УДК 534.1(075.8)

О. Є. Кунта
Національний університет “Львівська політехніка”,
кафедра механіки та автоматизації машинобудування

РОЗРАХУНОК ДИНАМІЧНОЇ СТІЙКОСТІ БАГАТОПРОГОНОВОЇ ВИСОТНОЇ КОНСТРУКЦІЇ

Розглянуто параметричні згинні коливання багатопрогонової висотної споруди, защемленої в основі і додатково закріпленої за допомогою відтяжок. Висотна конструкція навантажена осьовою силою, що має постійну складову і складову, що змінюється за періодичним законом. Розв’язки рівнянь руху механічної системи відшукуються у вигляді розкладу за власними формами коливань. Розрахунок динамічної стійкості зводиться до аналізу рівняння Матьє.

Ключові слова: параметричні згинні коливання, розрахунок динамічної стійкості, рівняння Матьє.

The parametric bending vibrations of high-rise constructions strangulated at the base and additionally fixed are considered. High-rise construction loaded of axial force that has a constant component and a component that varies according to the periodic law. The solutions of motion equations mechanical systems are found in a decomposition of their own forms of vibrations. Calculation of dynamic stability is reduced to Mathieu equation analysis.

Key words: parametric bending vibrations, calculation of dynamic stability, Mathieu equation.

Постановка проблеми та аналіз відомих досліджень і публікацій. У нинішній час в інженерній практиці широко використовують багатопрогонові висотні конструкції. До них належать бурові вежі, щогли будівельних підіймальних пристроїв, стріли підіймальних кранів і відвалоутворювачів, щогли атракціонів тощо. Важливим критерієм працездатності висотних конструкцій є їхня стійкість в умовах дії і статичних, і динамічних навантажень. Цій науковій проблемі приділяється велика увага, а результати досліджень статичної та динамічної стійкості пружних систем широко висвітлюються у літературі [1–13].

Класичний підхід до розрахунку стійкості стержнів, пластин і оболонок полягає у визначенні критичних навантажень, що призводять до втрати статичної форми рівноваги [4, 7]. Аналогії, що мають місце під час розв’язання задач на стійкість і на вільні коливання, дають можливість застосовувати динамічні критерії статичної стійкості і створювати єдині алгоритми модального аналізу і стійкості механічних систем [8, 10]. У застосуванні до стрижнів, що перебувають під дією змінного осьового навантаження задача динамічної стійкості зводиться до вивчення параметричних коливань [1, 4, 9, 11]. Для систем із зосередженими або з розподіленими параметрами застосовують енергетичні критерії стійкості [5, 8]. Детальний аналіз динамічної стійкості стрижнів і стрижневих систем з урахуванням особливостей їх навантаження проводиться із застосуванням теорії стійкості Ляпунова [13]. Приділяється увага взаємодії поздовжніх хвильових процесів і поперечних коливань стрижнів [6]. Узагальнена технічна теорія динамічної стійкості механічних систем достатньо повно викладена у книгах [1, 3, 4, 8]. Разом з тим методи і результати досліджень динамічної стійкості багатопрогонових висотних конструкцій у літературі висвітлені недостатньо. У загальному випадку закріплення стрижня його власні форми коливань відрізняються від форм втрати статичної стійкості, що ускладнює аналіз параметричних коливань конструкції. Для подання цієї проблеми у праці [12] рекомендується форми втрати статичної і динамічної стійкості подавати у вигляді розкладу за власними формами коливань механічної системи, що дає змогу звести дослідження параметричних коливань стрижня до налізу розв’язків відомого рівняння Матьє. На основі цього підходу у праці розробляється математична модель і алгоритм розрахунку динамічної стійкості багатопрогонової висотної конструкції.

Мета роботи – розроблення математичної моделі для проведення розрахунку динамічної стійкості багатопрогонової висотної конструкції, защемленої в основі і додатково закріпленої за допомогою відтяжок в умовах навантаження осьовою силою, що має постійну складову і складову, що змінюється за періодичним законом.

Виклад основного матеріалу. Розглянемо параметричні згинні коливання багатопрогонової висотної конструкції, зображеної на рис. 1, у її половинній площині. Прийняті позначення: l_1, l_2, …, l_n – довжини прогонів; c_i, ν_i (i=1, 2, …, n+1) – коефіцієнти жорсткості і коефіцієнти в’язкого тертя пружних опор у горизонтальному напрямі; P – осьове навантаження; x_i (i=1, 2, …, n) – поздовжні координати перерізів прогонів з початками на нижніх кінцях прогонів; w_i (i=1, 2, …, n) – прогини відповідних прогонів.

Осьове навантаження конструкції задаємо у вигляді

$$P = P_0 + P_t \cdot T(t)\,, \tag{1}$$

де P_0 – статична складова навантаження; P_t – амплітуда динамічної складової навантаження; $T(t)$ – періодична функція часу.

Рівняння параметричних коливань ділянок споруди записуємо у вигляді

$$EI_i \frac{\partial^4 w_i}{\partial x_i^4} + \left[P_0 + P_t T(t)\right]\frac{\partial^2 w_i}{\partial x_i^2} + A_i\rho\frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} = 0$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n), \tag{2}$$

де E і ρ – модуль пружності першого роду і густина матеріалу конструкції; A_i, I_i – площі і осьові моменти інерції поперечних перерізів прогонів.

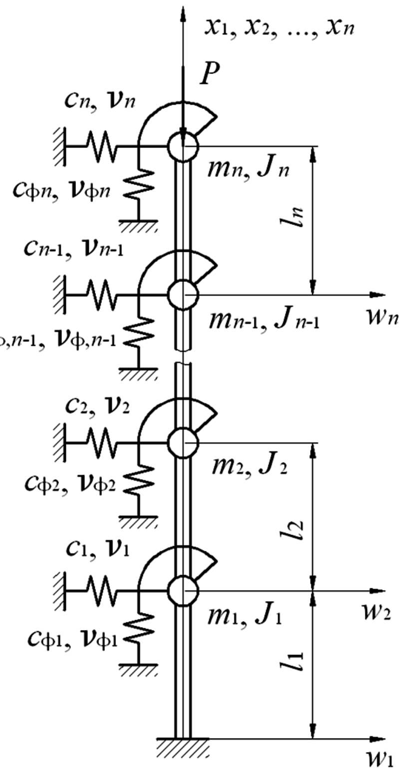
Розв’язки рівнянь з частинними похідними (2) відшукуємо у вигляді

$$w_i(x_i,t) = \sum_{j=1}^{\infty} W_{ij}(x_i)\tau_j(t)\,, \tag{3}$$

де $W_{ij}(x_i)$ – власні форми коливань прогонів споруди (j – порядковий номер власної форми), $\tau_j(t)$ – періодична функція часу.

Для визначення власних частот і форм висотної конструкції запишемо рівняння її вільних коливань у вигляді

$$EI_i \frac{\partial^4 w_i}{\partial x_i^4} + A_i\rho\frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} = 0 \;\; (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{4}$$



Розрахункова схема багатопрогонової висотної конструкції

Розв’язки рівнянь руху повинні задовольняти умови:

$$w_1(0,t) = 0\,,\;\; \left.\frac{\partial w_1(x_1,t)}{\partial x_1}\right|_{x_1=0} = 0\,; \tag{5}$$

$$w_{i+1}(0,t) = w_i(l_i,t),\;\; \left.\frac{\partial w_{i+1}(x_{i+1},t)}{\partial x_{i+1}}\right|_{x_{i+1}=0} = \left.\frac{\partial w_i(x_i,t)}{\partial x_i}\right|_{x_i=l_i}\,,$$

$$EI_{i+1}\frac{\partial^2 w_{i+1}(x_{i+1},t)}{\partial x_{i+1}^2}\bigg|_{x_{i+1}=0}=EI_i\frac{\partial^2 w_i(x_i,t)}{\partial x_i^2}\bigg|_{x_i=l_i}+J_i\frac{\partial^3 w_i(x_i,t)}{\partial x_i\,\partial t^2}\bigg|_{x_i=l_i}+c_{\varphi i}\frac{\partial w_i(x_i,t)}{\partial x_i}\bigg|_{x_i=l_i},$$

$$EI_{i+1}\frac{\partial^3 w(x_{i+1},t)}{\partial x_{i+1}^3}\bigg|_{x_{i+1}=0}=EI_i\frac{\partial^3 w(x_i,t)}{\partial x_i^3}\bigg|_{x_i=l_i}-m_i\frac{\partial^2 w_i(x_i,t)}{\partial t^2}\bigg|_{x_i=l_i}-c_i w_i(l_i,t),\ (i=1,\,2,\,\ldots,\,n\text{-}1); \tag{6}$$

$$EI_n\frac{\partial^2 w_n(x_n,t)}{\partial x_n^2}+J_n\frac{\partial^3 w_n(x_n,t)}{\partial x_n\partial t^2}\bigg|_{x_n=l_n}+c_{\varphi n}\frac{\partial w_n(x_n,t)}{\partial x_n}\bigg|_{x_n=l_n}=0,$$

$$EI_n\frac{\partial^3 w(x_n,t)}{\partial x_n^3}\bigg|_{x_n=l_n}-m_n\frac{\partial^2 w_n(x_n,t)}{\partial t^2}\bigg|_{x_n=l_n}-c_n w_n(l_n,t)=0. \tag{7}$$

Відшукуємо розв’язки рівнянь (4) у вигляді

$$w_i(x_i,t)=W_i(x_i)\cos\omega t\ \ (i=1,\,2,\,\ldots,\,n), \tag{8}$$

де ω – власна частота.

Підставляючи вираз (8) до рівності (4) і розділяючи змінні, одержуємо рівняння амплітудних функцій

$$\frac{d^4W_i(x_i)}{dx_i^4}-\lambda_i^4W_i(x_i)=0\ \ (i=1,\,2,\,\ldots,\,n\,), \tag{9}$$

де

$$\lambda_i^4=\frac{A_i\rho\omega^2}{EI_i}.$$

Відповідно до методу початкових параметрів, розв’язок диференціального рівняння (9) подаємо у вигляді

$$Y_i(x_i)=S_i(x_i)Y_i(0)\ , \tag{10}$$

де

$$Y_i(x_i)=\mathrm{col}[W_i(x_i),W_i'(x_i),W_i''(x_i),W_i'''(x_i)]; \tag{11}$$

$$S_i(x_i)=\begin{pmatrix}\psi_{1i}(x_i) & \psi_{2i}(x_i) & \psi_{3i}(x_i) & \psi_{ni}(x_i)\\ \psi_{1i}'(x_i) & \psi_{2i}'(x_i) & \psi_{3i}'(x_i) & \psi_{ni}'(x_i)\\ \psi_{1i}''(x_i) & \psi_{2i}''(x_i) & \psi_{3i}''(x_i) & \psi_{ni}''(x_i)\\ \psi_{1i}'''(x_i) & \psi_{2i}'''(x_i) & \psi_{3i}'''(x_i) & \psi_{ni}'''(x_i)\end{pmatrix}. \tag{12}$$

Тут ψ_{1i}, ψ_{2i}, ψ_{3i}, ψ_{ni} – фундаментальна система інтегралів рівняння (9), що визначаються за формулами

$$\psi_{1i}(x_i)=\frac{1}{2}(\cos\lambda_i x_i+\mathrm{ch}\,\lambda_i x_i);\ \psi_{2i}(x_i)=\frac{1}{2\lambda_i}(\sin\lambda_i x_i+\mathrm{sh}\,\lambda_i x_i);$$

$$\psi_{3i}(x_i)=\frac{1}{2\lambda_i^2}(-\cos\lambda_i x_i+\mathrm{ch}\,\lambda_i x_i);\ \psi_{ni}(x_i)=\frac{1}{2\lambda_i^3}(-\sin\lambda_i x_i+\mathrm{sh}\,\lambda_i x_i). \tag{13}$$

З урахуванням співвідношень (8) крайові умови (5)–(7) перетворюємо до вигляду

$$W_1(0)=0,\ W_1'(0)=0; \tag{14}$$

$$W_{i+1}(0)=W_i(l_i),\ W_{i+1}'(0)=W_i'(l_i),\ EI_{i+1}W_{i+1}''(0)=EI_iW_i''(l_i)-J_i\omega^2W_i'(l_i)+c_{\varphi i}W_i'(l_i),$$

$$EI_{i+1}W_{i+1}'''(0)=EI_iW_i'''(l_i)+m_i\omega^2W_i(l_i)-c_iw_i(l_i)\ \ \ i=1,\,2,\,\ldots,\,n\text{-}1); \qquad ((15)$$

$$EI_n W_n''(l_n) - J_n \omega^2 W_n'(l_n) + c_n W_n'(l_n) = 0\,,$$

$$EI_n W_n'''(l_n) + m_n \omega^2 W_n(l_n) - c_n W_n(l_n) = 0\,. \tag{16}$$

З урахуванням позначення (11) подаємо крайові умови (14)–(16) у матричному вигляді

$$Y_1(0) = \mathrm{col}\left(0, 0, W_1''(0), W_1'''(0)\right); \tag{17}$$

$$Y_{i+1}(0) = R_i Y_i(l_i) \;\; (i = 1,\, 2,\, \ldots,\, n\text{-}1); \tag{18}$$

$$Y_{n+1} = R_n Y_n(l_n)\,, \tag{19}$$

де

$$R_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\left(c_{\varphi i} - J_i \omega^2\right)}{EI_{i+1}} & \dfrac{I_i}{I_{i+1}} & 0 \\ \dfrac{\left(m_i \omega^2 - c_i\right)}{EI_{i+1}} & 0 & 0 & \dfrac{I_i}{I_{i+1}} \end{pmatrix};\; R_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(c_{\varphi n} - J_n \omega^2\right) & EI_n & 0 \\ \left(m_n \omega^2 - c_n\right) & 0 & 0 & EI_n \end{pmatrix};$$

$$Y_{n+1} = \mathrm{col}\left(W_n(l_n), W_n'(l_n), 0, 0\right).$$

З урахуванням співвідношень (10), (17)–(19) записуємо матричну рівність

$$Y_{n+1} = \prod_{i=n}^{1} R_i S_i(l_i) \cdot Y_1(0)\,. \tag{20}$$

Реакції третього і четвертого елементів матриці-колонки Y_{n+1} на одиничні значення матриці-колонки $Y_1(0)$ позначаємо як r_{33}, r_{34}, r_{43}, r_{44}. Оскільки третій і четвертий елементи матриці-колонки Y_{n+1}, згідно з крайовими умовами, повинні дорівнювати нулю, одержуємо однорідну систему рівнянь

$$r_{33} W_1''(0) + r_{34} W_1'''(0) = 0\,;\;\; r_{43} W_1''(0) + r_{44} W_1'''(0) = 0\,. \tag{21}$$

Для знаходження власних частот висотної споруди застосовуємо умову рівності нулю визначника системи рівнянь (21):

$$\begin{vmatrix} r_{33} & r_{34} \\ r_{43} & r_{44} \end{vmatrix} = 0\,. \tag{22}$$

Після знаходження заданого числа коренів частотного рівняння (22) визначаємо з точністю до сталого множника ненульові елементи матриці-колонки $Y_1(0)$. Матриці-колонки початкових параметрів решти ділянок обчислюємо за формулою

$$Y_i(0) = \prod_{j=i}^{1} R_j S_j(l_i) Y_1(0),\; (i = 2,\, 3,\, \ldots,\, n). \tag{23}$$

що випливають із залежностей (10), (18).

За відомими початковими параметрами розраховуємо власні форми механічної системи, застосовуючи залежності (10) – (13).

Диференціальні рівняння для визначення статичної критичної сили P_k висотної конструкції запишемо у вигляді

$$\frac{d^4 W_i(x_i)}{dx_i^4} + k_i^2 \frac{d^2 W_i(x_i)}{dx_i^2} = 0 \;\; (i = 1,\, 2,\, \ldots,\, n\,), \tag{26}$$

де

$$k_i^2 = \frac{P_k}{EI_i}\,.$$

Розвязок диференціального рівняння (26), згідно з методом початкових параметрів, можна подати у формі (10), однак, квадратна матриця $S_i(x_i)$ у цьому випадку набуває вигляду

$$S_i(x_i)=\begin{pmatrix} 1 & x_i & \frac{1}{k_i^2}(1-\cos k_i x_i) & \frac{1}{k_i^3}(k_i x_i-\sin k_i x_i) \\ 0 & 1 & \frac{1}{k_i}\sin k_i x_i & \frac{1}{k_i^2}(1-\cos k_i x_i) \\ 0 & 0 & \cos k_i x_i & \frac{1}{k_i}\sin k_i x_i \\ 0 & 0 & -k_i \sin k_i x_i & \cos k_i x_i \end{pmatrix}. \qquad (27)$$

Розв'язки рівнянь (26) повинні задовольняти крайові умови, які можна одержати з рівностей (14)–(16) вилученням членів, що містять квадрат циклічної частоти. Тоді алгоритм обчислення значень критичної сили на основі застосування залежностей (17)–(19), (27) практично збігається з алгоритмом розрахунку власних частот.

Оскільки амплітудні функції, що описують форми вільних і параметричних коливань, а також форми прогинів конструкції в процесі втрати статичної стійкості є близькими між собою, їх ототожнюють [12]. Це дає можливість виразити другу і четверту похідні прогину конструкції через саму функцію прогину з диференціальних залежностей (9) і (26):

$$\frac{d^2W_i(x_i)}{dx_i^2}=-\frac{A_i\rho\omega^2}{P_k}W_i(x_i);\ \frac{d^4W_i(x_i)}{dx_i^4}=\frac{A_i\rho\omega^2}{EI_i}W_i(x_i)\ \ (i=1,2,\ldots,n). \qquad (28)$$

Для окремо взятої форми параметричних коливань конструкції рівняння (2) з урахуванням залежності (3) зводимо до вигляду

$$EI_i\frac{d^4W_i(x_i)}{dx_i^4}\tau+[P_0+P_tT(t)]\frac{d^2W_i(x_i)}{dx_i^2}\tau+A_i\rho W_i(x_i)\ddot{\tau}=0\ \ (i=1,2,\ldots,n). \qquad (29)$$

Підставляючи у рівняння (29) вирази другої і четвертої похідних амплітудних функцій, одержуємо

$$\ddot{\tau}+\omega^2\left[1-\frac{P_0+P_tT(t)}{P_k}\right]\tau=0. \qquad (30)$$

Для стержня з довільним закріпленням кінців, стиснутого осьовою силою P_0, можна записати диференціальне рівняння (30) у вигляді

$$\ddot{\tau}+\lambda^2\left[1-\frac{P_t}{P_k-P_0}T(t)\right]\tau=0. \qquad (31)$$

де

$$\lambda=\omega\sqrt{1-\frac{P_0}{P_k}}.$$

Перетворимо рівняння (31) до вигляду

$$\ddot{\tau}+\lambda^2[1-2\mu T(t)]\tau=0, \qquad (32)$$

де

$$\mu=\frac{1}{2}\frac{P_t}{P_k-P_0}.$$

Диференціальне рівняння (32) є рівнянням Хілла, яке у випадку гармонічного збудження коливань

$$T(t) = \cos\omega t$$

перетворюється у рівняння Матьє

$$\ddot{\tau} + \lambda^2(1 - 2\mu\cos\omega t)\tau = 0\,. \tag{33}$$

Істотною особливістю цього рівняння є те, що за певних співвідношень між його коефіцієнтами розв'язок рівняння зростає до безмежності. Такі розв'язки утворюють певні ділянки на площині коефіцієнтів, які відповідають динамічній нестійкості.

Висновки. Для випадку, коли власні форми згинних коливань багатопрогонової висотної конструкції збігаються з формами втрати статичної стійкості та з формами параметричних коливань механічної системи, або коли вказані форми є близькими між собою, задача розрахунку динамічної стійкості зведена до аналізу розв'язків рівняння Матьє, що дає можливість в простий спосіб визначити області динамічної нестійкості висотних споруд. За допомогою цього методу можна виконувати розрахунки динамічної стійкості багатопрогонових висотних конструкцій широкого класу, що посприяє підвищенню ефективності їх проектування і експлуатації.

1. Болотин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем. – М.: Госуд. изд-во технико-теоретической литературы, 1956. – 600 с. 2. Василенко М. В. Теорія коливань і стійкості руху: підручник. – К.: Вища школа, 2004. – 525 с. 3. Вибрации в технике: Справочник. В 6-ти т. / ред. сонет: В. Н. Челомей (пред.). – М.: Машиностроение, 1979 – Т. 1. Колебания линейных механических систем / Под ред. В. В. Болотина. – 1978. – 352 с. 4. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. – М.: Наука, 1967. – 984 с. 5. Клаф Р., Пензиен Дж. Динамика сооружений: Пер. с англ. – М.: Стройиздат, 1979. – 320 с. 6. Морозов Н. Ф., Товстик П. Е., Товстик Т. П. Статика и динамика стержня при продольном нагружении // Вестник ЮУрГУ. Серия "Математическое моделирование и программирование". – 2014. – Том 7. – №1. – С. 76–89. 7. Тимошенко С. П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек. – М.: Наука, 1971. – 807 с. 8. Drgania i statecznosc ukladow smuklych. Praca zbiorowa pod kierunkiem naukowym i redakcja Lecha Tomskiego. – Warszawa: Wydawnictwa Naukowo–Techniczne, 2004. – 344 s. 9. Fung R.–F., Huang J.–S. and Chen W.–H. Dynamic stability of a viscoelastic beam subjected to harmonic and parametric excitation simultaneously // Journal of Sound and Vibration. – 198(1). – 1996. P. 1–16. 10. Luis G. Arboleda–Monsavle, David G. Zapato–Medina, J. Dario Aristzabol–Ochota. Stability and natural frequencies of a weakend Timoshenko beam–column with generalized and conditions under constant axial load // Journal of Sound and Vibration. – 307. – 2007. – P. 89–112. 11. Peter A. Djondjorov, Vassil M. Vassilev. On the dynamic stability of a contilever under tangential follower force according to Timoshenko beam theory // Journal of Sound and Vibration. – 311. – 2008. – P. 1431–1437. 12. P arszewski Z. Drgania i dynamika maszyn. – Warszawa: Wydavnictwa Naukowo-Techniecne, 1982. – 421 s. 13. Ratko Pavlovic, Predrag Kozic, Predrag Rajkovic, Ivan Parlovic. Dynamic stability of a thin–wolled beam subjected to axial loads and end moments // Journal of Sound and Vibration. – 301. – 2007. – P. 690–700.