ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
"Фізико-математичні науки"
Вип.768 № 768, (2013) с. 5–11

JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY
"LVIVSKA POLITECHNIKA"
"Physical & mathematical sciences"
Vol.768 No 768, (2013) 5–11

ОДНОЗНАЧНА РОЗВ'ЯЗНІСТЬ ЗАДАЧІ З ІНТЕГРАЛЬНИМИ УМОВАМИ ДЛЯ РІВНЯННЯ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ЗА ЧАСОМ

Каленюк П. І.[a, b], Ільків В. С.[a], Нитребич З. М.[a], Когут І. В.[a]

[a] *Національний університет "Львівська політехніка"*
вул. С. Бандери, 12, 79013, Львів, Україна
[b] *Жешувський університет*
вул. Рейтана, 16-А, 35-959, Жешув, Польща

(Отримано 30 вересня 2013 р.)

Знайдено клас однозначної розв'язності задачі з неоднорідними інтегральними часовими умовами для однорідного рівняння із частинними похідними другого порядку за часом, яке узагальнює бікалоричне рівняння. У цьому класі функцій квазіполіномного вигляду розв'язок задачі подано за допомогою диференціально-символьного методу як дію диференціальних виразів, символами яких є праві частини інтегральних умов, на деякі функції параметрів.

Ключові слова: рівняння із частинними похідними нескінченного порядку, інтегральні умови, бікалоричне рівняння, диференціально-символьний метод.

2000 MSC: 60J10

УДК: 517.95

Вступ

Задачі з інтегральними умовами для диференціальних рівнянь із частинними похідними в останні роки знаходять широке застосування у важливих практичних дослідженнях. Інтегральні умови використовують, зокрема, у моделях поширення тепла та вологопереносу, у демографічних моделях та задачах математичної біології, в обернених задачах теорії теплопровідності, задачах оптимального контролю в техніці тощо [6, 10–13, 16].

Задачі з інтегральними умовами є умовно коректними. Встановленню умов коректної розв'язності таких задач для диференціальних рівнянь із частинними похідними присвячено чимало праць вчених (див., наприклад, [1, 2, 5, 7–9, 15] та бібліографію в них).

Ця стаття є продовженням досліджень [4, 14] і присвячена питанню однозначної розв'язності задачі з неоднорідними інтегральними часовими умовами для однорідного диференціального рівняння із частинними похідними другого порядку за часом та в загальному випадку нескінченного порядку за просторовою змінною у смузі. Розв'язки задачі за допомогою диференціально-символьного методу [3] у класі квазіполіномів будуються в явному вигляді як результат дії деяких диференціальних виразів на мероморфні функції параметра з подальшим накладанням нульового значення цього параметра.

I. Формулювання задачі

У смузі $S_h = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 \colon \ t \in (0,h),\, x \in \mathbb{R}\}$ шириною $h > 0$ вивчаємо задачу

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - a\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right]^2 U(t,x) = 0, \tag{1}$$

$$\int\limits_0^h U(t,x)\,dt = \varphi_1(x), \qquad \int\limits_0^h t\,U(t,x)\,dt = \varphi_2(x), \tag{2}$$

де $a\left(\partial/\partial x\right)$ – диференціальний вираз, символ $a(\nu)$ якого є довільна ціла функція, що не є сталою.

За зразком рівняння (1) заміною $\partial/\partial t$ на d/dt і $\partial/\partial x$ на ν запишемо звичайне диференціальне рівняння

$$\left[\frac{d}{dt} - a(\nu)\right]^2 T = 0. \tag{3}$$

Загальний розв'язок рівняння (3) має вигляд

$$T(t,\nu) = C_1(\nu)\,e^{a(\nu)t} + C_2(\nu)\,t\,e^{a(\nu)t}, \tag{4}$$

де $C_1(\nu)$ і $C_2(\nu)$ – довільні функції параметра ν.

Знайдемо розв'язки $\widehat{T}_1(t,\nu)$, $\widehat{T}_2(t,\nu)$ рівняння (3), які задовольняють умови

$$\int\limits_0^h \widehat{T}_1(t,\nu)\,dt = 1, \qquad \int\limits_0^h t\,\widehat{T}_1(t,\nu)\,dt = 0, \tag{5}$$

$$\int\limits_0^h \widehat{T}_2(t,\nu)\,dt = 0, \qquad \int\limits_0^h t\,\widehat{T}_2(t,\nu)\,dt = 1. \tag{6}$$

Шукаємо $\widehat{T}_1(t,\nu)$ у вигляді (4), де $C_1(\nu)$ і $C_2(\nu)$ – невідомі функції параметра ν. Задовольняючи умови (5), одержуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} C_1(\nu)I_0(\nu)+C_2(\nu)I_1(\nu)=1, \\ C_1(\nu)I_1(\nu)+C_2(\nu)I_2(\nu)=0, \end{cases} \tag{7}$$

де

$$I_0(\nu)=\int\limits_0^h e^{a(\nu)t}\,dt=\frac{e^{a(\nu)\,h}-1}{a(\nu)},$$

$$I_1(\nu)=\int\limits_0^h t\,e^{a(\nu)t}\,dt=\frac{ha(\nu)I_0(\nu)+h-I_0(\nu)}{a(\nu)},$$

$$I_2(\nu)=\int\limits_0^h t^2e^{a(\nu)t}dt=$$

$$=\frac{a^2(\nu)h^2I_0(\nu)+a(\nu)h^2-2ha(\nu)I_0(\nu)-2h+2I_0(\nu)}{a(\nu)}.$$

Зауважимо, якщо $a(\nu_0)=0$, то $I_0(\nu_0)=h$, $I_1(\nu_0)=h^2/2$, $I_2(\nu)=h^3/3$.

Головний визначник системи (7) має вигляд

$$\Delta(\nu)=\begin{vmatrix} I_0(\nu) & I_1(\nu) \\ I_1(\nu) & I_2(\nu) \end{vmatrix}=I_0(\nu)I_2(\nu)-I_1^2(\nu)=$$

$$=\frac{I_0^2(\nu)-a(\nu)h^2I_0(\nu)-h^2}{a^2(\nu)}.$$

Враховуючи позначення для $I_0(\nu)$, знаходимо

$$\Delta(\nu)=\frac{\left(e^{a(\nu)h}-1\right)^2-h^2a^2(\nu)\,e^{a(\nu)h}}{a^4(\nu)}, \tag{8}$$

причому, якщо $a(\nu_0)=0$, то $\Delta(\nu_0)=h^4/12$.

Позначимо

$$M=\{\nu\in\mathbb{C}:\ \ \Delta(\nu)\neq 0\}. \tag{9}$$

Обчислюємо визначники

$$\Delta_{11}(\nu)=\begin{vmatrix} 1 & I_1(\nu) \\ 0 & I_2(\nu) \end{vmatrix}=I_2(\nu),$$

$$\Delta_{12}(\nu)=\begin{vmatrix} I_0(\nu) & 1 \\ I_1(\nu) & 0 \end{vmatrix}=-I_1(\nu).$$

Для $\nu\in M$ знаходимо

$$\widehat{T}_1(t,\nu)=\frac{\Delta_{11}(\nu)+t\Delta_{12}(\nu)}{\Delta(\nu)}\,e^{a(\nu)\,t}=\frac{I_2(\nu)-tI_1(\nu)}{\Delta(\nu)}\,e^{a(\nu)\,t}=$$

$$=\frac{\left(a^2(\nu)h^2-2a(\nu)h+2\right)e^{a(\nu)h}-2-a(\nu)t\,e^{a(\nu)h}\left(a(\nu)h-1\right)-a(\nu)}{a^3(\nu)\Delta(\nu)}\,e^{a(\nu)t}.$$

Аналогічно знаходимо $\widehat{T}_2(t,\nu)$ у вигляді (4), задовольняючи умови (6):

$$\widehat{T}_2(t,\nu)=\frac{\Delta_{21}(\nu)+t\Delta_{22}(\nu)}{\Delta(\nu)}e^{a(\nu)\,t}=$$

$$=\frac{-I_1(\nu)+tI_0(\nu)}{\Delta(\nu)}e^{a(\nu)\,t}=$$

$$=\frac{-(a(\nu)h-1)\,e^{a(\nu)h}-1+a(\nu)\,t\left(e^{a(\nu)h}-1\right)}{a^2(\nu)\Delta(\nu)}\,e^{a(\nu)t}.$$

Знову зауважимо, якщо $a(\nu_0)=0$, то

$$\widehat{T}_1(t,\nu_0)=\frac{2(2h-3t)}{h^2},\ \ \widehat{T}_2(t,\nu_0)=\frac{6(2t-h)}{h^3}.$$

II. Основні результати

Лема 1. *Нехай $T(t,\nu)$ – розв'язок рівняння (3), який для $\nu\in M$ і $t\in[0,h]$ задовольняє умови*

$$\int\limits_0^h T(t,\nu)\,dt=0,\qquad \int\limits_0^h t\,T(t,\nu)\,dt=0, \tag{10}$$

тоді $T(t,\nu)\equiv 0$ на $[0,h]\times M$.

□ *Доведення.* Якщо $T(t,\nu)$ – розв'язок рівняння (3), то його можна зобразити у вигляді (4), де $C_1(\nu)$ і $C_2(\nu)$ – довільні функції параметра ν. Задовольняючи умови (10), одержуємо для цих функцій систему рівнянь

$$\begin{cases} C_1(\nu)I_0(\nu)+C_2(\nu)I_1(\nu)=0, \\ C_1(\nu)I_1(\nu)+C_2(\nu)I_2(\nu)=0. \end{cases} \tag{11}$$

Оскільки $\nu\in M$, де M – множина (9), то отримуємо умову $\Delta(\nu)\neq 0$. Звідси випливає, що система (11) має лише тривіальний розв'язок $C_1(\nu)=C_2(\nu)=0$. Тому $T(t,\nu)\equiv 0$ на $[0,h]\times M$. ■

Лема 2. *Якщо $P=\{\nu\in\mathbb{C}:\ \ a(\nu)\in\mathbb{R}\}$, то $P\subseteq M$.*

□ *Доведення.* Позначимо $a(\nu)h=x$. Оскільки $a(\nu)\in\mathbb{R}$, то $x\in\mathbb{R}$ і навпаки. Маємо дійснозначну функцію на P:

$$\Delta(\nu)=\frac{\left(e^x-1\right)^2-x^2e^x}{x^4}h^4.$$

Функція $f(x)=\dfrac{\left(e^x-1\right)^2-x^2e^x}{x^4}$ в точці $x=0$ має усувну особливість. Справді,

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{(e^x-1)^2 - x^2 e^x}{x^4} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - 2e^x + 1 - x^2 e^x}{x^4} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \left\{ \frac{\left(1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^4}{4!} + o\left(x^4\right)\right)}{x^4} - \right.$$
$$- \frac{2\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + o\left(x^4\right)\right)}{x^4} +$$
$$\left. + \frac{1}{x^4} - \frac{x^2\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + o\left(x^2\right)\right)}{x^4} \right\} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{(2x)^4}{4!} - 2\frac{x^4}{4!} - \frac{x^4}{2!} + o\left(x^4\right)}{x^4} =$$
$$= \frac{2^4}{4!} - \frac{2}{4!} - \frac{1}{2!} = \frac{16}{24} - \frac{2}{24} - \frac{1}{2} = \frac{1}{12}.$$

Рівняння $(e^x-1)^2 - x^2e^x = 0$ еквівалентне двом рівнянням $e^x - 1 - xe^{x/2} = 0$ та $e^x - 1 + xe^{x/2} = 0$, або $\operatorname{sh}\frac{x}{2} = \frac{x}{2}$ та $\operatorname{sh}\frac{x}{2} = -\frac{x}{2}$. Ці рівняння дійсних ненульових коренів не мають (див. рис. 1).

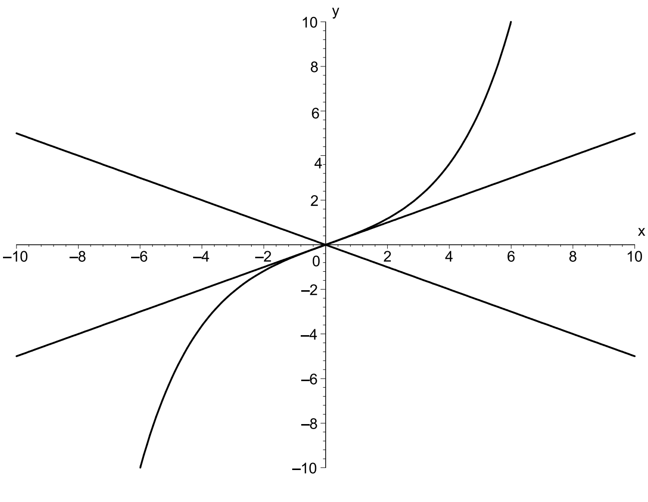

Рис. 1. Графіки функцій $y = \operatorname{sh}\frac{x}{2}$, $y = \frac{x}{2}$, $y = -\frac{x}{2}$

Отже, $f(x) \neq 0$ на $\mathbb{R}$, тому $\Delta(\nu) = f(a(\nu)h)h^4 \neq 0$ на P, тобто $P \subseteq M$. ■

Лема 3. *Якщо* $\widetilde{P} = \{\nu \in \mathbb{C} : \ ia(\nu) \in \mathbb{R}\}$, *то* $\widetilde{P} \subseteq M$.

□ *Доведення.* Позначивши $a(\nu)h = ix$, одержимо, що $x \in \mathbb{R}$. Тоді

$$\Delta(\nu) = \frac{\left(e^{ix}-1\right)^2 + x^2e^{ix}}{x^4}h^4.$$

Функція $f(x) = \frac{\left(e^{ix}-1\right)^2 + x^2e^{ix}}{x^4}$ в точці $x = 0$ також має усувну особливість, а рівняння $\left(e^{ix}-1\right)^2 + x^2e^{ix} = 0$ еквівалентне двом рівнянням $\sin\frac{x}{2} = \frac{x}{2}$ та $\sin\frac{x}{2} = -\frac{x}{2}$. Останні рівняння дійсних ненульових коренів не мають (див. рис. 2).

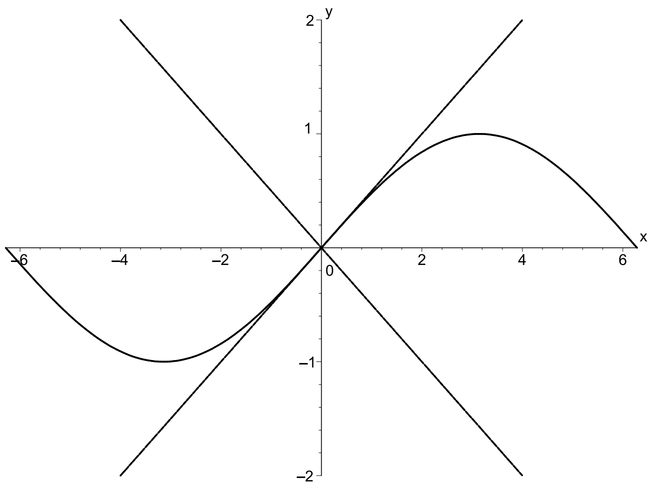

Рис. 2. Графіки функцій $y = \sin\frac{x}{2}$, $y = \frac{x}{2}$, $y = -\frac{x}{2}$

Тому аналогічно $\Delta(\nu) \neq 0$ на $\widetilde{P}$. Отже, $\widetilde{P} \subseteq M$. ■

Введемо у розгляд два класи квазіполіномів.

Нехай K_M – клас квазіполіномів вигляду

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{m} Q_j(x)\, e^{\alpha_j x}, \tag{12}$$

де $\alpha_j \in M \subseteq \mathbb{C}$, $\alpha_j \neq \alpha_k$ для $j \neq k$, $j,k = 1,\ldots,m$, $m \in \mathbb{N}$; $Q_j(x)$, $j = 1,\ldots,m$, – поліноми з комплексними коефіцієнтами.

Зауважимо, що кожний квазіполіном $\varphi(x)$ вигляду (12) визначає диференціальну операцію $\varphi\left(\partial/\partial\nu\right)$ скінченного порядку на класі цілих функцій $\Phi(\nu)$, а саме:

$$\varphi\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\Phi(\nu) = \sum_{j=1}^{m} Q_j\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\Phi(\nu + \alpha_j),$$

зокрема,

$$\varphi\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\Phi(\nu)\bigg|_{\nu=0} = \sum_{j=1}^{m} Q_j\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\Phi(\nu)\bigg|_{\nu=\alpha_j}. \tag{13}$$

Крім того, $K_{\mathbb{C},M}$ – клас квазіполіномів

$$f(t,x) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{N} P_{lj}\,(t,x)\, e^{\beta_l t + \alpha_j x},$$

де $P_{lj}(t,x)$ – поліноми змінних t та x з комплексними коефіцієнтами, $\beta_l \in \mathbb{C}$, $\alpha_j \in M$, $\beta_r \neq \beta_l$ для $r \neq l$, $r,l = 1,\ldots,N$, $\alpha_k \neq \alpha_j$ для $k \neq j$, $k,j = 1,\ldots,m$, $m,N \in \mathbb{N}$.

Теорема 1. *Нехай праві частини* $\varphi_1(x)$ *та* $\varphi_2(x)$ *інтегральних умов* (2) *належать до класу* K_M, *де* M *– множина* (9). *Тоді у класі квазіполіномів* $K_{\mathbb{C},M}$ *існує єдиний розв'язок задачі* (1), (2), *який можна знайти за формулою*

$$U(t,x) = \sum_{j=1}^{2} \varphi_j\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\widehat{T}_j(t,\nu)e^{\nu x}\right\}\bigg|_{\nu=0}. \tag{14}$$

□ *Доведення.* Якщо $\varphi \in K_M$, а $T(t,\nu)$ – розв'язок рівняння (3), то згідно з (13) функція $\varphi(\partial/\partial\nu)\{T(t,\nu)e^{\nu x}\}|_{\nu=0}$ належить до $K_{\mathbb{C},M}$. Тоді для довільних $\varphi_1, \varphi_2 \in K_M$ за формулою (14) одержуємо, що $U(t,x)$ є квазіполіномом з класу $K_{\mathbb{C},M}$. Використовуючи рівність $a(\partial/\partial x)\,e^{\nu x} = a(\nu)e^{\nu x}$, покажемо, що функція (14) задовольняє рівняння (1):

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - a\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right]^2 U(t,x) =$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial t} - a\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right]^2 \sum_{j=1}^{2} \varphi_j\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)\left\{\widehat{T}_j(t,\nu)e^{\nu x}\right\}\bigg|_{\nu=0} =$$

$$= \sum_{j=1}^{2} \varphi_j\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)\left\{\left[\frac{\partial}{\partial t} - a\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right]^2\left\{\widehat{T}_j(t,\nu)e^{\nu x}\right\}\right\}\bigg|_{\nu=0} =$$

$$= \sum_{j=1}^{2} \varphi_j\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)\left\{e^{\nu x}\left[\frac{d}{dt} - a(\nu)\right]^2 \widehat{T}_j(t,\nu)\right\}\bigg|_{\nu=0} = 0.$$

Перша з інтегральних умов (2) для функції (14) випливає з властивості (5):

$$\int_0^h U(t,x)dt =$$

$$= \int_0^h \left(\sum_{j=1}^{2} \varphi_j\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)\left\{\widehat{T}_j(t,\nu)e^{\nu x}\right\}\bigg|_{\nu=0}\right)dt =$$

$$= \sum_{j=1}^{2} \varphi_j\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)\left\{\int_0^h \widehat{T}_j(t,\nu)e^{\nu x}\,dt\right\}\bigg|_{\nu=0} =$$

$$= \sum_{j=1}^{2} \varphi_j\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)\left\{e^{\nu x}\int_0^h \widehat{T}_j(t,\nu)\,dt\right\}\bigg|_{\nu=0} =$$

$$= \varphi_1\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)e^{\nu x}\bigg|_{\nu=0} = \varphi_1(x)e^{\nu x}\bigg|_{\nu=0} = \varphi_1(x).$$

Аналогічно з властивості (6) маємо виконання другої інтегральної умови (2):

$$\int_0^h t\,U(t,x)\,dt =$$

$$= \int_0^h \left(\sum_{j=1}^{2} \varphi_j\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)\left\{t\,\widehat{T}_j(t,\nu)e^{\nu x}\right\}\bigg|_{\nu=0}\right)dt =$$

$$= \sum_{j=1}^{2} \varphi_j\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)\left\{\int_0^h t\,\widehat{T}_j(t,\nu)e^{\nu x}\,dt\right\}\bigg|_{\nu=0} =$$

$$= \sum_{j=1}^{2} \varphi_j\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)\left\{e^{\nu x}\int_0^h t\,\widehat{T}_j(t,\nu)\,dt\right\}\bigg|_{\nu=0} =$$

$$= \varphi_2\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)e^{\nu x}\bigg|_{\nu=0} = \varphi_2(x)e^{\nu x}\bigg|_{\nu=0} = \varphi_2(x).$$

Доведемо методом від супротивного єдиність розв'язку задачі (1), (2) у парі класів K_M, $K_{\mathbb{C},M}$. Припустимо, що для деяких $\varphi_1, \varphi_2 \in K_M$ у класі $K_{\mathbb{C},M}$ існують два розв'язки U_1, U_2 задачі (1), (2) у смузі S_h. Тоді їх можна подати у вигляді:

$$U_1(t,x) = \sum_{j=1}^{2} \varphi_j\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)\left\{\widehat{T}_{1j}(t,\nu)e^{\nu x}\right\}\bigg|_{\nu=0},$$

$$U_2(t,x) = \sum_{j=1}^{2} \varphi_j\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)\left\{\widehat{T}_{2j}(t,\nu)e^{\nu x}\right\}\bigg|_{\nu=0},$$

де $\widehat{T}_{1j}(t,\nu)$, $\widehat{T}_{2j}(t,\nu)$, $j = 1, 2$, – деякі розв'язки рівняння (3).

Різниця цих функцій

$$V(t,x) \equiv U_1(t,x) - U_2(t,x) =$$

$$= \sum_{j=1}^{2} \varphi_j\left(\frac{\partial}{\partial \nu}\right)\left\{\left(\widehat{T}_{1j}(t,\nu) - \widehat{T}_{2j}(t,\nu)\right)e^{\nu x}\right\}\bigg|_{\nu=0}$$

задовольняє у смузі S_h рівняння (1) і нульові інтегральні умови

$$\int_0^h V(t,x)\,dt = 0, \qquad \int_0^h t\,V(t,x)\,dt = 0. \tag{15}$$

Оскільки $\varphi_1, \varphi_2 \in K_M$, то згідно з (14) квазіполіном $V(t,x)$ належить до класу $K_{\mathbb{C},M}$. Цей квазіполіном містить значення функцій $\widehat{T}_{11}(t,\nu) - \widehat{T}_{21}(t,\nu)$, $\widehat{T}_{12}(t,\nu) - \widehat{T}_{22}(t,\nu)$ та їх відповідних похідних за ν в точках (t,ν), де $\nu \in M$, $t \in [0,h]$. З умови (15) одержуємо, що різниці функцій $\widehat{T}_{11}(t,\nu) - \widehat{T}_{21}(t,\nu)$, $\widehat{T}_{12}(t,\nu) - \widehat{T}_{22}(t,\nu)$ задовольняють умови леми 1. Тому згідно з цією лемою одержуємо рівності функцій $\widehat{T}_{11}(t,\nu) = \widehat{T}_{21}(t,\nu)$, $\widehat{T}_{12}(t,\nu) = \widehat{T}_{22}(t,\nu)$ та їх похідних за ν в точках (t,ν). Отже, $V(t,x) \equiv 0$ у смузі S_h, тобто $U_1(t,x) = U_2(t,x)$. ■

Зауваження 1. Якщо $0 \in M$, то клас існування розв'язку задачі (1), (2) можна значно розширити, вважаючи, що $\varphi_1, \varphi_2 \in A_{(1)} \bigcup K_M$, де $A_{(1)}$ – клас цілих функцій порядку нижче від першого.

III. Приклади

Приклад 1. Знайти розв'язок задачі у смузі S_1 з інтегральними умовами для бікалоричного рівняння

$$\begin{gathered}\left[\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]^2 U(t,\,x) = 0,\\ \int_0^1 U(t,x)\,dt = e^{-x}, \qquad \int_0^1 t\,U(t,\,x)\,dt = 1.\end{gathered} \tag{16}$$

Маємо $a(\nu) = \nu^2$, $h = 1$, $\varphi_1(x) = e^{-x}$, $\varphi_2(x) = 1$. Для квазіполіномів e^{-x} та 1 показники в експонентах – числа -1 та 0 – належать до множини P, а тому за лемою 2 належать до M. Отже, умови теореми 1 виконуються. Тоді маємо

$$I_0(\nu)=\frac{e^{\nu^2}-1}{\nu^2},\ I_1(\nu)=\frac{\nu^2 I_0(\nu)+1-I_0(\nu)}{\nu^2},$$
$$I_2(\nu)=\frac{\nu^4 I_0(\nu)+\nu^2-2\nu^2 I_0(\nu)-2+2I_0(\nu)}{\nu^2}.$$

За формулою (14) знаходимо розв'язок задачі (16):

$$U(t,\,x)=e^{-\frac{\partial}{\partial\nu}}\left\{\frac{I_2(\nu)-tI_1(\nu)}{\Delta(\nu)}e^{\nu^2 t+\nu x}\right\}\Big|_{\nu=0}+$$
$$+\left\{\frac{-I_1(\nu)+tI_0(\nu)}{\Delta(\nu)}e^{\nu^2 t+\nu x}\right\}\Big|_{\nu=0}=$$
$$=\frac{I_2(-1)-tI_1(-1)}{\Delta(-1)}e^{t-x}+\frac{-I_1(0)+tI_0(0)}{\Delta(0)}.$$

Використовуючи рівності

$$I_0(-1)=e-1,$$
$$I_1(-1)=\frac{e-1+1-(e-1)}{1}=1,$$
$$I_2(-1)=e-1+1-2\,(e-1)-2+2\,(e-1)=$$
$$=e-2,$$
$$\Delta(-1)=e^2-3e+1,$$
$$I_0(0)=1,\quad I_1(0)=\frac{1}{2},$$
$$\Delta(0)=\frac{1}{12},$$

маємо шуканий розв'язок задачі (16)

$$U(t,x)=\frac{e-2-t}{e^2-3e+1}e^{t-x}+12t-6.$$

Приклад 2. Знайти у смузі S_1 розв'язок задачі з інтегральними умовами для диференціально-функціонального рівняння

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}U(t,x)-2\frac{\partial}{\partial t}U(t,x+1)+U(t,x+2)=0, \tag{17}$$

$$\int\limits_0^1 U(t,x)\,dt=\ e^{2x},\quad \int\limits_0^1 t\,U(t,x)\,dt=0. \tag{18}$$

Запишемо рівняння (17) як диференціальне рівняння нескінченного порядку за просторовою координатою:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-e^{\frac{\partial}{\partial x}}\right)^2 U(t,x)=0.$$

Маємо $a(\nu)=e^\nu$, $h=1$, $\varphi_1(x)=e^{2x}$, $\varphi_2(x)=0$. Для квазіполінома e^{2x} показник в експоненті – число 2 – належить до множини P, а тому за лемою 2 належить до M. Отже, умови теореми 1 виконуються. Тому

$$I_0(\nu)=\frac{e^{e^\nu}-1}{e^\nu},\ I_1(\nu)=\frac{e^\nu I_0(\nu)+1-I_0(\nu)}{e^\nu},$$
$$I_2(\nu)=\frac{e^{2\nu}I_0(\nu)+e^\nu-2e^\nu I_0(\nu)-2+2I_0(\nu)}{e^\nu}.$$

За формулою (14) маємо

$$U(t,\,x)=e^{2\frac{\partial}{\partial\nu}}\left\{\frac{I_2(\nu)-tI_1(\nu)}{\Delta(\nu)}e^{e^\nu t+\nu x}\right\}\Big|_{\nu=0}=$$
$$=\frac{I_2(2)-tI_1(2)}{\Delta(2)}e^{e^2 t+2x}.$$

Обчислюємо

$$I_1(2)=\frac{e^2 I_0(2)+1-I_0(2)}{e^2}=\frac{(e^2-1)\frac{e^{e^2}-1}{e^2}+1}{e^2}=$$
$$=\frac{e^{e^2}(e^2-1)+1}{e^4};$$
$$I_2(2)=\frac{e^4 I_0(2)+e^2-2e^2 I_0(2)-2+2I_0(2)}{e^2}=$$
$$=\frac{(e^4-2e^2+2)I_0(2)+e^2-2}{e^2}=$$
$$=\frac{(e^4-2e^2+2)\frac{e^{e^2}-1}{e^2}+e^2-2}{e^2}=$$
$$=\frac{(e^4-2e^2+2)e^{e^2}-2}{e^4};$$
$$\Delta(2)=\frac{\left(e^{e^2}-1\right)^2-e^{e^2+4}}{e^8}.$$

Знаходимо розв'язок задачі (17), (18) у вигляді

$$U(t,x)=\frac{\frac{(e^4-2e^2+2)e^{e^2}-2}{e^4}-t\frac{e^{e^2}(e^2-1)+1}{e^4}}{\frac{\left(e^{e^2}-1\right)^2-e^{e^2+4}}{e^8}}e^{e^2 t+2x}=$$

$$=\frac{(e^4-2e^2+2)e^{e^2}-2-t\left(e^{e^2}(e^2-1)+1\right)}{\left(e^{e^2}-1\right)^2-e^{e^2+4}}e^{e^2 t+2x+4}.$$

Приклад 3. Знайти у смузі S_1 розв'язок задачі з інтегральними умовами

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}+1\right]^2 U(t,\,x)=0,$$
$$\int\limits_0^1 U(t,x)\,dt=0,\quad \int\limits_0^1 t\,U(t,\,x)\,dt=e^x\sin x. \tag{19}$$

Маємо $a(\nu)=\nu^2-1$, $h=1$, $\varphi_1(x)=0$, $\varphi_2(x)==e^x\sin x$. Для квазіполінома $e^x\sin x$ показники в експонентах – числа $1\pm i$ – не належать до множин P та $\widetilde{P}$, але належать до M, оскільки

$$a(1\pm i)=-1\pm 2i,$$
$$\Delta(1\pm i)=\frac{\left(e^{-1\pm 2i}-1\right)^2-(-1\pm 2i)^2e^{-1\pm 2i}}{(-1\pm 2i)^4}\approx$$
$$\approx -0,0081\pm 0,0265\,i\neq 0.$$

Отже, умови теореми 1 виконуються. Тоді маємо

$$I_0(\nu) = \frac{e^{\nu^2-1}-1}{\nu^2-1},$$
$$I_1(\nu) = \frac{(\nu^2-1)I_0(\nu)+1-I_0(\nu)}{\nu^2-1},$$
$$I_2(\nu) = \frac{\left(\nu^2-1\right)^2 I_0(\nu)+\nu^2-1}{\nu^2-1} + \frac{-2\left(\nu^2-1\right)I_0(\nu)-2+2I_0(\nu)}{\nu^2-1}.$$

Використаємо формулу (14)

$$\begin{aligned} U(t,x) &= \\ &= e^{\frac{\partial}{\partial\nu}} \sin\frac{\partial}{\partial\nu}\left\{\frac{-I_1(\nu)+tI_0(\nu)}{\Delta(\nu)}e^{\left(\nu^2-1\right)t+\nu x}\right\}\Bigg|_{\nu=0} = \\ &= \frac{1}{2i}\left\{\frac{-I_1(\nu)+tI_0(\nu)}{\Delta(\nu)}e^{\left(\nu^2-1\right)t+\nu x}\right\}\Bigg|_{\nu=1+i} - \\ &- \frac{1}{2i}\left\{\frac{-I_1(\nu)+tI_0(\nu)}{\Delta(\nu)}e^{\left(\nu^2-1\right)t+\nu x}\right\}\Bigg|_{\nu=1-i} = \\ &= \frac{1}{2i}\left\{\frac{-I_1(1+i)+tI_0(1+i)}{\Delta(1+i)}e^{(2i-1)t+(1+i)x} - \right. \\ &\left. - \frac{-I_1(1-i)+tI_0(1-i)}{\Delta(1-i)}e^{(-2i-1)t+(1-i)x}\right\} = \\ &= \frac{e^{x-t}}{2i}\left\{\frac{-I_1(1+i)+tI_0(1+i)}{\Delta(1+i)}e^{i(x+2t)} - \right. \\ &\left. - \frac{-I_1(1-i)+tI_0(1-i)}{\Delta(1-i)}e^{-i(x+2t)}\right\} = \\ &= \frac{e^{x-t}}{2i}\left\{(A+Bi)e^{i(x+2t)}-(A-Bi)e^{-i(x+2t)}\right\} = \\ &= e^{x-t}\left\{A\sin(x+2t)+B\cos(x+2t)\right\}, \end{aligned}$$

де

$$A = \mathrm{Re}\frac{-I_1(1+i)+tI_0(1+i)}{\Delta(1+i)},$$

$$B = \mathrm{Im}\frac{-I_1(1+i)+tI_0(1+i)}{\Delta(1+i)}.$$

Висновки

Для однорідного диференціального рівняння із частинними похідними другого порядку за часом та загалом нескінченного порядку за просторовою координатою з неоднорідними інтегральними часовими умовами знайдено клас існування та єдиності розв'язку задачі. Цей клас містить функції квазіполіномного вигляду. При цьому розв'язок задачі зображено за допомогою диференціально-символьного методу як результати дій диференціальних виразів на класично відокремлені розв'язки однорідного рівняння з прийняттям після дії виразів параметра (за яким діють вирази), таким, що дорівнює нулеві. Символами диференціальних виразів є праві частини інтегральних умов.

Інтерес становить у подальших дослідженнях вивчення аналогічної задачі для неоднорідного рівняння з однорідними інтегральними умовами та дослідження ядра задачі.

Дослідження частково підтримані ДФФД України (проект № 54.1/027).

Література

[1] Ионкин Н.И. Решение одной краевой задачи в теории теплопроводности с нелокальными краевыми условиями // Дифференц. уравнения. – 1977. – **13**, №2. – С. 294–304.

[2] Ільків В.С., Магеровська Т.В. Задача з інтегральними умовами для рівняння з частинними похідними другого порядку // Вісн. нац. ун-ту "Львів. політехніка". Сер. фіз.-мат. науки. – 2008. – № 625. – С. 12–19.

[3] Каленюк П.І., Нитребич З.М. Узагальнена схема відокремлення змінних. Диференціально-символьний метод. – Львів: Вид-во Нац. ун-ту "Львівська політехніка", 2002. – 292 с.

[4] Каленюк П.І., Нитребич З.М., Когут І.В. Про ядро задачі з інтегральною умовою для рівняння із частинними похідними нескінченного порядку // Вісн. нац. ун-ту "Львів. політехніка". Сер. фіз.-мат. науки. – 2008. – № 625. – С. 5–11.

[5] Медвідь О.М., Симотюк М.М. Інтегральна задача для лінійних рівнянь з частинними похідними // Мат. студії. – 2007. – **28**, № 2. – С. 115–140.

[6] Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. – М.: Высш. шк., 1995. – 301 с.

[7] Попов А.Ю., Тихонов И.В. Экспоненциальные классы разрешимости в задаче теплопроводности с нелокальным условием среднего по времени // Мат. сб. – 2005. – **196**, № 9. – С. 71–102.

[8] Пулькина Л.С. Нелокальная задача с интегральными условиями для гиперболического уравнения // Дифференц. уравнения. – 2004. – **40**, № 7. – С. 887–892.

[9] Фардигола Л. В. Критерий корректности в слое краевой задачи с интегральными условиями // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 11. – С. 1546–1551.

[10] Bouziani A. Initial boundary-value problems for a class of pseudoparabolic equations with integral boundary conditions // J. Math. Anal. Appl. – 2004. – **291**. – P. 371–386.

[11] Cannon J. R. The solution of the heat equation. Subject to the specification of energy // Quart. Appl. Math. – 1963. – **21**. – P. 155–160.

[12] Dao-Qing Dai, Yu Huang. On a mixed problem with integral conditions for one-dimensional parabolic equation // Appl. Anal. – 2006. – **85**, No. 9. – P. 1113–1121.

[13] Ivanchov M. Inverse problems for equations of parabolic type. – Lviv: VNTL Publ., 2003. – 238 p. – (Math. Studies: Monograph Ser. – Vol. 10.)

[14] Kalenyuk P. I., Kohut I. V., Nytrebych Z. M. Problem with integral condition for a partial differential equation of the first order with respect to time // J. Math. Sci. – 2012. – **181**, No. 3. – P. 293–304.

[15] Mehraliev Y. T., Azizbekov E. I. A non-local boundary-value problem with integral conditions for a second order hyperbolic equations // J. Quality Measurement and Anal. – 2011. – **7**, No. 1. – P. 27–40.

[16] Molaei H. Optimal control and problem with integral boundary conditions // Int. J. Contemp. Math. Sci. – 2011. – **6**, No. 48. – P. 2385–2390.

ОДНОЗНАЧНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ З ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ВТОРОГО ПОРЯДКА ПО ВРЕМЕНИ

Каленюк П. И.[a,b], Илькив В. С.[a], Нитребыч З. М.[a], Когут И. В.[a]

[a] *Национальный университет "Львивська политэхника",*
ул. С. Бандеры, 12, Львов, 79013, Украина
[b] *Жешувский университет,*
ул. Рейтана, 16-А, Жешув, 35-959, Польша

Найден класс однозначной разрешимости задачи с неоднородными интегральными временными условиями для однородного уравнения с частными производными второго порядка по времени, которое обобщает бикалоричное уравнение. В этом классе функций квазиполиномного вида решение задачи представлено с помощью дифференциально-символьного метода как действие дифференциальных выражений, символами которых есть правые части интегральных условий, на некоторые функции параметров.

Ключевые слова: уравнения с частными производными бесконечного порядка, интегральные условия, бикалоричное уравнение, дифференциально-символьный метод.

2000 MSC: 60J10

УДК: 517.95

UNIQUE SOLVABILITY OF THE PROBLEM WITH INTEGRAL CONDITIONS FOR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION OF THE SECOND ORDER IN TIME

Kalenyuk P. I.[a, b], Ilkiv V. S.[a], Nytrebych Z. M.[a], Kohut I. V.[a]

[a] *National University "Lvivska Politechnika"*
12 S. Bandera str., 79013 Lviv, Ukraine
[b] *University of Rzeszów,*
16-A Rejtan str., 35-959 Rzeszów, Poland

We distinguish a class of univalent solvability of the problem with nonhomogeneous integral time conditions for homogeneous partial differential equation of second order in time which generalizes a bicalorical equation. In this class of quasipolynomial functions, the solution of the problem is represented as an action of differential expressions whose symbols are the right-hand sides of the integral conditions, onto certain functions of parameters.

Key words: infinite order PDE, integral conditions, bicalorical equation, differential-symbol method

2000 MSC: 60J10

УДК: 517.95