ISSN 1024-588X. Вісник Львівського університету. Серія фізична. 2016. Випуск 52. С. 28-33
Visnyk of the Lviv University. Series Physics. 2016. Issue 52. P. 28-33

УДК 53.01
PACS 02.40.Gh, 03.65.-w

ЗВ'ЯЗАНІ СТАНИ В ПОТЕНЦІАЛІ $-\gamma/r^2$ В ПРОСТОРІ ЗІ СПІНОВОЮ НЕКОМУТАТИВНІСТЮ КООРДИНАТ

В.М Васюта[3]

Кафедра теоретичної фізики,
Львівський національний університет імені Івана Франка
вул. Драгоманова, 12, 79005 Львів, Україна

Розглянуто вплив спінової некомутативності на обернено квадратичний потенціал. Показано, що енергія основного стану частинки в такому потенціалі обмежена як знизу так і зверху. Доведено, що для достатньо великих констант зв'язку γ енергія основного стану є від'ємною, тобто в потенціалі $-\gamma/r^2$ в просторі зі спіновою некомутативністю координат виникають зв'язані стани.

Ключові слова: некомутативність, обернено квадратичний потенціал

1 Вступ

Інтерес до некомутативних координат з'явився після досліджень в теорії струн, де було показано, що координати на D-брані в полі Нав'є-Шварца стають некомутативними [1], а також, що некомутативність координатних операторів виникає при компактифікації додаткових вимірів в M-теоріях [2]. Крім того за допомогою координатної некомутативності можна включити в звичайні фізичні теорії поняття мінімальної довжини, яке виникає при спробах квантування гравітаційного поля [3].

В найбільш досліджуваній версії некомутативності [1, 2]

$$[X_i, X_j] = i\theta_{ij}, \tag{1}$$

де θ_{ij} – антисиметрична матриця констант, є ряд проблем, найбільшою з яких є порушення інваріатності відносно поворотів. Є кілька шляхів побудови некомутативних алгебр, інваріантних відносно поворотів [3–6]. Серед них є достатньо широкий клас алгебр з так званою спіновою некомутативністю координат, в яких просторові координати "змішуються" зі спіновими операторами.

Так в роботі [7] введено некомутативні координати шляхом додавання до комутативних координат операторів спіну (матриць Паулі) $X_i = x_i + \theta s_i$. Дану алгебру можна узагальнити на релятивістський (3+1)-вимірний випадок, додаючи до координат матриці Дірака $X^\mu = x^\mu + i\theta\gamma^\mu$ [8]. Легко бачити, що такий клас алгебр інваріантний відносно поворотів (Лоренц-інваріантний).

Дещо іншу Лоренц-інваріантну спінову некомутативність будують, зсуваючи комутативні координати на Паулі-Любанського $X^\mu = x^\mu + \theta W^\mu$, де $W^\mu = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}S_{\nu\rho}p_\sigma$, $S_{\nu\rho} = \frac{i}{4}[\gamma_\nu, \gamma_\rho]$ [9]. В нерелятивістських задачах спінову некомутативність такого типу можна будувати у вигляді $\mathbf{R} = \mathbf{r} + \theta\mathbf{W}$, де тривимірний вектор Паулі-Любанського рівний

$$W_i = \frac{1}{4}\varepsilon_{ijk}\sigma_j p_k = \frac{1}{4}\left[\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{p}\right]_i, \tag{2}$$

де σ_j – матриці Паулі [10]. Повна замкнена алгебра динамічних величин має вигляд

$$\begin{gathered}[X_i, X_j] = i\theta\varepsilon_{ijk}s_k + i\frac{\theta^2}{4\hbar}\varepsilon_{ijk}P_k(\mathbf{s}, \mathbf{P}), \quad [X_i, P_j] = i\hbar\delta_{ij}, \quad [P_i, P_j] = 0, \\ [s_i, s_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}s_k, \quad [X_i, s_j] = i\frac{\theta}{2}(P_j s_i - \delta_{ij}(\mathbf{s}, \mathbf{P})).\end{gathered} \tag{3}$$

Потенціал $-\gamma/r^2$ виникає в багатьох різних по своїй природі системах, наприклад: ефект Єфімова [11], частинки з магнітним моментом в полі соленоїда [12], матерія поблизу чорної діри [13–15], електрон в полі біполярної молекули [16–18], нейтральний атом в полі зарядженої нитки [19–21], тощо.

Крім того, в обернено квадратичному потенціалі частинка може впасти на притягальний центр [22]. В квантовому випадку, можна показати, що середнє $\langle r^2\rangle$ еволюціонує за законом

$$\langle r^2\rangle = \langle r^2\rangle_0 + \frac{\langle \mathbf{rp} + \mathbf{pr}\rangle}{m}t + \frac{2\langle H\rangle}{m}t^2, \tag{4}$$

і при $\langle H\rangle < 0$ за певний скінченний час t_f частинка впаде на центр $\langle r^2\rangle_{t_f} = 0$ [23].

В просторі з узагальненим принципом невизначеності і некомутативними координатами потенціал $-\gamma/R^2$ регуляризується і замість падіння виникають стаціонарні рівні [24]. Також зв'язані стани виникають і у просторі з мінімальною довжиною [25].

В даній роботі розглянемо вплив некомутативності (3) на поведінку частинки в обернено квадратичному потенціалі. Така некомутативність ефективно виникає в ряді квазікласичних моделей частинок зі спіном [26, 27], при квантуванні твісторів [28] та в теорії еніонів [29]. В [30] розглянуто рівняння Дірака в просторі зі спіновою некомутативністю (3), показано збереження модифікованого електричного струму та зняття виродження енергетичних рівнів в задачі Ландау. Цікаво також, що для досліджуваної алгебри існують точні розв'язки, так в [10] точно розв'язано гармонічний осцилятор.

2 Мінімальна довжина

В [10] показано, що алгебра (3) володіє мінімальною довжиною. Оператор квадрату радіус-вектора в такому просторі записується

$$R^2 = r^2 + \frac{\theta}{\hbar}\left(\mathbf{r}, [\mathbf{s} \times \mathbf{p}]\right) + \frac{\theta^2 p^2}{8} = r^2 - \frac{\theta}{\hbar}\left(\mathbf{s}, \mathbf{L}\right) + \frac{\theta^2 p^2}{8}. \tag{5}$$

Власні значення (5) рівні

$$\lambda^2_{nl} = \frac{\hbar|\theta|}{\sqrt{2}}(2n + l + 3/2) - \frac{\hbar}{2}\theta\left(j(j+1) - l(l+1) - 3/4\right), \tag{6}$$

де квантові числа пробігають значення $n, l = 0, 1, 2, ...;\ j = |l \pm 1/2|$. Відповідні власні стани мають вигляд

$$|\psi\rangle_{nl} = C\rho^l e^{-\rho^2/2} L_n^{l+1/2}(\rho^2)\, \Omega_{l,j,m}(\varphi, \theta), \tag{7}$$

де стала нормування $C = (-1)^n \left(\frac{m|\theta|}{\hbar}\right)^{3/4} \sqrt{\frac{2n!}{\Gamma(n+l+3/2)}}$, $\rho = r\sqrt{\frac{m|\theta|}{\hbar}}$, $L_n^{l+1/2}(\rho^2)$ – узагальнені поліноми Лагерра, а $\Omega_{l,j,m}(\varphi, \theta)$ – сферичні спінори [31].

Мінімальне власне значення реалізовується при $n = 0$, $l = 0$ і рівне

$$\lambda^2_{min} = \frac{3\hbar\theta}{2\sqrt{2}}. \tag{8}$$

Як добре відомо з квантової механіки, середнє від оператора не менше, ніж мінімальне квантове число, тому

$$\langle R^2 \rangle \geq \lambda^2_{min} \tag{9}$$

і величина λ_{min} справді має зміст мінімальної довжини.

3 Обмеження на енергію основного стану в потенціалі $-\gamma/R^2$

Гамільтоніан частинки в обернено квадратичному потенціалі в некомутативному просторі будується заміною комутативних координат в гамільтоніані комутативної задачі на некомутативні координати. Враховуючи (5) запишемо гамільтоніан у вигляді

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{\gamma}{R^2} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{\gamma}{r^2 - \theta\left(\mathbf{s}, \mathbf{L}\right)/\hbar + \theta^2 p^2/8}. \tag{10}$$

Покажемо, що гамільтоніан (10) володіє зв'язаними станами. Для цього достатньо показати, що енергія частинки є скінченною від'ємною величиною.

Обмеженість енергії знизу випливає з факту існування для досліджуваної алгебри мінімальної довжини (8). Справді, оскільки кінетична енергія $\mathbf{p}^2/2m$ додатно визначена, то очевидно, що енергія частинки з гамільтоніаном (10) обмежена знизу

$$\langle H \rangle \geq \left\langle -\frac{\gamma}{R^2} \right\rangle \geq -\frac{\gamma}{\lambda^2_{min}} = -\frac{2\sqrt{2}\gamma}{3\hbar\theta}. \tag{11}$$

Ця величина є нижньою оцінкою енергії основного стану.

Тепер покажемо, що енергія основного стану є від'ємною. Для цього скористаємося варіаційним методом. В якості пробної хвильової функції оберемо власні стани оператора R^2 (7). Ці хвильові функції є власними станами оператора потенціальної енергії. Крім того вони є власними станами оператора $\widehat{h} = r^2 + \theta^2 p^2/8$ з власними значеннями $h = \hbar\theta/\sqrt{2}(2n+l+3/2)$. Легко бачити, що $\widehat{h}$ фактично є гамільтоніаном гармонічного осцилятора, тому для розрахунку середнього від кінетичної енергії на $|\psi\rangle_{nl}$ зручно використати теорему про віріал, згідно з якою

$$\langle p^2\rangle_{nl} = \frac{8}{\theta^2}\frac{h}{2} = \frac{2\sqrt{2}\hbar}{\theta}\left(2n + l + \frac{3}{2}\right). \tag{12}$$

Таким чином середнє від гамільтоніана на $|\psi\rangle_{nl}$ рівне

$$\langle H\rangle_{nl} = \frac{\sqrt{2}\hbar}{m\theta}\left(2n + l + \frac{3}{2}\right) - \frac{\gamma}{\hbar\theta}\frac{2}{\sqrt{2}(2n + l + 3/2) - (j(j+1) - l(l+1) - 3/4)}. \tag{13}$$

Мінімізуючи (13) по n та l, отримуємо при $n = 0$, $l = 0$

$$\langle H\rangle_{min} = \langle H\rangle_{00} = \frac{3\hbar}{\sqrt{2}m\theta} - \frac{2\sqrt{2}\gamma}{3\hbar\theta}. \tag{14}$$

Величина $\langle H\rangle_{min}$ є верхньою варіаційною оцінкою енергії основного стану.

Таким чином, істинне значення енергії основного стану знаходиться між верхньою і нижньою оцінками

$$-\frac{2\sqrt{2}\gamma}{3\hbar\theta} \leq E_0 \leq \frac{3\hbar}{\sqrt{2}m\theta} - \frac{2\sqrt{2}\gamma}{3\hbar\theta}. \tag{15}$$

Тепер покажемо, що для достатньо великих констант зв'язку γ в потенціалі $-\gamma/R^2$ в просторі з алгеброю (3) виникають зв'язані стани. Справді, з умови

$$\frac{3\hbar}{\sqrt{2}m\theta} - \frac{2\sqrt{2}\gamma}{3\hbar\theta} < 0$$

отримуємо, що енергія основного стану від'ємна при

$$\gamma > \frac{9\hbar^2}{4m^2} \tag{16}$$

і на відміну від падіння на центр в комутативному просторі, в просторі зі спіновою некомутативністю частинка утворює зв'язані стани.

Висновки

В роботі розглянуто потенціал $-\gamma/R^2$ в просторі зі спіновою некомутативністю координат (3). Дана некомутативна алгебра є інваріантною відносно поворотів і в ній присутня мінімальна довжина $\lambda^2_{\rm min} = \frac{3\hbar\theta}{2\sqrt{2}}$. Показано, що наявність мінімальної довжини регуляризує потенціал і енергія основного стану обмежена знизу. Використовуючи варіаційний метод знайдено верхню оцінку енергії основного стану, яка для достатньо великих значень константи зв'язку γ є від'ємною. Таким чином доведено, що в обернено квадратичному потенціалі в просторі зі спіновою некомутативністю координат виникають зв'язані стани, на відміну від комутативного простору, де частинка падає на центр.

Подяки

Автор висловлює вдячність своєму науковому керівникові докторові фізико-математичних наук професорові Ткачуку В.М. за формулювання ідеї цього дослідження та обговорення результатів.

---

1. N. Seiberg and E. Witten, J. of High Energy Physics **1999**, 032 (1999).
2. A. Connes, M. Douglas, and A. Schwarz, J. of High Energy Physics **1998**, 003 (1998).
3. S. Doplicher, K. Fredenhagen, and J. E. Roberts, Comm. Math. Phys. **172**, 187 (1995).
4. H. S. Snyder, Phys. Rev. **71**, 38 (1947).
5. K. P. Gnatenko and V. M. Tkachuk, Phys. Lett. A **378**, 3509 (2014).
6. K. Gnatenko, Y. Krynytskyi, and V. Tkachuk, Mod. Phys. Lett. A **30**, 1550033 (2015).
7. H. Falomir, J. Gamboa, J. Lopez-Sarrion, F. Mendez, and P. A. G. Pisani, Phys. Lett. B **680** 384 (2009).
8. V. M. Vasyuta and V. M. Tkachuk, Phys. Lett. B **761**, 462 (2016).
9. M. Gomes, V. G. Kupriyanov, and A. J. da Silva, Phys. Rev. D **81**, 085024 (2010).
10. V. M. Vasyuta, J. Phys. Stud. **17**, 3001 (2013).
11. V. Efimov, Sov. J. Nucl. Phys. **29**, 546 (1979).
12. V. M. Tkachuk, Phys. Rev. A **60**, 4715 (1999).
13. T. R. Govindarajan, V. Suneeta, and S. Vaidya, Nucl. Phys. B **583**, 291 (2000).
14. D. Birmingham, K. S. Gupta, and S. Sen, Phys. Lett. B **505**, 191 (2001).
15. K. S. Gupta and S. Sen, Phys. Lett. B **526**, 121 (2002).
16. M. Bawin, Phys. Rev. A **70**, 022505 (2004).
17. A. Alhaidari, J. Phys. A **40**, 14843 (2007).
18. P. R. Giri, K. S. Gupta, S. Meljanac, and A. Samsarov, Phys. Lett. A **372**, 2967 (2008).
19. L. V. Hau, M. M. Burns, and J. A. Golovchenko, Phys. Rev. A **45**, 6468 (1992).
20. J. Denschlag and J. Schmiedmayer, EPL (Europhysics Letters) **38**, 405 (1997).
21. J. Denschlag, G. Umshaus, and J. Schmiedmayer, Phys. Rev. Lett. **81**, 737 (1998).
22. Л. Д. Ландау and Е. М. Лифшиц, Квантовая механика, Том 3 (Наука, 1989).
23. V. M. Vasyuta and V. M. Tkachuk, Eur. Phys. J. D **70**, 267 (2016).
24. D. Bouaziz and M. Bawin, Phys. Rev. A **76** , 032112 (2007).
25. T. V. Fityo, I. O. Vakarchuk, and V. M. Tkachuk, J. Phys. A **39**, 379 (2005).
26. W.G. Ramírez, A.A. Deriglazov, A.M. Pupasov-Maksimov, J. of High Energy Physics **2014**, 109 (2014).
27. W.G. Ramírez, A.A. Deriglazov, Phys. Rev. D **92**, 124017 (2015).
28. J. Lukierski, M. Woronowicz, 1311.7498v1 [hep-th], 2013.
29. S. Ghosh, Phys. Rev. D **51**, 5827 (1995).
30. A.F. Ferrari, M. Gomes, V.G. Kupriyanov, and C.A. Stechhahn, Phys. Lett. B, **718**, 1475 (2013).
31. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Квантовая электродинамика, Том 4 (Наука, 1989).

BOUNDARY STATES IN POTENTIAL $-\gamma/r^2$ IN SPACE WITH SPIN NONCOMMUTATIVITY OF COORDINATES

V.M Vasyuta[3]

Department for Theoretical Physics,
Ivan Franko National University of Lviv
Drahomanov St., 12, 79005 Lviv, Ukraine

We consider the influence of spin noncommutativity on an inverse square potential. We show that the ground state energy in the potential is restricted either from below and above. Also we prove that for a sufficiently big coupling constant γ the ground state energy is negative, namely boundary state appears in potential $-\gamma/r^2$ in space with spin noncommutativity of coordinates.

Key words: noncommutativity, inverse square potential

СВЯЗАННЫЕ СОСТОЯНИЯ В ПОТЕНЦИАЛЕ $-\gamma/r^2$ В ПРОСТРАНСТВЕ СО СПИНОВОЙ НЕКОМУТАТИВНОСТЬЮ КООРДИНАТ

В.М Васюта[3]

Кафедра теоретической физики,
Львовский национальный университет имени Ивана Франко
ул. Драгоманова, 12, 79005 Львов, Украина

Рассмотрено влияние спиновой некоммутативности на обратно квадратический потенциал. Показано, что энергия основного состояния частицы в таком потенциале ограничена как снизу, так и сверху. Доказано, что для достаточно больших констант связи γ энергия основного состояния является отрицательной, то есть в потенциале $-\gamma/r^2$ в пространстве со спиновой некомутативностью координат возникают связанные состояния.

Ключевые слова: некомутативность, обратно квадратический потенциал

Статтю отримано: 11.02.2017
Прийнято до друку: 27.06.2017