ISSN 1024-588X. Вісник Львівського університету. Серія фізична. 2018. Випуск 55. С. 13-23
Visnyk of the Lviv University. Series Physics. 2018. Issue 55. P. 13-23

УДК 530.145 DOI: https://doi.org/10.30970/vph.55.2018.13
PACS 03.65.-w, 02.40.Gh

Вплив імпульсної некомутативності на рух системи вільних частинок у сферично-симетричному некомутативному фазовому просторі

Х. П. Гнатенко

Львівський національний університет імені Івана Франка,
Кафедра теоретичної фізики
вул. Драгоманова, 12, 79005 Львів, Україна
e-mail: khrystyna.gnatenko@gmail.com

Досліджено рух системи вільних частинок у сферично-симетричному просторі з некомутативністю координат та некомутативністю імпульсів. Ми показали, що некомутативність імпульсів зумовлює залежність траєкторії вільної частинки від її маси. Як наслідок, вільні частинки у випадку, коли їх початкові швидкості однакові, не рухаються разом. Некомутативність імпульсів зумовлює проблему розлітання системи вільних частинок. Ми дійшли до висновку, що ця проблема може бути розв'язана на основі ідеї про залежність параметрів некомутативної алгебри від маси.

Ключові слова: некомутативний фазовий простір, сферична симетрія, вільна частинка

1 Вступ

Дослідження фізичних систем у просторі з деформованими комутаційними співвідношеннями для операторів координат та операторів імпульсів привернули велику увагу у зв'язку з розвитком теорії струн та квантової гравітації [1, 2]. Багато задач вивчали у просторі з канонічною некомутативністю координат та імпульсів

$$[X_i, X_j] = i\hbar\theta_{ij}, \tag{1}$$
$$[X_i, P_j] = i\hbar(\delta_{ij} + \gamma_{ij}), \tag{2}$$
$$[P_i, P_j] = i\hbar\eta_{ij}, \tag{3}$$

де θ_{ij}, η_{ij} – параметри координатної та імпульсної некомутативностей, які є елементами сталих антисиметричних матриць, $\gamma_{ij} = \sum_k \theta_{ik}\eta_{jk}/4$.

Важливо зазначити, що комутаційні співвідношення (1)-(3) дають змогу описати квантований простір (простір з мінімальною довжиною), водночас вони зумовлюють ряднизку фундаментальних проблем, серед яких проблема порушення сферичної симетрії. Для розв'язання цих проблем було запропоновано різні деформації комутаційних співвідношень для операторів координат та операторів імпульсів [3–6]. Зокрема, досліджувалися алгебри з координатно залежною некомутативністю [7–13], зі спіновою некомутативністю [14, 15]. Ці алгебри є сферично-симетричні, проте вони не еквівалентні алгебрі канонічного типу.

У праці [16] запропоновано некомутативну алгебру, яка є сферично-симетрична та еквівалентна до некомутативної алгебри канонічного типу. Для побудови цієї алгебри було розглянуто ідею узагальнення параметрів некомутативності. А саме, у статті [16] розглянуто тензори некомутативностей, визначені як

$$\theta_{ij} = \frac{c_\theta l_P^2}{\hbar} \sum_k \varepsilon_{ijk} \tilde{a}_k, \tag{4}$$

$$\eta_{ij} = \frac{c_\eta \hbar}{l_P^2} \sum_k \varepsilon_{ijk} \tilde{p}_k^b, \tag{5}$$

де c_θ, c_η – безрозмірні константи, l_P – довжина Планка, $\tilde{a}_i$, $\tilde{b}_i$ $\tilde{p}_i^a$, $\tilde{p}_i^b$ – додаткові координати та імпульси, які відповідають гармонічним осциляторам $H_{osc}^a = \hbar\omega_{osc}((\tilde{p}^a)^2 + \tilde{a}^2)/2$, $H_{osc}^b = \hbar\omega_{osc}((\tilde{p}^b)^2 + \tilde{b}^2)/2$. Оскільки вважають, що параметри некомутативності є порядку планківських масштабів, то припускається, що довжини осциляторів дорівнюють планківській довжині $\sqrt{\hbar}/\sqrt{m_{osc}\omega_{osc}} = l_P$. Частоти осциляторів дуже великі, як наслідок осцилятори, які є в основних станах, залишатимуться у них. Отже, побудовано таку сферично-симетричну некомутативну алгебру

$$[X_i, X_j] = ic_\theta l_P^2 \sum_k \varepsilon_{ijk} \tilde{a}_k, \tag{6}$$

$$[X_i, P_j] = i\hbar \left(\delta_{ij} + \frac{c_\theta c_\eta}{4} (\tilde{\mathbf{a}} \cdot \tilde{\mathbf{p}}^{\mathbf{b}}) \delta_{ij} - \frac{c_\theta c_\eta}{4} \tilde{a}_j \tilde{p}_i^b \right), \tag{7}$$

$$[P_i, P_j] = \frac{c_\eta \hbar^2}{l_P^2} \sum_k \varepsilon_{ijk} \tilde{p}_k^b. \tag{8}$$

Додаткові координати та імпульси $\tilde{a}_i$, $\tilde{b}_i$, $\tilde{p}_i^a$, $\tilde{p}_i^b$ задовольняють звичні комутаційні співвідношення $[\tilde{a}_i, \tilde{a}_j] = [\tilde{b}_i, \tilde{b}_j] = [\tilde{a}_i, \tilde{b}_j] = [\tilde{p}_i^a, \tilde{p}_j^a] = [\tilde{p}_i^b, \tilde{p}_j^b] = [\tilde{p}_i^a, \tilde{p}_j^b] = 0$, $[\tilde{a}_i, \tilde{p}_j^a] = [\tilde{b}_i, \tilde{p}_j^b] = i\delta_{ij}$. Також виконуються такі рівності $[\tilde{a}_i, \tilde{p}_j^b] = [\tilde{b}_i, \tilde{p}_j^a] = 0$, $[\tilde{a}_i, X_j] = [\tilde{a}_i, P_j] = [\tilde{p}_i^b, X_j] = [\tilde{p}_i^b, P_j] = 0$. $[\theta_{ij}, X_k] = [\theta_{ij}, P_k] = [\eta_{ij}, X_k] = [\eta_{ij}, P_k] = [\gamma_{ij}, X_k] = [\gamma_{ij}, P_k] = 0$. Отже, координати X_i, імпульси P_i та тензори некомутативностей θ_{ij}, η_{ij} задовольняють такі самі співвідношення, як у випадку алгебри канонічного типу (1)-(3). У цьому сенсі алгебри (1)-(3) та (6)-(8) є еквівалентними.

Вивчення систем багатьох частинок у просторі з деформованими комутаційними співвідношеннями для координат та імпульсів є важливим для розширення області дослідження на макроскопічні тіла та знаходження нових ефектів, зумовлених квантованістю простору на планківських масштабах у фізиці макроскопічних систем.

У цій статті ми досліджуємо особливості руху системи вільних частинок у сферично-симетричному некомутативному просторі (6)-(8). Ми доходимо висновку, що у такому просторі система вільних частинок розлітається навіть у випадку, коли початкові швидкості частинок є однаковими. Це зумовлено тим, що траєкторія вільної частинки у просторі з некомутативністю імпульсів залежить від її маси.

Стаття має таку структуру. У другому розділі розглянуто гамільтоніан системи вільних частинок у сферично-симетричному некомутативному фазовому просторі. Третій розділ присвячено дослідженню впливу некомутативності координат та некомутативності імпульсів на рух системи вільних частинок. Знаходимо вираз для тензора імпульсної некомутативності, який дає змогу відновити незалежність траєкторії вільної частинки від її маси. У четвертому розділі представлено висновки.

2 Гамільтоніан системи вільних частинок у некомутативному фазовому просторі зі збереженою сферичною симетрією

Розгляньмо N вільних частинок у сферично-симетричному некомутативному просторі канонічного типу (6)-(8). Оскільки тензори некомутативностей визначаються за допомогою додаткових координат та додаткових імпульсів для дослідження цієї системи маємо розглядати гамільтоніан з доданками, які відповідають гармонічним осциляторам

$$H = \sum_n \frac{(\mathbf{P}^{(n)})^2}{2m_n} + H^a_{osc} + H^b_{osc}. \tag{9}$$

Тут індекс n позначає частинки. У випадку системи багатьох частинок співвідношення некомутативної алгебри (6)-(8) можуть бути узагальнені як

$$[X_i^{(n)}, X_j^{(m)}] = i\hbar\delta_{mn}\theta_{ij}^{(n)}, \tag{10}$$

$$[X_i^{(n)}, P_j^{(m)}] = i\hbar\delta_{mn}\left(\delta_{ij} + \sum_k \frac{\theta_{ik}^{(n)}\eta_{jk}^{(m)}}{4}\right), \tag{11}$$

$$[P_i^{(n)}, P_j^{(m)}] = i\hbar\delta_{mn}\eta_{ij}^{(n)}, \tag{12}$$

де $\theta_{ij}^{(n)} = c_\theta^{(n)} l_P^2 \sum_k \varepsilon_{ijk}\tilde{a}_k/\hbar$, $\eta_{ij}^{(n)} = c_\eta^{(n)}\hbar\sum_k \varepsilon_{ijk}\tilde{p}_k^b/l_P^2$, – тензори некомутативності, які описують рух частинки з масою m_n.

Для дослідження руху системи частинок зручно перейти до представлення некомутативних координат та некомутативних імпульсів через координати та імпульси, які задовольняють звичні комутаційні співвідношення

$$X_i^{(n)} = x_i^{(n)} + \frac{1}{2}[\boldsymbol{\theta}^{(n)} \times \mathbf{p}^{(n)}]_i, \tag{13}$$

$$P_i^{(n)} = p_i^{(n)} - \frac{1}{2}[\mathbf{x}^{(n)} \times \boldsymbol{\eta}^{(n)}]_i, \tag{14}$$

$$\theta_i^{(n)} = \frac{1}{2}\sum_{jk}\varepsilon_{ijk}\theta_{jk}^{(n)}, \tag{15}$$

$$\eta_i^{(n)} = \frac{1}{2}\sum_{jk}\varepsilon_{ijk}\eta_{jk}^{(n)}. \tag{16}$$

Координати та імпульси $x_i^{(n)}$, $p_i^{(n)}$ задовольняють співвідношення

$$[x_i^{(n)}, x_j^{(m)}] = 0, \tag{17}$$

$$[x_i^{(n)}, p_j^{(m)}] = i\hbar\delta_{ij}\delta_{nm}, \tag{18}$$

$$[p_i^{(n)}, p_j^{(m)}] = 0. \tag{19}$$

Гамільтоніан (9) у представленні (13)-(14) має такий вигляд

$$H = \sum_n \left(\frac{(\mathbf{p}^{(n)})^2}{2m_n} - \frac{(\boldsymbol{\eta}^{(n)} \cdot \mathbf{L}^{(n)})}{2m_n} + \frac{[\boldsymbol{\eta}^{(n)} \times \mathbf{x}^{(n)}]^2}{8m_n} \right) + \\ + \hbar\omega_{osc}\left(\frac{(\tilde{p}^a)^2}{2} + \frac{\tilde{a}^2}{2}\right) + \hbar\omega_{osc}\left(\frac{(\tilde{p}^b)^2}{2} + \frac{\tilde{b}^2}{2}\right), \tag{20}$$

тут

$$\mathbf{L}^{(n)} = [\mathbf{x}^{(n)} \times \mathbf{p}^{(n)}]. \tag{21}$$

Зручно переписати (20) так

$$H = H_0 + \Delta H., \tag{22}$$

$$H_0 = \sum_n \left\langle \frac{(\mathbf{p}^{(n)})^2}{2m_n} - \frac{(\boldsymbol{\eta}^{(n)} \cdot \mathbf{L}^{(n)})}{2m_n} + \frac{[\boldsymbol{\eta}^{(n)} \times \mathbf{x}^{(n)}]^2}{8m_n} \right\rangle_{ab} + \\ + \hbar\omega_{osc}\left(\frac{(\tilde{p}^a)^2}{2} + \frac{\tilde{a}^2}{2}\right) + \hbar\omega_{osc}\left(\frac{(\tilde{p}^b)^2}{2} + \frac{\tilde{b}^2}{2}\right), \tag{23}$$

$$\Delta H = \sum_n \left(\frac{(\mathbf{p}^{(n)})^2}{2m_n} - \frac{(\boldsymbol{\eta}^{(n)} \cdot \mathbf{L}^{(n)})}{2m_n} + \frac{[\boldsymbol{\eta}^{(n)} \times \mathbf{x}^{(n)}]^2}{8m_n} \right) - \\ - \sum_n \left\langle \frac{(\mathbf{p}^{(n)})^2}{2m_n} - \frac{(\boldsymbol{\eta}^{(n)} \cdot \mathbf{L}^{(n)})}{2m_n} + \frac{[\boldsymbol{\eta}^{(n)} \times \mathbf{x}^{(n)}]^2}{8m_n} \right\rangle_{ab}, \tag{24}$$

де $\langle ... \rangle_{ab}$ позначає усереднення за хвильовими функціями гармонічних осциляторів H_{osc}^a, H_{osc}^b в основних станах

$$\langle ... \rangle_{ab} = \langle \psi_{0,0,0}^a \psi_{0,0,0}^b | ... | \psi_{0,0,0}^a \psi_{0,0,0}^b \rangle. \tag{25}$$

Взявши до уваги

$$\langle \psi_{0,0,0}^b | \tilde{p}_i^b | \psi_{0,0,0}^b \rangle = 0, \tag{26}$$

отримаємо, що після усереднення всі доданки з точністю до першого порядку за параметром імпульсної некомутативності зникають. Використавши позначення

$$\langle (\eta^{(n)})^2 \rangle = 3\langle (\eta_i^{(n)})^2 \rangle = \frac{3\hbar^2 (c_\eta^{(n)})^2}{l_P^4} \langle \psi_{0,0,0}^b | (\tilde{p}_i^b)^2 | \psi_{0,0,0}^b \rangle = \frac{3\hbar^2 (c_\eta^{(n)})^2}{2l_P^4}, \tag{27}$$

запишемо

$$H_0=\sum_n\left(\frac{(\mathbf{p}^{(n)})^2}{2m_n}+\frac{\langle(\eta^{(n)})^2\rangle(\mathbf{x}^{(n)})^2}{12m_n}\right)+ \tag{28}$$

$$+\hbar\omega_{osc}\left(\frac{(\tilde{p}^a)^2}{2}+\frac{\tilde{a}^2}{2}\right)+\hbar\omega_{osc}\left(\frac{(\tilde{p}^b)^2}{2}+\frac{\tilde{b}^2}{2}\right), \tag{29}$$

$$\Delta H=\sum_n\left(-\frac{(\boldsymbol{\eta}^{(n)}\cdot\mathbf{L}^{(n)})}{2m_n}+\frac{[\boldsymbol{\eta}^{(n)}\times\mathbf{x}^{(n)}]^2}{8m_n}-\frac{\langle(\eta^{(n)})^2\rangle(\mathbf{x}^{(n)})^2}{12m}\right). \tag{30}$$

У попередньому дослідженні [17] було показано, що до другого порядку теорії збурень поправки до спектра гамільтоніана H_0, зумовлені доданками ΔH, дорівнюють нулеві. Врахувавши вигляд ΔH (30), маємо, що з точністю до другого порядку за параметром імпульсної некомутативності для дослідження системи вільних частинок можемо розглядати гамільтоніан H_0 (29).

Важливо, що

$$\left[\sum_n\left(\frac{(\mathbf{p}^{(n)})^2}{2m_n}+\frac{\langle(\eta^{(n)})^2\rangle(\mathbf{x}^{(n)})^2}{12m_n}\right),H^a_{osc}+H^b_{osc}\right]=0. \tag{31}$$

Також звернімо увагу на те, що координати $x_i^{(n)}$ та імпульси $p_i^{(n)}$ задовольняють звичні комутаційні співвідношення та у класичній границі відповідно звичні дужки Пуассона

$$\{x_i^{(n)},x_j^{(m)}\}=0, \tag{32}$$

$$\{x_i^{(n)},p_j^{(m)}\}=\delta_{ij}\delta_{nm}, \tag{33}$$

$$\{p_i^{(n)},p_j^{(m)}\}=0. \tag{34}$$

Отже, гамільтоніан, який описує систему вільних частинок у сферично-симетричному некомутативному фазовому просторі

$$H_s=\sum_n\left(\frac{(\mathbf{p}^{(n)})^2}{2m_n}+\frac{\langle(\eta^{(n)})^2\rangle(\mathbf{x}^{(n)})^2}{12m_n}\right) \tag{35}$$

відповідає гамільтоніану системи N гармонічних осциляторів з частотами, які визначаються $\langle(\eta^{(n)})^2\rangle$ та масами частинок і мають такий вигляд:

$$\omega_n=\sqrt{\frac{\langle(\eta^{(n)})^2\rangle}{6m_n^2}}. \tag{36}$$

3 Особливості руху системи вільних частинок, зумовлені некомутативністю імпульсів

На підставі висновків, представлених у попередньому розділі, врахувавши те, що з точністю до другого порядку за параметрами імпульсної некомутативності рух системи вільних частинок описується гамільтоніаном (35), отримаємо що траєкторія частинки у сферично-симетричному некомутативному фазовому просторі має такий вигляд

$$x_i^{(n)}(t) = x_{0i}^{(n)} \cos\left(\sqrt{\frac{\langle(\eta^{(n)})^2\rangle}{6m_n^2}}t\right) + \upsilon_{0i}^{(n)}\sqrt{\frac{6m_n^2}{\langle(\eta^{(n)})^2\rangle}} \sin\left(\sqrt{\frac{\langle(\eta^{(n)})^2\rangle}{6m_n^2}}t\right), \tag{37}$$

де $x_{0i}^{(n)}$, $\upsilon_{0i}^{(n)}$ – початкова координата та швидкість. Важливо зазначити, що траєкторія вільної частинки (37) залежить від її маси, що зумовлено некомутативністю імпульсів. Як наслідок навіть у випадку, коли всі частинки системи мають однакову початкову швидкість $\upsilon_{0i}^{(n)} = \upsilon_{0i}$ маємо, що система вільних частинок розлітається. Траєкторії центра мас системи та відносного руху визначаються як

$$\tilde{x}_i(t) = \sum_n \mu_n x_{0i}^{(n)} \cos\left(\sqrt{\frac{\langle(\eta^{(n)})^2\rangle}{6m_n^2}}t\right) + \sum_n \mu_n \upsilon_{0i}^{(n)}\sqrt{\frac{6m_n^2}{\langle(\eta^{(n)})^2\rangle}} \sin\left(\sqrt{\frac{\langle(\eta^{(n)})^2\rangle}{6m_n^2}}t\right), \tag{38}$$

$$\Delta x_i^{(n)}(t) = x_{0i}^{(n)} \cos\left(\sqrt{\frac{\langle(\eta^{(n)})^2\rangle}{6m_n^2}}t\right) + \upsilon_{0i}^{(n)}\sqrt{\frac{6m_n^2}{\langle(\eta^{(n)})^2\rangle}} \sin\left(\sqrt{\frac{\langle(\eta^{(n)})^2\rangle}{6m_n^2}}t\right) -$$
$$- \sum_l \mu_l x_{0i}^{(l)} \cos\left(\sqrt{\frac{\langle(\eta^{(l)})^2\rangle}{6m_l^2}}t\right) + \sum_l \mu_l \upsilon_{0i}^{(l)}\sqrt{\frac{6m_l^2}{\langle(\eta^{(l)})^2\rangle}} \sin\left(\sqrt{\frac{\langle(\eta^{(l)})^2\rangle}{6m_l^2}}t\right), \tag{39}$$

де $\mu_n = m_n/\sum_l m_l$. Зазначимо, що у випадку, коли тензор імпульсної некомутативності, який описує рух частинки у некомутативному просторі, є пропорційний до її маси, а саме

$$\eta_{ij}^{(n)} = \frac{\tilde{\alpha} m_n \hbar}{l_P^2} \sum_k \varepsilon_{ijk} \tilde{p}_k^b. \tag{40}$$

($\tilde{\alpha}$ – константа, яка не залежить від маси частинки) можемо записати

$$\frac{\langle(\eta^{(n)})^2\rangle}{m_n^2} = \frac{3\hbar^2\tilde{\alpha}^2}{2l_P^4} = B, \tag{41}$$

де B – константа, яка є однаковою для частинок з різними масами. Взявши до уваги (41), маємо, що траєкторія вільної частинки у сферично-симетричному некомутативному фазовому просторі не залежить від її маси

$$x_i^{(n)}(t) = x_{0i}^{(n)} \cos\left(\sqrt{\frac{B}{6}}t\right) + \upsilon_{0i}^{(n)}\sqrt{\frac{6}{B}} \sin\left(\sqrt{\frac{B}{6}}t\right). \tag{42}$$

Відповідно коли початкові швидкості частинок однакові $\upsilon_{0i}^{(n)} = \upsilon_{0i}$, траєкторія центра мас (38) визначається як

$$\tilde{x}_i(t) = \tilde{x}_{0i} \cos\left(\sqrt{\frac{B}{6}}t\right) + \upsilon_{0i}\sqrt{\frac{6}{B}} \sin\left(\sqrt{\frac{B}{6}}t\right), \tag{43}$$

(тут $\tilde{x}_{0i} = \sum_n \mu_n x_{0i}^{(n)}$) та відносні координати частинок не змінюються з часом

$$\Delta x_i^{(n)}(t) = x_{0i}^{(n)} - \tilde{x}_{0i}. \tag{44}$$

Отже, у випадку, коли тензор імпульсної некомутативності пропорційний до маси, траєкторія вільної частинки не залежить від маси та система вільних частинок з однаковими початковими швидкостями не розлітається, як це є у просторі зі звичними комутаційними співвідношеннями для координат та імпульсів.

На завершення розділу варто зазначити, що ідея про залежність тензора імпульсної некомутативності від маси також є важливою для відновлення слабкого принципу еквівалентності у сферично-симетричному некомутативному фазовому просторі. А саме, у праці [18] було показано, що у випадку, коли тензор імпульсної некомутативності є пропорційний до маси, а тензор координатної некомутативності є обернено пропорційний до маси, частинки з різними масами у гравітаційному полі у сферично-симетричному некомутативному фазовому просторі рухаються по однакових траєкторіях. Також важливо зазначити, що ідея залежності параметрів деформованої алгебри від маси відкриває можливість отримати важливі результати у деформованому просторі з мінімальною довжиною [19, 20], у некомутативному просторі канонічного типу [21].

Висновки

Розглянуто некомутативну алгебру (6)-(8), яка є сферично-симетрична та еквівалентна до алгебри канонічного типу. Алгебра (6)-(8) побудована на основі ідеї залучення додаткових координат та імпульсів та узагальнення параметрів некомутативності.

Досліджено рух системи вільних частинок у сферично-симетричному некомутативному фазовому просторі. Ми показали, що з точністю до другого порядку за параметрами некомутативності вільна частинка описується гамільтоніаном, який відповідає гамільтоніану гармонічного осцилятора. Маса цього осцилятора дорівнює масі частинки, а частота осцилятора визначається величиною пераметра імпульсної некомутативності та масою частинки (36). Важливо зазначити, що у сферично-симетричному некомутативному фазовому просторі траєкторія вільної частинки залежить від її маси, що зумовлено некомутативністю імпульсів.

У випадку системи N вільних частинок з точністю до другого порядку за параметрами імпульсної некомутативності після усереднення за хвильовими функціями гармонічних осциляторів у основних станах ми отримали гамільтоніан, який відповідає гамільтоніану системи N осциляторів (35) з частотами (36). Ми показали, що імпульсна некомутативність зумовлює розлітання частинок системи. А саме, у випадку рівності швидкостей частинок у початковий момент часу в наступні моменти часу частинки не будуть рухатися разом, відносні координати частинок не є константами (39). Важливо зазначити, що ідея залежності тензорів некомутативності від маси дає змогу розв'язати цю проблему. А саме, ми показали, що у випадку, коли тензор імпульсної некомутативності, який відповідає за рух частинки у сферично-симетричному некомутативному просторі, є пропорційний до її маси, траєкторія вільної частинки не залежить від маси. Як наслідок вільні частинки з однаковими початковими швидкостями рухаються по однакових траєкторіях.

Подяки

Автор висловлює велику подяку професорові Ткачуку В. М. за цінні поради в отриманні результатів. Публікація містить результати досліджень, проведених за підтримки Міністерства освіти та науки України в рамках держбюджетної теми ФФ-63Нр (No. 0117U007190).

Список використаної літератури

1. Witten E. Reflection on the fate spacetime / E. Witten // Phys. Today. – 1996. – Vol. 49. – P. 24.
2. Doplicher S. Spacetime quantization induced by classical gravity / S. Doplicher, K. Fredenhagen, J.E. Roberts // Phys. Lett. B. – 1994. – Vol. 331, № 1. – P. 39-44. doi:10.1016/0370-2693(94)90940-7.
3. Moreno E.F. Spherically symmetric monopoles in noncommutative space / E.F. Moreno // Phys. Rev. D. – 2005. – Vol. 72, № 4. – P. 045001. doi:10.1103/PhysRevD.72.045001.
4. Gáliková V. Hydrogen atom in fuzzy spaces-Exact solution / V. Gáliková, P. Presnajder // J. Phys: Conf. Ser. – 2012. – Vol. 343. – P. 012096. doi:10.1088/1742-6596/343/1/012096.
5. Amorim R. Tensor operators in noncommutative quantum mechanics / R. Amorim // Phys. Rev. Lett. – 2008. – Vol. 101, № 8. – P. 081602. doi:10.1103/PhysRevLett.101.081602.
6. Gnatenko Kh.P. Hydrogen atom in rotationally invariant noncommutative space / Kh.P. Gnatenko, V.M. Tkachuk. // Phys. Lett. A. – 2014. – Vol. 378, № 47. – P. 3509. doi:10.1016/j.physleta.2014.10.021.
7. Daszkiewicz M. Towards quantum noncommutative-deformed field theory / M. Daszkiewicz, J. Lukierski, M. Woronowicz // Phys. Rev. D. – 2008. – Vol. 77, № 10. – P. 105007. doi:org/10.1103/PhysRevD.77.105007.
8. Daszkiewicz M. κ-deformed oscillators, the choice of star product and free κ-deformed quantum fields / M. Daszkiewicz, J. Lukierski, M. Woronowicz // J. Phys. A: Math. Theor. – 2009. – Vol. 42, № 35. – P. 355201. doi:10.1088/1751-8113/42/35/355201.
9. Borowiec A. Constraints on the quantum gravity scale from κ-Minkowski spacetime / A. Borowiec, Kumar S. Gupta, S. Meljanac, A. Pachol // EPL. – 2010. – Vol. 92, № 2. – P. 20006. doi:10.1209/0295-5075/92/20006.
10. Borowiec A. Twisting and-Poincare / A. Borowiec, J. Lukierski, A. Pachol // J. Phys. A: Math. Theor. – 2014. – Vol. 47, № 40. – P. 405203. doi:org/10.1088/1751-8113/47/40/405203.
11. Borowiec A. κ Deformations and Extended κ-Minkowski Spacetimes / A. Borowiec, A. Pachol // SIGMA. – 2014. – Vol. 10. – P. 107. doi:10.3842/SIGMA.2014.107.
12. Gomes M. Position-dependent noncommutativity in quantum mechanics / M. Gomes, V.G. Kupriyanov // Phys. Rev. D. – 2009. – Vol. 79, № 12. – P. 125011. doi:10.1103/PhysRevD.79.125011.
13. Kupriyanov V.G. A hydrogen atom on curved noncommutative space / V.G. Kupriyanov // J. Phys. A: Math. Theor. – 2013. – Vol. 46, № 24. – P. 245303. doi:10.1088/1751-8113/46/24/245303.
14. Falomir H. Magnetic-dipole spin effects in noncommutative quantum mechanics / H. Falomir, J. Gamboa, J. Lypez-Sarriyn [et al.] // Phys. Lett. B. – 2009. – Vol. 680, № 4. – P. 384. doi:10.1016/j.physletb.2009.09.007.
15. Ferrari A.F. Dynamics of a Dirac fermion in the presence of spin noncommutativity / A.F. Ferrari, M. Gomes, V.G. Kupriyanov, C.A. Stechhahn // Phys. Lett. B. – 2013. – Vol. 718, № 4-5. – P. 1475. doi:10.1016/j.physletb.2012.12.010.
16. Gnatenko Kh.P. Noncommutative phase space with rotational symmetry and hydrogen atom / Kh.P. Gnatenko, V.M. Tkachuk // Int. J. Mod. Phys. A. – 2017. – Vol. 32, № 26. – P. 1750161. doi:10.1142/S0217751X17501615.
17. Gnatenko Kh.P. Composite system in rotationally invariant noncommutative phase space / Kh.P. Gnatenko, V.M. Tkachuk // Int. J. Mod. Phys. A. – 2018. – Vol. 33, № 7. – P. 1850037. doi:10.1142/S0217751X18500379.
18. Gnatenko Kh.P. Rotationally invariant noncommutative phase space of canonical type with recovered weak equivalence principle / Kh.P. Gnatenko // EPL. – 2018. – Vol. 123, № 5. – P. 50002. doi:10.1209/0295-5075/123/50002.

19. Tkachuk V. M. Deformed Heisenberg algebra with minimal length and the equivalence principle / V. M. Tkachuk // Phys. Rev. A. – 2012. – Vol. 86, № 6. – P. 062112. doi:10.1103/PhysRevA.86.062112.
20. Tkachuk V. M. Galilean and Lorentz transformations in a space with Generalized Uncertainty Principle / V. M. Tkachuk // Found. Phys. – 2016. – Vol. 46, № 12. – P. 1666. doi:10.1007/s10701-016-0036-5.
21. Gnatenko Kh. P. Features of free particles system motion in noncommutative phase space and conservation of the total momentum / Kh. P. Gnatenko, H. P. Laba, V. M. Tkachuk // Mod. Phys. Lett. A. – 2018. – Vol. 33, № 23. – P. 1850131. doi:10.1142/S0217732318501316.

References

1. E. Witten, Phys. Today. **49**, 24 (1996).
2. S. Doplicher, K. Fredenhagen, J. E. Roberts, Phys. Lett. B. **331**(1), 39 (1994). doi:10.1016/0370-2693(94)90940-7.
3. E. F. Moreno, Phys. Rev. D. **72**(4), 045001 (2005). doi:10.1103/PhysRevD.72.045001.
4. V. Gáliková, P. Presnajder, J. Phys: Conf. Ser. **343**, 012096 (2012). doi:10.1088/1742-6596/343/1/012096.
5. R. Amorim, Phys. Rev. Lett. **101**(8), 081602 (2008). doi:10.1103/PhysRevLett.101.081602.
6. Kh. P. Gnatenko, V. M. Tkachuk, Phys. Lett. A. **378**(47), 3509 (2014). doi:10.1016/j.physleta.2014.10.021.
7. M. Daszkiewicz, J. Lukierski, M. Woronowicz, Phys. Rev. D. **77**(10), 105007 (2008). doi:10.1103/PhysRevD.77.105007.
8. M. Daszkiewicz, J. Lukierski, M. Woronowicz, J. Phys. A: Math. Theor. **42**(35), 355201 (2009). doi:10.1088/1751-8113/42/35/355201.
9. A. Borowiec, Kumar S. Gupta, S. Meljanac, A. Pachol, EPL. **92**(2), 20006 (2010). doi:10.1209/0295-5075/92/20006.
10. A. Borowiec, J. Lukierski, A. Pachol, J. Phys. A: Math. Theor. **47**(40), 405203 (2014). doi:10.1088/1751-8113/47/40/405203.
11. A. Borowiec, A. Pachol, SIGMA. **10**, 107 (2014). doi:10.3842/SIGMA.2014.107.
12. M. Gomes, V. G. Kupriyanov, Phys. Rev. D. **79**(12), 125011 (2009). doi:10.1103/PhysRevD.79.125011
13. V. G. Kupriyanov, J. Phys. A: Math. Theor. **46**(24), 245303 (2013). doi:10.1088/1751-8113/46/24/245303.
14. H. Falomir, J. Gamboa, J. Lypez-Sarriyn, F. Mendez, P. A. G. Pisani, Phys. Lett. B. **680**(4), 384 (2009). doi:10.1016/j.physletb.2009.09.007.
15. A. F. Ferrari, M. Gomes, V. G. Kupriyanov, C. A. Stechhahn, Phys. Lett. B. **718**(4-5), 1475 (2013). doi:10.1016/j.physletb.2012.12.010.
16. Kh. P. Gnatenko, V. M. Tkachuk, Int. J. Mod. Phys. A. **32**(26), 1750161 (2017). doi:10.1142/S0217751X17501615.
17. Kh. P. Gnatenko, V. M. Tkachuk, Int. J. Mod. Phys. A. **33**(7), 1850037 (2018). doi:10.1142/S0217751X18500379.
18. Kh. P. Gnatenko, EPL. **123**(5), 50002 (2018). doi:10.1209/0295-5075/123/50002.
19. V. M. Tkachuk, Phys. Rev. A. **86**(6), 062112 (2012). doi:10.1103/PhysRevA.86.062112
20. V. M. Tkachuk, Found. Phys. **46**(12), 1666 (2016). doi:10.1007/s10701-016-0036-5.
21. Kh. P. Gnatenko, H. P. Laba, V. M. Tkachuk, Mod. Phys. Lett. A **33**(23), 1850131 (2018). doi:10.1142/S0217732318501316.

Стаття надійшла до редакції 10.04.2019
прийнята до друку 08.05.2019

Influence of momentum noncommutativity on the motion of free particles system in rotationally-invariant noncommutative phase space

Kh. P. Gnatenko

Ivan Franko National University of Lviv,
Department for Theoretical Physics
12 Drahomanov St., Lviv, 79005, Ukraine
e-mail: khrystyna.gnatenko@gmail.com

Rotationally-invariant space with noncommutativity of coordinates and noncommutativity of momenta is considered. The noncommutative algebra is constructed involving additional coordinates and additional momenta which correspond to harmonic oscillators. The lengthes of the oscillators are considered to be equal to the Planck length. The frequencies of the oscillators are supposed to be very large. The algebra is invariant under rotations and is equivalent to noncommutative algebra of canonical type. In the rotationally-invariant noncommutative phase space we study the motion of a system of free particles. We find that the trajectory of free particle in rotationally-invariant noncommutative phase space depends on its mass. This dependence is caused by momentum noncommutativity. Up to the second order in the parameters of noncommutativity the trajectory of free particle corresponds to the trajectory of harmonic oscillator with corresponding mass and frequency determined by the mass of the particle and the parameter of momentum noncommutativity. Up to the second order in the parameters of noncommutativity the system of N particles in rotationally-invariant noncommutative phase space is described by Hamiltonian corresponding to the Hamiltonian of N harmonic oscillators. We find that because of momentum noncommutativity the system of free particles flies away even if the initial velocities of the particles are the same. We show that idea to relate tensor of momentum noncommutativity with mass opens possibility to solve the problem of dependence of free particle motion on its mass. We find that in the case when the tensor of momentum noncommutativity corresponding to a particle is proportional to its mass the trajectory of free particle in rotationally-invariant noncommutative phase space does not depend on the mass therefore a system of free particles does not fly away. It is important to mention that proportionality of the tensor of noncommutativity to mass is also important for preserving of the weak equivalence principle, for recovering of relations of noncommutative algebra for coordinates and momenta of the center-of-mass in rotationally-invariant noncommutative phase space.

Key words: noncommutative phase space, rotational symmetry, free particle

Влияние импульсной некоммутативности на движение системы свободных частиц в сферически-симметричном некоммутативном фазовом пространстве

Х. П. Гнатенко

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
Кафедра теоретической физики
ул. Драгоманова 12, 79005 Львов, Украина
e-mail: khrystyna.gnatenko@gmail.com

Исследуется движение системы свободных частиц в сферически-симметричном пространстве с некоммутативными координатами и некоммутативными импульсами. Мы показали, что некомутативниость импульсов влияет на движение свободной частицы и обуславливает его зависимость от массы. Как следствие, свободные частицы в случае, когда их скорости одинаковы, не двигаются вместе. Некомутативность импульсов приводит к проблеме разлета системы свободных частиц. Мы пришли к выводу, что эта проблема может быть решена на основе идеи о зависимости параметров некоммутативной алгебры от массы.

Ключевые слова: некоммутативное фазовое пространство, сферическая симметрия, свободная частица