ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2020. Випуск 89. С. 89–105
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2020. Issue 89. P. 89–105
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
doi: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2020.89.089-105

УДК 517.9

ОПТИМАЛЬНІ ІНВЕСТИЦІЇ ТА СПОЖИВАННЯ В БІНОМІАЛЬНІЙ БЕЗАРБІТРАЖНІЙ ЦІНОВІЙ МОДЕЛІ

Сергій ПІДКУЙКО[1], **Микола БАБ'ЯК**[2]

[1]*Львівський національний університет імені Івана Франка,*
вул. Університетська, 1, 79000, м. Львів, Україна
[2]*Department of Accounting and Finance*
Lancaster University Management School
Bailrigg, LA1 4YX, UK
e-mails: pidkuyko@gmail.com, mykola.babyak@gmail.com

Досліджується проблема знаходження оптимального споживання та оптимальних інвестицій у біноміальній безарбітражній ціновій моделі. Доведено існування та єдиність розв'язку оптимізаційної задачі, в якій інвестор максимізує очікувану корисність статків у кінці останнього періоду. Доведено існування та єдиність розв'язку оптимізаційної задачі, в якій інвестор максимізує очікувану корисність статків протягом усіх періодів, при цьому здійснюючи вибір щодо рівня споживання в кожному періоді. Доведено існування та єдиність розв'язку оптимізаційної задачі, коли корисність отримується від споживання протягом всіх періодів і від залишку грошей в ньому.

Ключові слова: безарбітражна біноміальна цінова модель, інвестиції, споживання, корисність.

Вступ

Безарбітражна методологія — один з двох шляхів знаходження ціни активів. Інший підхід, цінова модель капітальних активів, ґрунтується на взаємозв'язку коливань попиту та пропозиції серед інвесторів на ринку. Ця модель дає глибоке розуміння ринку в цілому, але не дає чітких кількісних результатів, які забезпечує безарбітражна методологія. В ідеалізованому повному ринку безарбітражні міркування стають особливо корисними. З іншого боку, більшість ринків неповні, і тому ціни не можуть бути визначені лише з умов безарбітражності. В праці розглянуто

2020 Mathematics Subject Classification: 91B99

проблему, яка лежить в основі цінової моделі капітальних активів, а саме максимізація очікуваної корисності від інвестицій.

1. Біноміальна безарбітражна цінова модель

Нагадаємо означення N-періодної біноміальної цінової моделі (див. [1]).

Означення 1. ***N-періодна біноміальна цінова модель***

(1) починається в момент часу $t = 0$, завершується в момент часу $t = N$, і має N періодів — від $t = n$ до $t = n + 1$, $n = 0, \ldots, N - 1$;
(2) має ринок акцій, на якому фіксовано величини S_0, p, q, u, d;
(3) кожна акція в момент часу $t = 0$ коштує $S_0 > 0$;
(4) в момент часу $t = n+1$, $n = 0, \ldots, N - 1$, підкидається монета (результат підкидання позначається $\omega_{n+1} \in \{H, T\}$) :
   (а) з ймовірністю $p \in (0, 1)$ випадає $\omega_{n+1} = H$ і тоді ціна акції в момент часу $t = n + 1$ дорівнює
   $$S_{n+1}(\omega_1 \ldots \omega_n H) = u \cdot S_n(\omega_1 \ldots \omega_n);$$
   (б) з ймовірністю $q = 1 - p \in (0, 1)$ випадає T і тоді ціна акції в момент часу $t = n + 1$ набуває значення
   $$S_{n+1}(\omega_1 \ldots \omega_n T) = d \cdot S_n(\omega_1 \ldots \omega_n);$$
   параметри u, d $(0 < d < u)$ називаються, відповідно, *коефіцієнтами* (*множниками*) *зростання* та *спадання ціни* акції;
(5) має ринок грошей, на якому фіксовано відсоткову ставку r;
(6) на ринку грошей можна вкласти (інвестувати) і можна позичити (взяти кредит) довільну суму грошей:
   (а) вклавши в момент часу $t = n$, $n = 0, \ldots, N - 1$, суму розміром 1 інвестор у момент часу $t = n + 1$ отримує суму $1 + r$;
   (б) позичивши в момент часу $t = n$, $n = 0, \ldots, N - 1$, суму розміром 1, позичальник в момент часу $t = n + 1$ має повернути суму $1 + r$.

Міра в цій моделі стосовно ймовірностей p, q позначається $\mathbb{P}$. Відповідно, математичне сподівання та умовне математичне сподівання позначаються $\mathbb{E}$ та $\mathbb{E}_n$. Позначимо

$$\Omega = \{\omega = (\omega_1 \ldots \omega_N) \mid \omega_i \in \{H, T\}\}.$$

Тоді для довільних елементарної події ω, події A та випадкової величини X матимемо:

$$\mathbb{P}(\omega) = \mathbb{P}(\omega_1 \ldots \omega_N) = p^{\#H(\omega_1 \ldots \omega_N)} q^{\#T(\omega_1 \ldots \omega_N)}, \quad \omega \in \Omega;$$
$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\omega) = \sum_{(\omega_1 \ldots \omega_N) \in A} p^{\#H(\omega_1 \ldots \omega_N)} q^{\#T(\omega_1 \ldots \omega_N)}, \quad A \subset \Omega;$$
$$\mathbb{E}\big[X\big] = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\omega) X(\omega) = \sum_{\omega \in \Omega} p^{\#H(\omega_1 \ldots \omega_N)} q^{\#T(\omega_1 \ldots \omega_N)} X(\omega_1 \ldots \omega_N);$$
$$\mathbb{E}_n\big[X\big](\omega_1 \ldots \omega_n) = \sum_{(\omega_{n+1} \ldots \omega_N)} p^{\#H(\omega_{n+1} \ldots \omega_N)} q^{\#T(\omega_{n+1} \ldots \omega_N)} X(\omega_1 \ldots \omega_N), \quad n = 0, \ldots, N;$$

$$\mathbb{E}_0\big[X\big] = \mathbb{E}\big[X\big], \quad \mathbb{E}_N\big[X\big] = X.$$

Означення 2. Нехай (N, S_0, u, d, r, p, q) — N-періодна біноміальна цінова модель. Цю модель будемо називати ***N-періодною біноміальною безарбітражною ціновою моделлю***, якщо параметри u, d, r задовольняють ***умови безарбітражності***

$$0 < d < 1 + r < u.$$

Величини

$$\widetilde{p} = \frac{1+r-d}{u-d}, \quad \widetilde{q} = \frac{u-1-r}{u-d} \tag{1}$$

називаються ***безризиковими ймовірностями*** в цій моделі.

Міра в цій моделі стосовно ймовірностей $\widetilde{p}, \widetilde{q}$ позначається $\widetilde{\mathbb{P}}$ і називається ***безризиковою*** (або ***нейтральною до ризику***). Відповідно, математичне сподівання й умовне математичне сподівання стосовно цієї міри позначаються $\widetilde{\mathbb{E}}$ та $\widetilde{\mathbb{E}}_n$.

Означення 3. Процес $\{Y_n\}$ у біноміальній ціновій моделі називається ***адаптованим***, якщо $\forall n$ випадкова величина $Y_n = Y_n(\omega_1 \dots \omega_n)$ залежить лише від перших n підкидань (монети) $\omega_1 \dots \omega_n$.

Для доведення отриманих результатів нам знадобиться теорема про реплікацію в багатоперіодній біноміальній ціновій моделі (див. [1], стор. 12).

Теорема 1. *Нехай (N, S_0, u, d, r, p, q) — N-періодна біноміальна безарбітражна цінова модель з безризиковими ймовірностями* (1)*. Нехай у цій моделі задано похідний цінний папір із функцією виплат*

$$V_N = V_N(\omega_1 \dots \omega_N).$$

Визначимо адаптований процес $V_0, \dots, V_N$ за формулою

$$V_n(\omega_1 \dots \omega_n) = \frac{1}{1+r}\big[\widetilde{p}\, V_{n+1}(\omega_1 \dots \omega_n H) + \widetilde{q}\, V_{n+1}(\omega_1 \dots \omega_n T)\big], \quad n = 0, \dots, N-1. \tag{2}$$

Побудуємо (адаптований) портфельний процес $\Delta_0, \dots, \Delta_{N-1}$ за формулою:

$$\Delta_n(\omega_1 \dots \omega_n) = \frac{V_{n+1}(\omega_1 \dots \omega_n H) - V_{n+1}(\omega_1 \dots \omega_n T)}{S_{n+1}(\omega_1 \dots \omega_n H) - S_{n+1}(\omega_1 \dots \omega_n T)}, \quad n = 0, \dots, N-1.$$

Приймемо $X_0 = V_0$ і визначимо адаптований процес $X_0, \dots, X_N$ за формулою

$$X_{n+1} = \Delta_n S_{n+1} + (1+r)(X_n - \Delta_n S_n), \quad n = 0, \dots, N-1. \tag{3}$$

Тоді

$$X_n(\omega_1 \dots \omega_n) = V_n(\omega_1 \dots \omega_n) \quad \forall \omega_1 \dots \omega_n, \quad n = 1, \dots, N.$$

Означення 4. Випадкова величина $V_n(\omega_1 \dots \omega_n)$, що визначається формулою (2), називається ***ціною (вартістю) похідного цінного паперу в момент часу*** n, якщо перших n підкидань завершилися результатом $\omega_1, \dots, \omega_n$. Величина V_0 називається ***ціною (вартістю) похідного цінного паперу (в момент часу 0)***.

Означення 5. Формула (3) називається ***рівнянням поточного капіталу (статків, достатку)***.

Учасник ринку має початковий статок X_0 і бажає інвестувати у ринок акцій та грошовий ринок для того, щоб максимізувати очікувану корисність статків у момент часу N. Він має функцію корисності $\mathcal{U} : (a, b) \to \mathbf{R}$, диференційовну, строго опуклу вгору і строго зростаючу, і хоче розв'язати таку задачу.

Нехай (N, S_0, u, d, r, p, q) — N-періодна біноміальна безарбітражна цінова модель. Визначимо дві оптимізаційні задачі.

Задача 1. *$\forall X_0 \in (a, b)$ знайти адаптований процес $\Delta_0, \ldots, \Delta_{N-1}$ в цій моделі, що максимізує очікувану корисність*

$$\mathbb{E}\big[\mathcal{U}(X_N)\big]$$

за умов рівняння статку

$$X_{n+1} = \Delta_n S_{n+1} + (1 + r)(X_n - \Delta_n S_n), \quad n = 0, \ldots, N - 1.$$

Задача 2. *$\forall X_0 \in (a, b)$ знайти випадкову величину X_N у цій моделі, що максимізує очікувану корисність*

$$\mathbb{E}\big[\mathcal{U}(X_N)\big]$$

за умови

$$\widetilde{\mathbb{E}}\left[\frac{X_N}{(1 + r)^N}\right] = X_0.$$

Сформульовані оптимізаційні задачі еквівалентні (доведення див. [1], стор. 76).

Теорема 2. *Нехай $X_0 \in (a, b)$, $\Delta^* = \{\Delta_0^*, \ldots, \Delta_{N-1}^*\}$ — адаптований стохастичний процес, X_N^* вартість поточного капіталу (статку) в момент часу $t = N$, що має початкову ціну X_0 і генерується портфельним процесом Δ^*. Тоді Δ^* — оптимальний розв'язок задачі 1 тоді й лише тоді, коли X_N^* — оптимальний розв'язок задачі 2.*

Теорема 2 розбиває задачу оптимальних інвестицій на два кроки: перший полягає у знаходженні оптимальної випадкової величини X_N, що є розв'язком задачі 2, другий — у знаходженні оптимального портфеля, що розпочинається з вартості X_0 і генерує X_N згідно з алгоритмом теореми про реплікацію в мультиперіодній біноміальній моделі.

Лема 1. *Нехай функція $\mathcal{U} : (a, b) \to \mathbf{R}$ $(a < b)$ має властивості:*

(1) *$\mathcal{U}$ строго опукла вгору;*
(2) *$\mathcal{U}$ не має локальних екстремумів;*
(3) $\mathcal{U} \in \mathcal{D}(a, b)$;
(4) $\mathcal{U}'(x) \to 0, \ x \to b_-, \quad \mathcal{U}'(x) \to +\infty, \ x \to a_+$.

Тоді функція $\mathcal{U}' : (a, b) \to (0, +\infty)$ строго спадна, неперервна й бієктивна. Зокрема, існує строго спадна обернена до $\mathcal{U}'$ функція

$$\mathcal{I} : (0, +\infty) \to (a, b), \quad \mathcal{I} = \mathcal{U}^{-1}, \tag{4}$$

з таким властивостями:

$$\mathcal{I}(y) \to a, \ y \to +\infty, \quad \mathcal{I}(y) \to b, \ y \to 0_+. \tag{5}$$

Доведення.

Зауваження 1. $\mathcal{U}'$ строго спадна на (a,b).

Випливає зі строгої опуклості вгору функції $\mathcal{U}$ (див. [2]).

Зауваження 2. $\mathcal{U}' \in \mathcal{C}(a,b)$.

Згідно з зауваженням 1, внаслідок монотонності, $\mathcal{U}'$ може мати точки розриву лише першого роду (див. [2]). Натомість за теоремою Дарбу всі точки розриву похідної $\mathcal{U}'$ є точками розриву лише другого роду (див. [2]).

Зауваження 3. $\mathcal{U}'(x) > 0 \quad \forall x \in (a,b)$.

Згідно з умовою (iv) леми

$$\exists x_1 \in (a,b) \quad \forall x \in (a,x_1] \quad \mathcal{U}'(x) > 0.$$

Припустимо, що

$$\exists x_2 \in (a,b): \quad \mathcal{U}'(x_2) < 0.$$

Тоді з зауваження 2 та теореми Больцано-Коші про проміжне значення отримуємо, що

$$\exists x_0 \in (x_1,x_2): \quad \mathcal{U}'(x_0) = 0.$$

Враховуючи зауваження 1 матимемо

$$\forall x \in (a,x_0) \quad \mathcal{U}'(x) > 0 \wedge \forall x \in (x_0,b) \quad \mathcal{U}'(x) < 0.$$

Звідси випливає, що точка x_0 є (строгим внутрішнім глобальним) мінімумом функції $\mathcal{U}$, що суперечить умові (ii) леми.

Зауваження 4. $\mathcal{U}'\big((a,b)\big) = (0,+\infty)$.

Згідно з зауваженням 3 маємо включення $\mathcal{U}'\big((a,b)\big) \subset (0,+\infty)$. Нехай $y \in (0,+\infty)$. За умовою (iv) леми

$$\exists y_1, y_2 \in \mathcal{U}'\big((a,b)\big): \quad y_1 < y < y_2.$$

Тоді з зауваження 2 та теореми Больцано-Коші про проміжне значення отримуємо, що

$$\mathcal{U}'\big((a,b)\big) \supset [y_1,y_2] \ni y.$$

Отже, доведено протилежне включення $\mathcal{U}'\big((a,b)\big) \supset (0,+\infty)$.

Із зауважень 1 і 4 випливає твердження леми стосовно властивостей похідної $\mathcal{U}'$, з яких, зокрема, отримуємо (4) і (5). □

Лема 2. *За умов і позначень леми 1* $\forall y > 0$ *функція*

$$f: (a,b) \to \mathbf{R}, \quad f(x) = \mathcal{U}(x) - yx,$$

має в точці $x^* = \mathcal{I}(y)$ *строгий (глобальний) максимум, тобто*

$$\mathcal{U}(x) - yx < \mathcal{U}(\mathcal{I}(y)) - y\mathcal{I}(y) \quad \forall x \in (a,b): \ x \neq x^*.$$

Доведення. Нехай $y > 0$. Згідно з лемою 1 похідна $\mathcal{U}'$ строго спадає на (a, b), до того ж $\mathcal{U}'\big((a,b)\big) = (0, +\infty)$. Тоді

$$\exists! x^* \in (a, b) : \quad \mathcal{U}'(x^*) = y,$$

отже, $x^* = \mathcal{I}(y)$, до того ж

$$\forall x \in (a, x^*) \quad \mathcal{U}'(x) > y \wedge \forall x \in (x^*, b) \quad \mathcal{U}'(x) < y. \tag{6}$$

Оскільки

$$f'(x) = \mathcal{U}'(x) - y,$$

то з (6) випливає твердження леми. □

Означення 6. Функцію $\mathcal{U} : (a, b) \to \mathbf{R}$ $(a < b)$ будемо називати ***властивою функцією корисності*** на інтервалі (a, b), якщо:

(1) $\mathcal{U}$ строго опукла вгору;
(2) $\mathcal{U}$ не має локальних екстремумів;
(3) $\mathcal{U} \in \mathcal{D}(a, b)$;
(4) $\mathcal{U}'(x) \to 0, \ \ x \to b_-, \quad \mathcal{U}'(x) \to +\infty, \ \ x \to a_+$.

Наступна теорема дає відповідь на питання про існування й єдиність розв'язку (оптимізаційної) задачі 2.

Теорема 3. *Нехай $\mathcal{U} : (a, b) \to \mathbf{R}$ $(0 < a < b)$ — властива функція корисності на інтервалі (a, b). Нехай (N, S_0, u, d, r, p, q) — N-періодна безарбітражна біноміальна цінова модель,*

$$X_0 \in \left(\frac{a}{(1+r)^N}, \frac{b}{(1+r)^N} \right). \tag{7}$$

Тоді на множині всіх випадкових величин $X_N \in (a, b)$ у цій моделі існує й до того ж єдиний строгий глобальний максимум задачі

$$\mathbb{E}\big[\mathcal{U}(X_N)\big] \to \max \tag{8}$$

за умови

$$\widetilde{\mathbb{E}} \left[\frac{X_N}{(1+r)^N} \right] = X_0. \tag{9}$$

Доведення. Нехай Z позначає похідну Радона-Никодима міри $\widetilde{\mathbb{P}}$ стосовно міри $\mathbb{P}$, ζ — щільність (густина) ціни стану

$$Z(\omega) = Z(\omega_1 \ldots \omega_N) = \frac{\widetilde{\mathbb{P}}(\omega_1 \ldots \omega_N)}{\mathbb{P}(\omega_1 \ldots \omega_N)} = \left(\frac{\widetilde{p}}{p} \right)^{\#H(\omega_1 \ldots \omega_N)} \left(\frac{\widetilde{q}}{q} \right)^{\#T(\omega_1 \ldots \omega_N)},$$

$$\zeta(\omega) = \zeta(\omega_1 \ldots \omega_N) = \frac{Z(\omega)}{(1+r)^N},$$

де $\#H(\omega_1 \ldots \omega_N)$, $\#T(\omega_1 \ldots \omega_N)$ позначають, відповідно, кількість (випадань) H, T у наборі $\omega = \omega_1 \ldots \omega_N$. Використовуючи ці позначення, оптимізаційну задачу (8),(9) можна переписати так:

$$\mathbb{E}\big[\mathcal{U}(X_N)\big] = \sum_{m=1}^{M} p_m \mathcal{U}(x_m) \to \max, \tag{10}$$

за умови

$$\widetilde{\mathbb{E}}\left[\frac{X_N}{(1+r)^N}\right] = \mathbb{E}\left[Z\frac{X_N}{(1+r)^N}\right] = \mathbb{E}\left[\zeta X_N\right] = \sum_{m=1}^{M} p_m x_m \zeta_m = X_0, \tag{11}$$

де $M = 2^N$ — кількість всеможливих наборів підкидань монети в N-періодній біноміальній ціновій моделі, які позначимо $\omega^1, \ldots, \omega^M$. Відповідно,

$$\zeta_m = \zeta(\omega^m), \quad p_m = \mathbb{P}(\omega^m), \quad x_m = X_N(\omega^m), \quad m = 1, \ldots, M.$$

Для знаходження оптимального вектора $(x_1, \ldots, x_M)$ запишемо функцію Лагранжа для задачі (10),(11)

$$L = \sum_{m=1}^{M} p_m \mathcal{U}(x_m) - \lambda\left(\sum_{m=1}^{M} p_m \zeta_m x_m - X_0\right).$$

Обчислимо частинні похідні L по x_m та прирівняємо їх до нуля

$$\frac{\partial L}{\partial x_m} = p_m \mathcal{U}'(x_m) - \lambda p_m \zeta_m = 0, \quad m = 1, \ldots, M.$$

Отже,

$$\mathcal{U}'(x_m) = \lambda \zeta_m, \quad m = 1, \ldots, M. \tag{12}$$

Згідно з лемою 1 існує обернена до $\mathcal{U}'$ строго спадна функція $\mathcal{I}$

$$\mathcal{I} : (0, +\infty) \to (a, b), \quad \mathcal{I} = \mathcal{U}'^{-1},$$

з властивостями

$$\mathcal{I}(y) \to a, \;\; y \to +\infty, \quad \mathcal{I}(y) \to b, \;\; y \to 0_+. \tag{13}$$

З (12) отримуємо, що

$$X_N(\omega^m) = x_m = \mathcal{I}\big(\lambda \zeta(\omega^m)\big), \quad m = 1, \ldots, M.$$

Отже,

$$X_N = \mathcal{I}\big(\lambda\zeta\big). \tag{14}$$

Для знаходження λ підставляємо (14) в (11)

$$\mathbb{E}\left[\zeta\, \mathcal{I}(\lambda\zeta)\right] = X_0. \tag{15}$$

Зауваження 5. $\exists! \lambda^* > 0$, що задовольняє (15).

Розглянемо функцію

$$g(\lambda) = \mathbb{E}\left[\zeta\, \mathcal{I}(\lambda\zeta)\right], \quad g : (0, +\infty) \to \mathbf{R}.$$

Тоді

$$\lim_{\lambda\to+\infty} g(\lambda) = \mathbb{E}\left[\zeta \lim_{\lambda\to+\infty} \mathcal{I}(\lambda\zeta)\right] = \frac{a}{(1+r)^N}\, \mathbb{E}\big[Z\big] = \frac{a}{(1+r)^N}. \tag{16}$$

У попередніх перетвореннях ми скористалися (13) та властивістю похідної Радона-Никодима $\mathbb{E}\big[Z\big] = 1$. Аналогічно

$$\lim_{\lambda\to 0_+} g(\lambda) = \mathbb{E}\left[\zeta \lim_{\lambda\to 0_+} \mathcal{I}(\lambda\zeta)\right] = \frac{b}{(1+r)^N}\, \mathbb{E}\big[Z\big] = \frac{b}{(1+r)^N}. \tag{17}$$

З (7), (16), (17), строгого спадання функції $\mathcal{I}$ та теореми Больцано-Коші про проміжне значення випливає зауваження 5.

Отже, доведено існування та єдиність критичної точки для функції Лагранжа в нашій задачі. Ця точка буде точкою строгого локального максимуму, оскільки матриця з частинних похідних другого порядку функції Лагранжа L додатно визначена (вона діагональна і всі елементи діагоналі — від'ємні). Зауважимо, що звідси, взагалі кажучи, не випливає, що ця точка неодмінно є глобальним екстремумом. Првильне таке твердження: *якщо функція* $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ *має єдиний строгий локальний екстремум у точці* x_0, *то у випадку* $n = 1$ *в цій точці* f *досягає свого глобального екстремуму, тоді як при* $n > 1$ *функція* f *може і не мати глобального екстремуму в точці* x_0. Строге доведення цього твердження (у вигляді теореми) запропоновано після доведення цієї теореми, оскільки, на думку авторів, воно є цікавим само по собі. Проте в нашому випадку знайдений (єдиний строгий) локальний екстремум буде також і глобальним екстремумом. Позначимо

$$X_N^* = \mathcal{I}(\lambda^* \zeta).$$

Зауваження 6. Нехай $X_N \neq X_N^*$. Тоді $\mathbb{E}\left[\mathcal{U}(X_N)\right] < \mathbb{E}\left[\mathcal{U}(X_N^*)\right].$

За лемою 2

$$\begin{aligned}\forall m \in \{1, ..., M\} \quad \forall x \in (a,b) :\ & x \neq \mathcal{I}\big(\lambda^* \zeta(\omega^m)\big) \\ & \mathcal{U}(x) - \lambda^* \zeta(\omega^m)\, x < \mathcal{U}\left(\mathcal{I}\big(\lambda^* \zeta(\omega^m)\big)\right) - \lambda^* \zeta(\omega^m)\, \mathcal{I}\big(\lambda^* \zeta(\omega^m)\big).\end{aligned}$$

Звідси отримуємо

$$\mathcal{U}(X_N) - \lambda^* \zeta\, X_N \leq \mathcal{U}\left(X_N^*\right) - \lambda^* \zeta\, X_N^*, \tag{18}$$

до того ж $\exists m \in \{1, ..., M\}$ таке, що для ω^m нерівність (18) — строга.

Переходячи до математичних сподівань в нерівності (18), отримуємо строгу нерівність

$$\mathbb{E}\left[\mathcal{U}(X_N)\right] - \mathbb{E}\left[\lambda^* \zeta\, X_N\right] < \mathbb{E}\left[\mathcal{U}(X_N^*)\right] - \mathbb{E}\left[\lambda^* \zeta\, X_N^*\right].$$

Враховуючи (11), маємо

$$\mathbb{E}\left[\mathcal{U}(X_N)\right] - \lambda^* X_0 < \mathbb{E}\left[\mathcal{U}(X_N^*)\right] - \lambda^* X_0 \implies \mathbb{E}\left[\mathcal{U}(X_N)\right] < \mathbb{E}\left[\mathcal{U}(X_N^*)\right].$$

Зауваження 6 завершує доведення теореми. □

Теорема 4. *Нехай* $f \in \mathcal{C}^{(1)}(\mathbf{R}^n)$, $n > 1$. *Якщо* f *має в* $\mathbf{R}^n$ *єдиний строгий локальний екстремум, то цей екстремум не обов'язково є глобальним екстемумом* f *у* $\mathbf{R}^n$.

Доведення. Розглянемо функцію $f \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbf{R}^n)$, що визначається формулою

$$f(x) = x_n^2 + (x_n + 1)^3 \sum_{k=1}^{n-1} x_k^2, \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n. \tag{19}$$

Зауваження 7. $f(x_1, \ldots, x_{n-1}, t) \to -\infty,\ \ t \to -\infty$, якщо $(x_1, \ldots, x_{n-1}) \neq (0, \ldots, 0)$.

Випливає безпосередньо з визначення (19) функції f.

Зауваження 8. $x = 0$ єдина критична точка функції (19).

Множина критичних точок функції f задовольняє систему рівнянь

$$\begin{cases} (x_n+1)^3 x_i = 0, & i = 1, \dots, n-1, \\ 2x_n + 3(x_n+1)^2 \sum\limits_{k=1}^{n-1} x_k^2 = 0. \end{cases}$$

З останнього рівняння цієї системи отримуємо, що $x_n + 1 \neq 0$. Тоді з перших $n-1$ рівняння маємо $x_i = 0,\ \ i = 1, \dots, n-1$. Тоді з останнього рівняння $x_n = 0$.

Зауваження 9. $x = 0$ є строгим локальним мінімумом функції (19).

Справді,

$$f(0) = 0, \quad f(x) > 0 \quad \forall x \in (-1,1)^n \setminus \{0\}.$$

Отже, з зауважень 8 і 9 випливає, що функція (19) має єдиний строгий локальний екстремум у точці $x = 0$. Цей екстремум не є локальним мінімумом функції f. Проте він не є глобальним мінімумом цієї функції, що випливає з зауваження 7. $\square$

Сформулюємо теорему про реплікацію у мультиперіодній біноміальній моделі, в якій дериватив пов'язаний з серією (потоком) виплат (доведення див. [1], стор. 43).

Теорема 5. *Нехай* (N, S_0, u, d, r, p, q) — N*-періодна безарбітражна біноміальна цінова модель,* $(C_0, \dots, C_N)$ — *довільний адаптований процес у цій моделі. Ціна* V_n *деривативу, за яким здійснюються виплати* $C_n, \dots, C_N$ *в моменти часу* $n, \dots, N$ *відповідно, в момент часу* n *становить*

$$V_n = \widetilde{\mathbb{E}}_n \left[\sum_{k=n}^{N} \frac{C_k}{(1+r)^{k-n}} \right], \quad n = 0, \dots, N,$$

зокрема, $V_N = C_N$. *Адаптований стохастичний процес цін* $V_n, \quad n = 0, \dots, N$ *задовольняє рівності*

$$C_n(\omega_1 \dots \omega_n) = V_n(\omega_1 \dots \omega_n) - \frac{1}{1+r} \widetilde{\mathbb{E}}_n \left[V_{n+1} \right] (\omega_1 \dots \omega_n).$$

Визначимо (адаптований) портфельний процес

$$\Delta_n(\omega_1 \dots \omega_n) = \frac{V_{n+1}(\omega_1 \dots \omega_n H) - V_{n+1}(\omega_1 \dots \omega_n T)}{S_{n+1}(\omega_1 \dots \omega_n H) - S_{n+1}(\omega_1 \dots \omega_n T)}, \quad n = 0, \dots, N-1.$$

Приймемо $X_0 = V_0$ *і розглянемо адаптований стохастичний процес* $X_0, \dots, X_N$, *що визначається рівнянням статку*

$$X_{n+1} = \Delta_n S_{n+1} + (1+r)(X_n - \Delta_n S_n), \quad n = 0, \dots, N-1.$$

Тоді

$$X_n(\omega_1 \dots \omega_n) = V_n(\omega_1 \dots \omega_n) \quad \forall (\omega_1 \dots \omega_n), \quad n = 1, \dots, N.$$

Наступна теорема досліджує задачу оптимізації споживання для деривативу, визначеного в попередній теоремі про реплікацію. Процес споживання $C = \{C_0, \dots, C_N\}$ — адаптований стохастичний процес, де C_n вказує на кількість коштів, які споживаються агентом у момент часу n. План споживання та інвестицій складається з пари (C, Δ), де $\Delta = \{\Delta_0, \dots, \Delta_{N-1}\}$ — процес портфелів (визначається як в теоремі про реплікацію). Згідно з теоремою про реплікацію вартість деривативу в момент часу $n = 0$ становить

$$V_0 = \widetilde{\mathbb{E}}\left[\sum_{n=0}^{N} \frac{C_n}{(1+r)^n}\right].$$

Враховуючи цю рівність, перейдемо до точного формулювання теореми про оптимальне споживання.

Нехай (N, S_0, u, d, r, p, q) — N-періодна безарбітражна біноміальна цінова модель. Позначимо

$$\mathfrak{C} = \{(C_0, \dots, C_N) \mid C_n \in (a_n, b_n),\ \ n = 0, \dots, N\},$$

де $(C_0, \dots, C_N)$ — довільний адаптований процес у цій моделі.

Теорема 6. *Нехай функції*

$$\mathcal{U}_n : (a_n, b_n) \to \mathbf{R} \quad (0 \le a_n < b_n),\ \ n = 0, \dots, N,$$

є властивими функціями корисності на інтервалах (a_n, b_n), $n = 0, \dots, N$, *відповідно,*

$$X_0 \in \left(\sum_{n=0}^{N} \frac{a_n}{(1+r)^n}, \sum_{n=0}^{N} \frac{b_n}{(1+r)^n}\right). \tag{20}$$

Тоді на множині $\mathfrak{C}$ *існує й до того ж єдиний строгий глобальний максимум задачі*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{N} \mathcal{U}_n(C_n)\right] \to \max \tag{21}$$

за умови

$$\widetilde{\mathbb{E}}\left[\sum_{n=0}^{N} \frac{C_n}{(1+r)^n}\right] = X_0. \tag{22}$$

Доведення. Нехай Z позначає похідну Радона-Никодима міри $\widetilde{\mathbb{P}}$ стосовно міри $\mathbb{P}$, ζ — щільність (густина) ціни стану. Тоді

$$Z(\omega) = Z(\omega_1 \dots \omega_N) = \frac{\widetilde{\mathbb{P}}(\omega_1 \dots \omega_N)}{\mathbb{P}(\omega_1 \dots \omega_N)} = \left(\frac{\widetilde{p}}{p}\right)^{\#H(\omega_1 \dots \omega_N)} \left(\frac{\widetilde{q}}{q}\right)^{\#T(\omega_1 \dots \omega_N)},$$

де $\#H(\omega_1 \dots \omega_N)$, $\#T(\omega_1 \dots \omega_N)$ позначають, відповідно, кількість (випадань) H, T у наборі $\omega = \omega_1 \dots \omega_N$. Розглянемо адаптований стохастичний процес Радона-Никодима

$$Z_n = \mathbb{E}_n\big[Z\big], \quad n = 0, \dots, N. \tag{23}$$

Оскільки процес $\{C_0, \dots, C_N\}$ адаптований, то за властивостями умовних математичних сподівань

$$\mathbb{E}\big[ZC_n\big] = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}_n\big[ZC_n\big]\big] = \mathbb{E}\big[C_n \mathbb{E}_n\big[Z\big]\big] = \mathbb{E}\big[Z_n C_n\big],\ \ n = 0, \dots, N. \tag{24}$$

Позначимо

$$\zeta_n = \frac{Z_n}{(1+r)^n}, \quad n = 0, \dots, N. \tag{25}$$

Отже, використовуючи (23), (24), (25) і зв'язок між математичними сподіваннями стосовно мір $\mathbb{P}$ та $\widetilde{\mathbb{P}}$, отримуємо

$$\widetilde{\mathbb{E}}\left[\sum_{n=0}^{N}\frac{C_n}{(1+r)^n}\right]=\mathbb{E}\left[Z\sum_{n=0}^{N}\frac{C_n}{(1+r)^n}\right]=\mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{N}\frac{Z_nC_n}{(1+r)^n}\right]=\mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{N}\zeta_nC_n\right].$$

Оптимізаційну задачу (21),(22) можна переписати так:

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{N}\mathcal{U}_n(C_n)\right]=\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=1}^{M_n}p_n^k\mathcal{U}_n(c_n^k)\to\max \tag{26}$$

за умови

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{N}\zeta_nC_n\right]=\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=1}^{M_n}p_n^k\zeta_N^kc_n^k=X_0, \tag{27}$$

де $M_n=2^n$ — кількість всеможливих наборів з n послідовних підкидань монети, які позначимо $\omega_n^1,\cdots,\omega_n^{M_n}$,

$$c_n^k=C_n(\omega_n^k),\quad p_n^k=\mathbb{P}(\omega_n^k),\quad \zeta_n^k=\zeta_n(\omega_n^k),\quad k=1,\ldots,M_n,\quad n=0,\ldots,N.$$

Запишемо функцію Лагранжа для задачі (26),(27)

$$L=\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=1}^{M_n}p_n^k\mathcal{U}_n(c_n^k)-\lambda\left(\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=1}^{M_n}p_n^k\zeta_n^kc_n^k-X_0\right).$$

Обчислимо частинні похідні L по c_n^k та прирівняємо їх до нуля

$$\frac{\partial L}{\partial c_n^k}=p_n^k\mathcal{U}_n'(c_n^k)-\lambda p_n^k\zeta_n^k=0,\quad k=1,\ldots,M_n,\quad n=0,\ldots,N.$$

Отже,

$$\mathcal{U}'(c_n^k)=\lambda\zeta_n^k,\quad k=1,\ldots,M_n,\quad n=0,\ldots,N. \tag{28}$$

Згідно з лемою 1 існує обернена до $\mathcal{U}'$ (строго спадна) функція $\mathcal{I}$

$$\mathcal{I}:(0,+\infty)\to(a,b),\quad \mathcal{I}={\mathcal{U}'}^{-1},$$

що має властивості

$$\mathcal{I}(y)\to a,\quad y\to+\infty,\quad \mathcal{I}(y)\to b,\quad y\to 0_+. \tag{29}$$

Отже, з (28) отримуємо

$$C_n(\omega_n^k)=c_n^k=\mathcal{I}\left(\lambda\zeta_n^k\right),\quad k=1,\ldots,M_n,\quad n=0,\ldots,N. \tag{30}$$

Тобто,

$$C_n=\mathcal{I}\left(\lambda\zeta_n\right),\quad n=0,\ldots,N. \tag{31}$$

Для знаходження λ підставляємо (31) в (27)

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{N}\zeta_n\,\mathcal{I}\left(\lambda\zeta_n\right)\right]=X_0. \tag{32}$$

Зауваження 10. $\exists!\lambda^*>0$, що задовольняє рівність (32).

Розглянемо функцію

$$g(\lambda) = \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{N} \zeta_n \, \mathcal{I}\left(\lambda\zeta_n\right)\right], \quad g : (0, +\infty) \to \mathbf{R}.$$

Тоді

$$\lim_{\lambda\to+\infty} g(\lambda) = \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{N} \zeta_n \lim_{\lambda\to+\infty} \mathcal{I}\left(\lambda\zeta_n\right)\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{N} \frac{a_n Z_n}{(1+r)^n}\right] = \sum_{n=0}^{N} \frac{a_n}{(1+r)^n}. \tag{33}$$

У попередніх перетвореннях ми скористалися умовою (29), властивостями умовних математичних сподівань і властивістю похідної Радона-Никодима

$$\mathbb{E}\big[Z_n\big] = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}_n\big[Z\big]\big] = \mathbb{E}\big[Z\big] = 1.$$

Аналогічно

$$\lim_{\lambda\to+0} g(\lambda) = \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{N} \zeta_n \lim_{\lambda\to+0} \mathcal{I}\left(\lambda\zeta_n\right)\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{N} \frac{b_n Z_n}{(1+r)^n}\right] = \sum_{n=0}^{N} \frac{b_n}{(1+r)^n}. \tag{34}$$

З (20), (33), (34), строгого спадання функції $\mathcal{I}$ та теореми Больцано-Коші про проміжне значення випливає зауваження 10. Отже, доведено існування та єдиність критичної точки для функції Лагранжа в нашій задачі. Ця точка буде точкою строгого локального максимуму, оскільки матриця з частинних похідних другого порядку функції Лагранжа L додатно визначена (вона діагональна і всі елементи діагоналі — від'ємні). Доведемо, що в знайденій точці досягається строгий глобальний максимум. Позначимо

$$C_n^* = \mathcal{I}\left(\lambda^*\zeta_n\right), \quad n = 0, \ldots, N.$$

Зауваження 11. Нехай $\{C_0, \ldots, C_N\} \neq \{C_0^*, \ldots, C_N^*\}$. Тоді

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{N} \mathcal{U}_n(C_n)\right] < \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{N} \mathcal{U}_n(C_n^*)\right].$$

За лемою 2

$$\forall n = 0, \ldots, N \quad \forall k = 1, \ldots, M_n \quad \forall x \in (a, b) : \ x \neq \mathcal{I}\left(\lambda^*\zeta_n^k\right)$$
$$\mathcal{U}_n(x) - \lambda^*\zeta_n^k \, x < \mathcal{U}_n\left(\mathcal{I}\left(\lambda^*\zeta_n^k\right)\right) - \lambda^*\zeta_n^k \, \mathcal{I}\left(\lambda^*\zeta_n^k\right).$$

Звідси отримуємо

$$\mathcal{U}_n(C_n) - \lambda^*\zeta_n^k \, C_n \leq \mathcal{U}(C_n^*) - \lambda^*\zeta_n^k \, C_n^*, \quad n = 0, \ldots, N, \tag{35}$$

до того ж $\exists n \in \{0, \ldots, N\}, \ k \in \{1, \ldots, M_n\}$ такі, що для ω_n^k нерівність (35) — строга.

Підсумуємо по n нерівності (35). Переходячи до математичних сподівань, отримуємо строгу нерівність

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{N} \mathcal{U}_n(C_n)\right] - \lambda^*\mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{N} \zeta_n C_n\right] < \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{N} \mathcal{U}_n(C_n^*)\right] - \lambda^*\mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{N} \zeta_n C_n^*\right].$$

Враховуючи (27), матимемо

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{N}\mathcal{U}_n(C_n)\right]-\lambda^*X_0<\mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{N}\mathcal{U}(C_n^*)\right]-\lambda^*X_0 \implies$$

$$\implies \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{N}\mathcal{U}_n(C_n)\right]<\mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{N}\mathcal{U}_n(C_n^*)\right].$$

Зауваження 11 завершує доведення теореми. □

Наступна теорема (про оптимальне споживання і залишковий статок) — це дослідження проблеми, коли корисність отримується від споживання коштів протягом кожного періоду біноміальної моделі і від кількості грошей, які залишаються в кінці останнього періоду N. Ця проблема є узагальненням попередньої задачі оптимального споживання: тепер учасник ринку має право не лише споживати C_n в момент часу $n=0,\ldots,N$, а й мати в майбутньому можливий залишок грошей V_N-C_N, якщо $V_N\neq C_N$.

Нехай (N,S_0,u,d,r,p,q) — N-періодна безарбітражна біноміальна цінова модель. Позначимо

$$\mathfrak{C}=\{(C_0,\ldots,C_N,V_N)\mid C_n\in(a_n,b_n),\ \ n=0,\,\ldots,\,N;\ \ V_N-C_N\in(c,d)\},$$

де, відповідно, $(C_0,\ldots,C_N)$ — довільний адаптований процес, V_N — довільна випадкова величина в цій моделі.

Теорема 7. *Нехай функції*

$$\mathcal{U}:(c,d)\to\mathbf{R}\ \ (0\le c<d),\quad \mathcal{U}_n:(a_n,b_n)\to\mathbf{R}\ \ (0\le a_n<b_n),\ \ n=0,\,\ldots,\,N,$$

є властивими функціями корисності на інтервалах (c,d) та (a_n,b_n) $n=0,\,\ldots,\,N$, відповідно,

$$X_0\in\left(\sum_{n=0}^{N}\frac{a_n}{(1+r)^n}+\frac{c}{(1+r)^N},\ \sum_{n=0}^{N}\frac{b_n}{(1+r)^n}+\frac{d}{(1+r)^N}\right). \tag{36}$$

Тоді на множині $\mathfrak{A}$ існує й до того ж єдиний строгий глобальний максимум задачі

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{N}\mathcal{U}_n(C_n)+\mathcal{U}(V_N-C_N)\right]\to\max \tag{37}$$

за умови

$$\widetilde{\mathbb{E}}\left[\sum_{n=0}^{N-1}\frac{C_n}{(1+r)^n}+\frac{V_N}{(1+r)^N}\right]=X_0. \tag{38}$$

Доведення. Позначимо $W=V_N-C_N$. Тоді оптимізаційна задача (37), (38) перепишеться так:

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{N}\mathcal{U}_n(C_n)+\mathcal{U}(W)\right]\to\max \tag{39}$$

за умови

$$\widetilde{\mathbb{E}}\left[\sum_{n=0}^{N}\frac{C_n}{(1+r)^n}+\frac{W}{(1+r)^N}\right]=X_0. \tag{40}$$

Нехай Z — похідна Радона-Никодима міри $\widetilde{\mathbb{P}}$ відносно міри $\mathbb{P}$

$$Z = Z(\omega) = Z(\omega_1 \dots \omega_N) = \frac{\widetilde{\mathbb{P}}(\omega_1 \dots \omega_N)}{\mathbb{P}(\omega_1 \dots \omega_N)} = \left(\frac{\tilde{p}}{p}\right)^{H(\omega_1 \dots \omega_N)} \left(\frac{\tilde{q}}{q}\right)^{T(\omega_1 \dots \omega_N)},$$

де $\#H(\omega_1 \dots \omega_N)$, $\#T(\omega_1 \dots \omega_N)$ позначають, відповідно, кількість (випадань) H, T у наборі $\omega = \omega_1 \dots \omega_N$. Розглянемо адаптований стохастичний процес Радона-Никодима

$$Z_n = \mathbb{E}_n\big[Z\big], \quad n = 0, \dots, N, \tag{41}$$

і нехай

$$\zeta_n = \frac{Z_n}{(1+r)^n}, \quad n = 0, \dots, N.$$

Тоді, використовуючи адаптованість процесу $(C_0, \dots, C_N)$, властивості умовних математичних сподівань і зв'язок між математичними сподіваннями стосовно мір $\mathbb{P}$ та $\widetilde{\mathbb{P}}$, отримуємо

$$\widetilde{\mathbb{E}}\left[\sum_{n=0}^{N} \frac{C_n}{(1+r)^n} + \frac{W}{(1+r)^N}\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{N} \frac{ZC_n}{(1+r)^n} + \frac{ZW}{(1+r)^N}\right] =$$
$$= \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{N} \frac{Z_nC_n}{(1+r)^n} + \frac{ZW}{(1+r)^N}\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{N} \zeta_n C_n + \zeta_N W\right].$$

Перепишемо оптимізаційну задачу (39),(40) у вигляді

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{N} \mathcal{U}_n(C_n) + \mathcal{U}(W)\right] = \sum_{n=0}^{N}\sum_{k=1}^{M_n} p_n^k \mathcal{U}_n(c_n^k) + \sum_{k=1}^{M_N} p_N^k \mathcal{U}(w_N^k) \to \max \tag{42}$$

за умови

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{N} \zeta_n C_n + \zeta_N W\right] = \sum_{n=0}^{N}\sum_{k=1}^{M_n} p_n^k \zeta_n^k c_n^k + \sum_{k=1}^{M_N} p_N^k \zeta_N^k w_N^k = X_0. \tag{43}$$

де $M_n = 2^n$ — кількість всеможливих наборів з n послідовних підкидань монети, які позначимо $\omega_n^1, \cdots, \omega_n^{M_n}$. Відповідно,

$$c_n^k = C_n(\omega_n^k), \quad p_n^k = \mathbb{P}(\omega_n^k), \quad \zeta_n^k = \zeta_n(\omega_n^k), \quad n = 0, \dots, N, \quad k = 1, \dots, M_n;$$
$$w_N^k = W(\omega_N^k), \quad k = 1, \dots, M_N.$$

Запишемо функцію Лагранжа для задачі (42),(43)

$$L = \sum_{n=0}^{N}\sum_{k=1}^{M_n} p_n^k \mathcal{U}_n(c_n^k) + \sum_{k=1}^{M_N} p_N^k \mathcal{U}(w_N^k) - \lambda\left(\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=1}^{M_n} p_n^k \zeta_n^k c_n^k + \sum_{k=1}^{M_N} p_N^k \zeta_N^k w_N^k - X_0\right).$$

Обчислюючи частинні похідні L по c_n^k, w_N^k та прирівнюючи їх до нуля, отримаємо такі рівності:

$$\mathcal{U}_n'(c_n^k) = \lambda \zeta_n^k, \quad n = 0, \dots, N, \quad k = 1, \dots, M_n; \tag{44}$$
$$\mathcal{U}'(w_N^k) = \lambda \zeta_N^k, \quad k = 1, \dots, M_N. \tag{45}$$

Згідно з лемою 1 існують обернені до $\mathcal{U}_n', \mathcal{U}'$ строго спадні функції

$\mathcal{I}_n : (0, +\infty) \to (a_n, b_n), \quad \mathcal{I}_n = {\mathcal{U}_n'}^{-1}, \quad \mathcal{I}_n(y) \to a_n, \ y \to +\infty, \quad \mathcal{I}_n(y) \to b_n, \ y \to 0_+;$

$\mathcal{I} : (0, +\infty) \to (c, d), \quad \mathcal{I} = {\mathcal{U}'}^{-1}, \quad \mathcal{I}(y) \to c, \ y \to +\infty, \quad \mathcal{I}(y) \to d, \ y \to 0_+.$

Отже, з (44) і (45) отримуємо

$$\begin{aligned} &C_n(\omega_n^k) = c_n^k = \mathcal{I}_c\left(\lambda \zeta_n^k\right), \quad n = 0, \ldots, N, \quad k = 1, \ldots, M_n; \\ &W(\omega_N^k) = w_N^k = \mathcal{I}\left(\lambda \zeta_N^k\right), \quad k = 1, \ldots, M_N. \end{aligned}$$

Тобто

$$C_n = \mathcal{I}_n\left(\lambda \zeta_n\right), \quad n = 0, \ldots, N; \qquad W = \mathcal{I}\left(\lambda \zeta_n\right). \tag{46}$$

Для знаходження λ підставляємо (46) в (43)

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{N} \zeta_n \mathcal{I}_n\left(\lambda \zeta_n\right) + \zeta_n \mathcal{I}\left(\lambda \zeta_N\right)\right] = X_0. \tag{47}$$

Зауваження 12. $\exists! \lambda^* > 0$, що задовольняє рівність (47).

Розглянемо функцію

$$g(\lambda) = \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{N} \zeta_n \mathcal{I}_n\left(\lambda \zeta_n\right) + \zeta_n \mathcal{I}\left(\lambda \zeta_N\right)\right], \quad g : (0, +\infty) \to \mathbf{R}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} &\lim_{\lambda \to +\infty} g(\lambda) = \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{N} \zeta_n \lim_{\lambda \to +\infty} \mathcal{I}_n\left(\lambda \zeta_n\right) + \zeta_n \lim_{\lambda \to +\infty} \mathcal{I}\left(\lambda \zeta_N\right)\right] = \\ &= \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{N} a_n \zeta_n + c\,\zeta_N\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{N} \frac{a_n Z_n}{(1+r)^n} + \frac{cZ}{(1+r)^N}\right] = \sum_{n=0}^{N} \frac{a_n}{(1+r)^n} + \frac{c}{(1+r)^N}. \end{aligned} \tag{48}$$

У попередніх перетвореннях ми скористалися властивостями функцій $\mathcal{I}_n, \mathcal{I}$, властивостями умовних математичних сподівань і властивістю похідної Радона-Никодима

$$\mathbb{E}\big[Z_n\big] = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}_n\big[Z\big]\big] = \mathbb{E}\big[Z\big] = 1.$$

Аналогічно

$$\begin{aligned} &\lim_{\lambda \to +0} g(\lambda) = \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{N} \zeta_n \lim_{\lambda \to +0} \mathcal{I}_n\left(\lambda \zeta_n\right) + \zeta_n \lim_{\lambda \to +0} \mathcal{I}\left(\lambda \zeta_N\right)\right] = \\ &= \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{N} b_n \zeta_n + d\,\zeta_N\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{N} \frac{b_n Z_n}{(1+r)^n} + \frac{dZ}{(1+r)^N}\right] = \sum_{n=0}^{N} \frac{b_n}{(1+r)^n} + \frac{d}{(1+r)^N}. \end{aligned} \tag{49}$$

З (36), (48), (49), строгого спадання функцій $\mathcal{I}_n, \mathcal{I}$ та теореми Больцано-Коші про проміжне значення випливає зауваження 12. Отже, доведено існування та єдиність критичної точки для функції Лагранжа в нашій задачі. Ця точка буде точкою строгого локального максимуму, оскільки матриця з частинних похідних другого порядку функції Лагранжа L додатно визначена (вона діагональна і всі елементи діагоналі — від'ємні). Доведемо, що в знайденій точці досягається строгий глобальний максимум. Позначимо

$$C_n^* = \mathcal{I}_n\left(\lambda^* \zeta_n\right), \quad n = 0, \ldots, N; \qquad W^* = \mathcal{I}\left(\lambda^* \zeta_N\right).$$

Зауваження 13. Нехай $\{C_0, \ldots, C_N, V_N\} \neq \{C_0^*, \ldots, C_N^*, V_N^*\}$. Тоді

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{N} \mathcal{U}_n(C_n) + \mathcal{U}(V_N - C_N)\right] < \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{N} \mathcal{U}_n(C_n^*) + \mathcal{U}(V_N^* - C_N^*)\right].$$

За лемою 2

$$\forall n = 0, \ldots, N \quad \forall k = 1, \ldots, M_n \quad \forall x \in (a_n, b_n): \ x \neq \mathcal{I}_n\left(\lambda^* \zeta_n^k\right)$$
$$\mathcal{U}_n(x) - \lambda^* \zeta_n^k\, x < \mathcal{U}_n\left(\mathcal{I}_n\left(\lambda^* \zeta_n^k\right)\right) - \lambda^* \zeta_n^k\, \mathcal{I}_n\left(\lambda^* \zeta_n^k\right);$$

$$\forall k = 1, \ldots, M_N \quad \forall x \in (c, d): \ x \neq \mathcal{I}\left(\lambda^* \zeta_N^k\right)$$
$$\mathcal{U}(x) - \lambda^* \zeta_N^k\, x < \mathcal{U}\left(\mathcal{I}\left(\lambda^* \zeta_N^k\right)\right) - \lambda^* \zeta_N^k\, \mathcal{I}\left(\lambda^* \zeta_N^k\right).$$

Звідси отримуємо

$$\mathcal{U}_n(C_n) - \lambda^* \zeta_n\, C_n \leq \mathcal{U}_n(C_n^*) - \lambda^* \zeta_n\, C_n^*, \quad n = 0, \ldots, N; \tag{50}$$
$$\mathcal{U}(W) - \lambda^* \zeta_N\, W \leq \mathcal{U}(W^*) - \lambda^* \zeta_N\, W^*. \tag{51}$$

До того ж $\exists n \in \{0, \ldots, N\}$, $k \in \{1, \ldots, M_n\}$ такі, що для ω_n^k принаймні одна з нерівностей (50) або (51) — строга (випливає з умови зауваження 13).

Підсумуємо по n нерівності (50) та додамо нерівність (51). Переходячи до математичних сподівань, отримуємо строгу нерівність

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{N} \mathcal{U}_n(C_n) + \mathcal{U}(W)\right] - \lambda^* \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{N} \zeta_n C_n + \zeta_N W\right] <$$
$$< \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{N} \mathcal{U}_n(C_n^*) + \mathcal{U}(W^*)\right] - \lambda^* \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{N} \zeta_n C_n^* + \zeta_N W^*\right].$$

Враховуючи (43), матимемо

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{N} \mathcal{U}_n(C_n) + \mathcal{U}(W)\right] - \lambda^* X_0 < \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{N} \mathcal{U}_n(C_n^*) + \mathcal{U}(W^*)\right] - \lambda^* X_0 \implies$$
$$\implies \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{N} \mathcal{U}_n(C_n) + \mathcal{U}(W)\right] < \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{N} \mathcal{U}_n(C_n^*) + \mathcal{U}(W^*)\right].$$

Остання нерівність еквівалентна нерівності у твердженні зауваження 13. □

Список використаної літератури

1. S. Shreve, *Stochastic calculus for finance*, I, Springer, New York, 2004.
2. С. І. Підкуйко, *Математичний аналіз*, I, Галицька Видавнича Спілка, Львів, 2004.

Стаття: надійшла до редколегії 07.05.2018
доопрацьована 20.12.2020
прийнята до друку 23.12.2020

OPTIMAL INVESTMENT AND CONSUMPTION IN THE BINOMIAL NO-ARBITRAGE ASSERT-PRICING MODEL

Serhii PIDKUYKO[1], **Mykola BABIAK**[2]

[1]*Ivan Franko National University of Lviv,*
Universytetska Str., 1, 79000, Lviv, Ukraine
[2]*Department of Accounting and Finance*
Lancaster University Management School
Bailrigg, LA1 4YX, UK
e-mails: pidkuyko@gmail.com, mykola.babyak@gmail.com

An optimal consumption and investment problem in the binomial no-arbitrage asset-pricing model is considered. The existence and uniqueness of the solution of the optimization problem where the investor maximizes the expected utility of wealth at the end of the last period is proved. The existence and uniqueness of the solution of the optimization problem where the investor maximizes the expected utility of wealth during all periods while making choice of the level of consumption in each period is proved. The existence and uniqueness of the solution of the optimization problem when the utility derived from consumption both during all periods and the balance of money in the latter one.

Key words: binomial asset-pricing model, investment, consumption, utility.