_r+1}\beta^{n_r+1} = \varepsilon_{r_1}$. Отож, два різні ідемпотенти напівгрупи T є $\mathfrak{C}$-еквівалентними. За наслідком 1.32 з [26] кожна нетотожня конгруенція на біциклічному моноїді $\mathscr{C}(p,q)$ є груповою, а отже, з наших припущень випливає, що усі ідемпотенти напівгрупи S є $\mathfrak{C}$-еквівалентними. Але за побудовою, $\varepsilon_{r_2} \leqslant \varepsilon_r \leqslant \varepsilon_1$ в $E(\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n})$, а отже, з випадку b) випливає, що $\varepsilon_r\mathfrak{C}\varepsilon_{r_2}$. □

Лема 2. *Нехай $\mathfrak{C}$ — конгруенція на напівгрупі $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$ така, що два різні ідемпотенти напівгрупи $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$ є $\mathfrak{C}$-еквівалентними. Тоді всі ідемпотенти напівгрупи $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$ є $\mathfrak{C}$-еквівалентними.*

Доведення. Припустимо, що ε і ι — різні $\mathfrak{C}$-еквівалентні ідемпотенти напівгрупи $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$. Тоді з $\varepsilon\mathfrak{C}\iota$ випливає, що $\varepsilon\iota\mathfrak{C}\iota\iota = \iota$, а отже, не зменшуючи загальності, можемо вважати, що $\varepsilon \leqslant \iota$ в $E(\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n})$, а тоді за твердженням $5(iii)$, $\operatorname{dom}\varepsilon \subseteq \operatorname{dom}\iota$.

Нехай $\alpha_\iota\colon \operatorname{dom}\iota \to \mathbf{B}_1$ — частковий зірковий гомеоморфізм зірки $\operatorname{dom}\iota$ на одиничну кулю $\mathbf{B}_1$ в початку $\mathbf{0}$. За твердженням 1 звуження $\alpha_\iota|_{\operatorname{dom}\varepsilon}\colon \operatorname{dom}\varepsilon \to (\operatorname{dom}\varepsilon)\alpha_\iota$ є частковим зірковим гомеоморфізмом зірки $\operatorname{dom}\varepsilon$ на зірку $(\operatorname{dom}\varepsilon)\alpha_\iota$. Тоді $\alpha_\iota^{-1}\alpha_\iota\colon \mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_1$ — тотожне відображення одиничної кулі $\mathbf{B}_1$ в початку $\mathbf{0}$. Позаяк $\alpha_\iota^{-1}\alpha_\iota = \alpha_\iota^{-1}\iota\alpha_\iota\mathfrak{C}\alpha_\iota^{-1}\varepsilon\alpha_\iota$ і $\alpha_\iota^{-1}\alpha_\iota \neq \alpha_\iota^{-1}\varepsilon\alpha_\iota$, то ідемпотент ε_1, $\varepsilon_1\colon \mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_1$ — тотожне відображення одиничної кулі $\mathbf{B}_1$ в початку $\mathbf{0}$, є $\mathfrak{C}$-еквівалентним деякому ідемпотентові ε_s такому, що $\operatorname{dom}\varepsilon_s$ — власна підмножина в $\mathbf{B}_1$. Тоді існує елемент $u_0 \in \mathbb{S}^{n-1}$ такий, що $(u_0)\rho_{\operatorname{dom}\varepsilon_s} < 1$. Позаяк радіальна функція $\rho_{\operatorname{dom}\varepsilon_s}\colon \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}$ є неперервною, то існує відкритий окіл $U(u_0)$ точки u_0 на сфері $\mathbb{S}^{n-1}$ такий, що $(u)\rho_{\operatorname{dom}\varepsilon_s} < 1$ для всіх $u \in U(u_0)$.

Для довільної точки $x \in \mathbb{S}^{n-1}\setminus U(u_0)$ через $\alpha_x\colon \mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_1$ позначимо ортогональне перетворення одиничної кулі $\mathbf{B}_1$, яке відображає точку $u_0 \in \mathbb{S}^{n-1}$ в $x \in \mathbb{S}^{n-1}$. Очевидно, що $\alpha_x \in \mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$, оскільки відображення $\alpha_x\colon \mathbf{B}_1 \to \mathbf{B}_1$ є гомеоморфізмом, як елемент ортогональної групи матриць $O(n,\mathbb{R})$ (див. [13]). Позаяк підпростір $\mathbb{S}^{n-1} \setminus U(u_0)$ в $\mathbb{S}^{n-1}$ є компактним, то відкрите покриття $\left\{(U(u_0))\alpha_x \colon x \in \mathbb{S}^{n-1} \setminus U(u_0)\right\}$ простору $\mathbb{S}^{n-1} \setminus U(u_0)$ містить скінченне підпокриття $\{(U(u_0))\alpha_{x_1}, \ldots, (U(u_0))\alpha_{x_k}\}$.

Позаяк $\varepsilon_1\mathfrak{C}\varepsilon_s$ і $\alpha_{x_i}^{-1}\varepsilon_1\alpha_{x_i} = \varepsilon_1$ для всіх $i = 1,\ldots,k$, то $\varepsilon_1\mathfrak{C}\alpha_{x_i}^{-1}\varepsilon_s\alpha_{x_i}$ для кожного $i = 1,\ldots,k$, а отже,

$$\varepsilon_1\mathfrak{C}\alpha_{x_1}^{-1}\varepsilon_s\alpha_{x_1}\cdots\alpha_{x_k}^{-1}\varepsilon_s\alpha_{x_k}.$$

Очевидно, що елемент $\alpha_{x_i}^{-1}\varepsilon_s\alpha_{x_i}$ є ідемпотентом напівгрупи $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$ для кожного $i = 1,\ldots,k$, а отже, $\phi = \varepsilon_s\alpha_{x_1}^{-1}\varepsilon_s\alpha_{x_1}\cdots\alpha_{x_k}^{-1}\varepsilon_s\alpha_{x_k}$ є також ідемпотентом в $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$, оскільки $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$ — інверсна напівгрупа, а ідемпотенти в інверсній напівгрупі комутують (див. [26, теорема 1.17]). За побудовою, $(x)\rho_{\operatorname{dom}\phi} < 1$ для довільного $x \in \mathbb{S}^{n-1}$, а оскільки радіальна функція $\rho_{\operatorname{dom}\phi}\colon \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}$ є неперервною, то з компактності одиничної сфери $\mathbb{S}^{n-1}$ випливає, що відображення $\rho_{\operatorname{dom}\phi}$ на $\mathbb{S}^{n-1}$ набуває свого найбільшого значення. Нехай $R_\phi = \max\left\{(x)\rho_{\operatorname{dom}\phi}\colon x \in \mathbb{S}^{n-1}\right\}$ і $\varepsilon_{R_\phi}\colon \mathbf{B}_\phi \to \mathbf{B}_\phi$ — тотожне відображення кулі радіуса R_ϕ в початку $\mathbf{0}$. Легко бачити, що $\varepsilon_{R_\phi} \in E(\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n})$, $\varepsilon_{R_\phi}\phi = \phi$ і $\varepsilon_{R_\phi}\varepsilon_1 = \varepsilon_{R_\phi}$. Тоді з умови $\varepsilon_1\mathfrak{C}\phi$ випливає, що $\varepsilon_{R_\phi} = \varepsilon_{R_\phi}\varepsilon_1\mathfrak{C}\varepsilon_{R_\phi}\phi = \phi$, а отже $\varepsilon_1\mathfrak{C}\varepsilon_{R_\phi}$. Далі скористаємося лемою 1. □

Теорема 1. *Кожна неодинична конгруенція на напівгрупі* $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$ *є груповою.*

Доведення. Нехай $\mathfrak{C}$ — неодинична конгруенція на напівгрупі $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$. Тоді існують два різні $\mathfrak{C}$-еквівалентні елементи α і β напівгрупи $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$.

Розглянемо можливі випадки:

(1) елементи α і β не належать одному $\mathscr{H}$-класу;

(2) $\alpha\mathscr{H}\beta$.

Припустимо, що виконується випадок (1). За твердженням 2.3.4 з [33], $\alpha\alpha^{-1}\mathfrak{C}\beta\beta^{-1}$ і $\alpha^{-1}\alpha\mathfrak{C}\beta^{-1}\beta$. З твердження 6 випливає, що $\operatorname{ran}\alpha \neq \operatorname{ran}\beta$ або $\operatorname{dom}\alpha \neq \operatorname{dom}\beta$, а отже, за твердженням 5(i) існують два різні $\mathfrak{C}$-еквівалентні ідемпотенти напівгрупи $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$. Далі скористаємося лемою 2 і лемою I.7.10 з [39].

Припустимо, що $\alpha\mathscr{H}\beta$. За теоремою 2.20 з [26] і наслідком 2, не зменшуючи загальності, можемо вважати, що α і β — зіркові гомеоморфізми одиничної кулі $\mathbf{B}_1$ в початку $\mathbf{0}$. Позаяк $\alpha\alpha^{-1}\mathfrak{C}\alpha\beta^{-1}$, то з вище сказаного випливає, що існує зірковий гомеоморфізм $\gamma \in \mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$ одиничної кулі $\mathbf{B}_1$, який є $\mathfrak{C}$-еквівалентним її тотожному відображенню ε_1 такий, що $\gamma \neq \varepsilon_1$. Тоді $(x)\gamma \neq x$ для деякого $x \in \mathbf{B}_1$.

Тоді виконується хоча б одна з умов:

(a) існує елемент $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ такий, що $([\mathbf{0},x])\gamma = [\mathbf{0},x]$ та існує $y \in [\mathbf{0},x]$ такий, що $(y)\gamma \neq y$;

(b) існує елемент $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ такий, що $([\mathbf{0},x])\gamma \neq [\mathbf{0},x]$.

Припустимо, що виконується умова (a). Припустимо, що $[\mathbf{0},y] \subsetneqq [\mathbf{0},(y)\gamma]$. У випадку $[\mathbf{0},y] \supsetneqq [\mathbf{0},(y)\gamma]$ міркування аналогічні.

Нехай $\mathbf{B}_y$ — максимальна куля в початку $\mathbf{0}$, що містить точку y і $\varepsilon_y\colon \mathbf{B}_y \to \mathbf{B}_y$ — тотожне відображення кулі $\mathbf{B}_y$. Тоді $(y)\gamma \notin B_y$. Позаяк $\varepsilon_1\mathfrak{C}\gamma$, то $\varepsilon_y\varepsilon_1\mathfrak{C}\varepsilon_y\gamma$. Використавши твердження 2.3.4 з [33], отримуємо, що

$$\varepsilon_y = \varepsilon_y\varepsilon_1 = \varepsilon_1^{-1}\varepsilon_y^{-1}\varepsilon_y\varepsilon_1\mathfrak{C}\gamma^{-1}\varepsilon_y^{-1}\varepsilon_y\gamma = \gamma^{-1}\varepsilon_y\gamma.$$

Очевидно, що $\gamma^{-1}\varepsilon_y\gamma$ — ідемпотент напівгрупи $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$, причому $(y)\gamma \in \operatorname{dom}(\gamma^{-1}\varepsilon_y\gamma)$, але $(y)\gamma \notin \operatorname{dom}\varepsilon_y$, а отже, за твердженням 5(i) існують два різні $\mathfrak{C}$-еквівалентні ідемпотенти напівгрупи $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$. Далі скористаємося лемою 2 і лемою I.7.10 з [39].

Припустимо, що виконується умова (b). Позаяк γ — частковий зірковий гомеоморфізм, то $(x)\gamma \neq x$. Існує відкрита δ-куля $U_\delta((x)\gamma)$ точки $(x)\gamma$ в просторі $\mathbb{R}^n$, що не містить точку x. З метризовності простору $\mathbb{S}^{n-1}$ випливає, що він є цілком регулярним, а отже, існує неперервне відображення $f\colon \mathbb{S}^{n-1} \to [0,1]$ таке, що $((x)\gamma)f = 1$ і $(z)f = 0$ для всіх $z \in \mathbb{S}^{n-1} \setminus U_\delta((x)\gamma)$.

Визначимо зірку L_γ в початку $\mathbf{0}$ наступним чином. Радіальною функцією зірки L_γ є відображення $\rho_{L_\gamma}\colon \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$, яке визначається за формулою

$$(z)\rho_{L_\gamma} = z \cdot (1 + (z)f).$$

Очевидно, що так означене відображення $\rho_{L_\gamma}\colon \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ є неперервним, а отже, відображення $\beta_{L_\gamma}\colon \mathbf{B}_1 \to L_\gamma$, означене за формулою

$$(z)\beta_{L_\gamma} = \begin{cases} \mathbf{0}, & \text{якщо } z = \mathbf{0};\\ z \cdot ((z)r)\rho_{L_\gamma}, & \text{в іншому випадку}, \end{cases}$$

де $(z)r$ — точка на одиничній сфері $\mathbb{S}^{n-1}$ така, що $z \in [\mathbf{0}, (z)r]$, є бієктивним і неперервним, а оскільки $\mathbf{B}_1$ — компактний підпростір в $\mathbb{R}^n$, то β_{L_γ} є зірковим гомеоморфізмом.

Позаяк $\varepsilon_1 \mathfrak{C} \gamma$, то $\varepsilon_1 \beta_{L_\gamma} \mathfrak{C} \gamma \beta_{L_\gamma}$. За твердженням 2.3.4 з [33] маємо, що

$$(\varepsilon_1\beta_{L_\gamma})^{-1}(\varepsilon_1\beta_{L_\gamma})\mathfrak{C}(\gamma\beta_{L_\gamma})^{-1}(\gamma\beta_{L_\gamma}),$$

а отже,

$$\begin{aligned}
\beta_{L_\gamma}^{-1}\beta_{L_\gamma} &= \beta_{L_\gamma}^{-1}\varepsilon_1\beta_{L_\gamma} =\\
&= \beta_{L_\gamma}^{-1}\varepsilon_1^{-1}\varepsilon_1\beta_{L_\gamma} =\\
&= (\varepsilon_1\beta_{L_\gamma})^{-1}(\varepsilon_1\beta_{L_\gamma})\mathfrak{C}(\gamma\beta_{L_\gamma})^{-1}(\gamma\beta_{L_\gamma}) =\\
&= \beta_{L_\gamma}^{-1}\gamma^{-1}\gamma\beta_{L_\gamma}.
\end{aligned}$$

Очевидно, що елементи $\beta_{L_\gamma}^{-1}\beta_{L_\gamma}$ і $\beta_{L_\gamma}^{-1}\gamma^{-1}\gamma\beta_{L_\gamma}$ є ідемпотентами напівгрупи $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$. Зауважимо, що $(x)\rho_{L_\gamma} = x \cdot (1 + (x)f) = x \cdot (1 + 0) = x$ і

$$((x)\gamma)\rho_{L_\gamma} = (x)\gamma \cdot (1 + ((x)\gamma)f) = (x)\gamma \cdot (1 + 1) = (x)\gamma \cdot 2,$$

а отже, маємо, що $\beta_{L_\gamma}^{-1}\beta_{L_\gamma} \neq \beta_{L_\gamma}^{-1}\gamma^{-1}\gamma\beta_{L_\gamma}$. За твердженням 5($i$) існують два різні $\mathfrak{C}$-еквівалентні ідемпотенти напівгрупи $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$. Далі скористаємося лемою 2 і лемою I.7.10 з [39]. $\square$

Автори висловлюють подяку рецензентові за суттєві зауваження та поради.

Список використаної літератури

1. Л. А. Бекларян, *Группы гомеоморфизмов прямой и окружности. Топологические характеристики и метрические инварианты*, УМН **59** (2004), no. 4(358), 3–68. DOI: 10.4213/rm758; **English version**: L. A. Beklaryan, *Groups of homeomorphisms of the line and the circle. Topological characteristics and metric invariants*, Russian Math. Surveys **59** (2004), no. 4, 599–660. DOI: 10.1070/RM2004v059n04ABEH000758
2. Л. А. Бекларян, *Группы гомеоморфизмов прямой и окружности. Метрические инварианты и вопросы классификации*, УМН, **70** (2015), no. 2(422), 3–54. DOI: 10.4213/rm9654; **English version**: L. A. Beklaryan, *Groups of line and circle*

homeomorphisms. Metric invariants and questions of classification, Russian Math. Surveys **70** (2015), no. 2, 203–248. DOI: 10.1070/RM2015v070n02ABEH004946
3. В. В. Вагнер, *К теорнн частичных преобразований*, ДАН СССР **84** (1952), 653–656.
4. В. В. Вагнер, *Обобшенные группы*, ДАН СССР **84** (1952), 1119–1122.
5. Л. М. Глускин, *Полугруппа гомеоморфных отображений отрезка*, Матем. сб. **49** (1959), no. 1(91), 13–28.
6. Л. М. Глускин, *Полугруппы топологических отображений*, ДАН СССР **125** (1959), 699–702.
7. Л. М. Глускин, *Транзитивные полугруппы преобразований*, ДАН СССР **129** (1959), 16–18.
8. Л. М. Глускин, *Идеалы полугрупп преобразований*, Матем. сб. **47** (1959), no. 1(89), 111–130.
9. Л. М. Глускін, *Про одну півгрупу непреривиих функцій*, Доповіді АН УРСР **5** (1960), 582–585.
10. Л. М. Глускин, *Полугруппы топологических преобразований*, Изв. вузов. Матем. (1963), no. 1, 54–65.
11. О. Гутік, К. Мельник, *Напівгрупа монотонних ко-скінченних часткових гомеоморфізмів дійсної прямої*, Мат. вісник Наук. тов. ім. Т. Шевченка **12** (2015), 24–40.
12. Х. Н. Инасаридзе, *О простых полугруппах*, Матем. сб. **57** (1962), no. 2(99), 225–232.
13. А. И. Кострикин, Ю. И. Манин, *Линейная алгебра и геометрия.* Учебное пособие для вузов. 2-е изд., перераб. Наука, Москва, 1986.
14. Л. Б. Шнеперман, *Полугруппы непрерывных преобразований*, ДАН СССР **144** (1962), no. 3, 509–511.
15. Л. Б. Шнеперман, *Полугруппы непрерывных преобразований и гомеоморфизмов простой дуги*, ДАН СССР **146** (1962), 1301–1304.
16. Л. Б. Шнеперман, *Полугруппы непрерывных преобразований метрических пространств*, Матем. сб. **61** (1963), no. 3(103), 306–318.
17. Л. Б. Шнеперман, *Полугруппы непрерывных преобразований замкнутых множеств числовой прямой*, Изв. вузов. Матем. (1965), no. 6, 166–175.
18. Л. Б. Шнеперман, *Полугруппы непрерывных преобразований топологических пространств*, Сиб. матем. журн. **4** (1965), no. 1, 221–229.
19. Л. Б. Шнеперман, *Полугруппа гомеоморфизмов простой дуги*, Изв. вузов. Матем. (1966), no. 2, 127–136.
20. Э. Г. Шутов, *О гомоморфизмах некоторых полугрупп непрерывнвх функций*, Сиб. матем. журн. **4** (1963), no. 3, 695–701.
21. Э. Г. Шутов, *О гомоморфизмах некоторых полугрупп непрерывных монотонных функций*, Сиб. матем. журн. **4**:4 (1963), 944–950.
22. O. Andersen, *Ein Bericht uber die Struktur abstrakter Halbgruppen*, PhD Thesis. Hamburg, 1952.
23. R. D. Anderson, *The algebraic simplicity of certain groups of homeomorphisms*, Amer. J. Math. **80** (1958), no. 4, 955—963. DOI: 10.2307/2372842
24. F. A. Cezus, *Green's relations in semigroups of functions*, Ph.D. Thesis, Australian National University, Canberra, Australia, 1972.
25. I. Chuchman, *On a semigroup of closed connected partial homeomorphisms of the unit interval with a fixed point*, Algebra Discr. Math. **12** (2011), no. 2, 38–52.
26. A. H. Clifford and G. B. Preston, *The Algebraic theory of semigroups*, Vols. I and II, Amer. Math. Soc. Surveys **7**, Providence, R.I., 1961 and 1967.
27. R. Engelking, *General topology*, 2nd ed., Heldermann, Berlin, 1989.

28. R. J. Gardner and A. Volčič, *Tomography of convex and star bodies*, Adv. Math. **108** (1994), no. 2, 367–399. DOI: 10.1006/aima.1994.1075
29. L. M. Gluskin, B. M. Schein, L. B. Šneperman, and I. S. Yaroker, *Addendum to a survey of semigroups of continuous self-maps*, Semigroup Forum **14** (1977), no. 1, 95–125. DOI: 10.1007/BF02194658
30. J. A. Green, *On the structure of semigroups*, Ann. Math. Ser. 2 **54** (1951), no. 1, 163–172. DOI: 10.2307/1969317
31. V. Jarník et V. Knichal, *Sur l'approximation des fonctions continues par les superpositlons de deux fonctlons*, Fund. Math. **24** (1935), no. 1, 206–208. DOI: 10.4064/fm-24-1-206-208
32. A. Katok and B. Hasselblatt, *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 54, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
33. M. V. Lawson, *Inverse semigroups. The theory of partial symmetries*, World Scientific, Singapore, 1998.
34. K. D. Magill, jr., *A survey of semigroups of continuous selfmaps*, Semigroup Forum **11** (1975/1976), no. 1, 189–282. DOI: 10.1007/BF02195270
35. J. V. Mioduszewski, *On a quasi-ordering in the class of continuous mappings of a closed interval into itself*, Colloq. Math. **9** (1962), no. 2, 233–240. DOI: 10.4064/cm-9-2-233-240
36. M. Moszyńska, *Selected topics in convex geometry*, Birkhäuser, Basel, 2005.
37. W. D. Munn, *Uniform semilattices and bisimple inverse semigroups*, Quart. J. Math. **17** (1966), no. 1, 151–159. DOI: 10.1093/qmath/17.1.151
38. S. B. O'Reilly, *The characteristic semigroup of topological space*, General Topology Appl. **5** (1975), no. 2, 95–106. DOI: 10.1016/0016-660X(75)90015-X
39. M. Petrich, *Inverse semigroups*, John Wiley & Sons, New York, 1984.
40. J. V. Rosický, *Remarks on topologies uniquely determined by their continuous self maps*, Czech. Math. J. **24(99)** (1974), no. 3, 373–377.
41. J. V. Rosický, *The topology of the unit interval is not uniquely determined by its continuous self maps among set systems*, Colloq. Math. **31** (1974), no. 2, 179–188. DOI: 10.4064/cm-31-2-179-188
42. J. C. Warndof, *Topologies uniquely determined by their continuous selfmaps*, Fund. Math. **66** (1970), no. 1, 25–43. DOI: 10.4064/fm-66-1-25-43

Стаття: надійшла до редколегії 15.11.2018
доопрацьована 19.12.2018
прийнята до друку 18.02.2019

THE SEMIGROUP $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$ OF STAR PARTIAL HOMEOMORPHISMS OF A FINITE DIMENSIONAL EUCLIDEAN SPACE

Oleg GUTIK, Kateryna MELNYK

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, 79000, Lviv, Ukraine
e-mails: oleg.gutik@lnu.edu.ua, ovgutik@yahoo.com,
chepil.kate@gmail.com

In the paper the notion of a star partial homeomorphism of a finite dimensional Euclidean space $\mathbb{R}^n$ is introduced. We describe the structure of the semigroup $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$ of star partial homeomorphisms of the space $\mathbb{R}^n$. The structure of the band of $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$ and Green's relations on $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$ are described. We show that $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$ is a bisimple inverse semigroup and every non-unit congruence on $\mathbf{PStH}_{\mathbb{R}^n}$ is a group congruence.

Key words: transformation semigroup, inverse semigroup, partial homeomorphism, star, Green's relations, congruence.