

КОЕФІЦІЄНТИ СТЕПЕНЕВОГО РОЗВИНЕННЯ І a -ТОЧКИ ЦІЛОЇ ФУНКЦІЇ

Андрусак І. В.^a, Філевич П. В.^b

^a Національний університет “Львівська політехніка”
вул. С. Бандери 12, 79013, Львів, Україна

^b Прикарпатський національний університет ім. Василя Стефаника
вул. Шевченка, 57, 76018, Івано-Франківськ, Україна

(Отримано 21 жовтня 2014 р.)

Для трансцендентних цілих функцій встановлено зв'язок між швидкістю прямування до ∞ послідовності їх a -точок та швидкістю прямування до 0 послідовності їх тейлорових коефіцієнтів.

Ключові слова: ціла функція, a -точка, лічильна функція a -точок, усереднена лічильна функція a -точок, максимальний член, центральний індекс, максимум модуля, характеристика Неванліни.

2000 MSC: 30D20, 30D35

УДК: 517.53

Вступ

Використовуємо стандартні означення і позначення теорії розподілу значень мероморфних функцій (див., наприклад, [1]).

Зокрема, якщо $f \not\equiv \text{const}$ – ціла функція і $a, z \in \mathbb{C}$, то число z називаємо a -точкою (a -точкою кратності m) функції f , якщо z є нулем (нулем кратності m) функції $f - a$. Нехай $n_f(r, a)$ – лічильна функція a -точок функції f . Усереднену лічильну функцію a -точок функції f визначаємо за рівністю

$$N_f(r, a) = \int_0^r \frac{n_f(t, a) - n_f(0, a)}{t} dt + n_f(0, a) \ln r.$$

Нагадаємо, що число a називається пікаровим винятковим значенням функції f , якщо кількість її a -точок є скінченною. Як відомо, трансцендентна ціла функція має в \mathbb{C} щонайбільше одне пікарове виняткове значення.

Якщо число $a \in \mathbb{C}$ не є пікаровим винятковим значенням функції f , то нехай $(\zeta_n(a))$ – послідовність усіх a -точок цієї функції, занумерованих з урахуванням кратностей у порядку неспадання модулів. Зауважимо, що у такому випадку f є трансцендентною цілою функцією.

Нехай, також, (a_n) – послідовність коефіцієнтів степеневого розвинення функції f в околі точки $z = 0$, тобто $a_n = f^{(n)}(0)/n!$ для всіх $n \in \mathbb{N}_0$ ($\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$).

Наступну теорему, яка встановлює зв'язок між швидкістю прямування до ∞ послідовності $(\zeta_n(a))$ і швидкістю прямування до 0 послідовності (a_n) , доведено в [2].

Теорема А. (i) Якщо число $a \in \mathbb{C}$ не є пікаровим винятковим значенням цілої функції f , то

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |\zeta_n(a)| \sqrt[n]{|a_n|} \geq 1;$$

(ii) Існує ціла функція f без пікарового виняткового значення така, що для кожного $a \in \mathbb{C}$ правильна рівність

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |\zeta_n(a)| \sqrt[n]{|a_n|} = 1.$$

Для всіх $r > 0$ визначимо максимальний член і центральний індекс функції f відповідно за рівностями

$$\mu_f(r) = \max\{|a_n|r^n : n \in \mathbb{N}_0\},$$
$$\nu_f(r) = \max\{n \in \mathbb{N}_0 : |a_n|r^n = \mu_f(r)\}.$$

Частина (i) теореми А уточнює така теорема ([3]).

Теорема В. Якщо число $a \in \mathbb{C}$ не є пікаровим винятковим значенням цілої функції f , то

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |\zeta_{n-1}(a)| \sqrt[n]{|a_n|} \geq \exp\left(\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln \mu_f(r)}{\nu_f(r)}\right). \quad (1)$$

Метою роботи є доведення трьох сформульованих нижче теорем, які доповнюють наведені вище результати робіт [2] і [3].

Теорема 1. Якщо число $a \in \mathbb{C}$ не є пікаровим винятковим значенням цілої функції f , то

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |\zeta_{n-1}(a)| \sqrt[n]{|a_n|} \geq \exp\left(\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{N_f(r, a)}{n_f(r, a)}\right). \quad (2)$$

Теорема 2. Для довільного $\delta \in [0; +\infty]$ існує ціла функція f без пікарового виняткового значення

така, що для кожного $a \in \mathbb{C}$ виконуються співвідношення

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln \mu_f(r)}{\nu_f(r)} = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{N_f(r, a)}{n_f(r, a)} = \delta, \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\zeta_n(a)| \sqrt[n]{|a_n|} = e^\delta.$$

Теорема 3. (i) Існують ціла функція f і число $a \in \mathbb{C}$, яке не є пікаровим винятковим значенням функції f , такі, що

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln \mu_f(r)}{\nu_f(r)} < \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{N_f(r, a)}{n_f(r, a)}; \quad (4)$$

(ii) Існують ціла функція f і число $a \in \mathbb{C}$, яке не є пікаровим винятковим значенням функції f , такі, що

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln \mu_f(r)}{\nu_f(r)} > \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{N_f(r, a)}{n_f(r, a)}. \quad (5)$$

Зауважимо, що теорема 2 вказує на точність оцінок (1) і (2). Теорема 2 показує, що оцінка (1) не є наслідком оцінки (2), а оцінка (2) не є наслідком оцінки (1).

I. Доведення теореми 1

Нехай число $a \in \mathbb{C}$ не є пікаровим винятковим значенням цілої функції

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad (6)$$

$(\zeta_n(a))$ — послідовність усіх a -точок функції f , занумерованих з урахуванням кратностей у порядку неспадання модулів. Доведемо, що тоді виконується нерівність (2).

Враховуючи, що $n_f(|\zeta_{n-1}(a)|, a) \geq n$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, досить довести, що для довільного $q \in (0, 1)$ множина тих $n \in \mathbb{N}$, для яких

$$|\zeta_{n-1}(a)| \sqrt[n]{|a_n|} > qe^{\frac{N_f(|\zeta_{n-1}(a)|, a)}{n}},$$

є нескінченною.

Припустимо, від супротивного, що існують числа $q \in (0, 1)$ і $n_1 \in \mathbb{N}$ такі, що

$$|\zeta_{n-1}(a)| \sqrt[n]{|a_n|} \leq qe^{\frac{N_f(|\zeta_{n-1}(a)|, a)}{n}}, \quad n \geq n_1. \quad (7)$$

Нехай m — кількість членів послідовності $(\zeta_n(a))$, що дорівнюють нулю. Прийmemo $b_m = 1$ і $b_n = \prod_{j=m}^{n-1} \frac{1}{|\zeta_j(a)|}$ для всіх натуральних $n \geq m + 1$. Розглянемо степеневий ряд

$$g(z) = \sum_{n=m}^{\infty} b_n z^n.$$

Оскільки

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = |\zeta_n(a)| \rightarrow +\infty, \quad n \rightarrow \infty,$$

і $b_n \neq 0$ для всіх $n \in \mathbb{N}_0$, то функція g , яку задає цей ряд, є цілою.

Легко переконатися (детально такі міркування проведено, наприклад, в роботі [4] під час доведення теореми 2 цієї роботи), що

$$\ln \mu_g(r) = N_f(r, a) = \begin{cases} \ln r^m, & \text{якщо } r \in (0, |\zeta_m(a)|], \\ \ln(b_n r^n), & \text{якщо } r \in [|\zeta_{n-1}(a)|, |\zeta_n(a)|] \text{ і } n \geq m + 1, \end{cases}$$

зокрема,

$$N_f(|\zeta_{n-1}(a)|, a) = \ln(b_n |\zeta_{n-1}(a)|^n), \quad n \geq m + 1. \quad (8)$$

Скориставшись нерівністю (7) і рівністю (8), для всіх $n \geq n_2$ отримуємо

$$|\zeta_{n-1}(a)| \sqrt[n]{|a_n|} \leq q \exp\left(\frac{1}{n} \ln(b_n |\zeta_{n-1}(a)|^n)\right) = q \sqrt[n]{b_n |\zeta_{n-1}(a)|},$$

звідки випливає, що

$$|a_n| \leq q^n b_n, \quad n \geq n_2.$$

Оскільки центральний індекс $\nu_h(r)$ кожної трансцендентної цілої функції h є неспадною необмеженою зверху на $(0, +\infty)$ функцією, то

$$\min\{\nu_f(r), \nu_g(r)\} \geq n_2, \quad r \geq r_0,$$

а тому для всіх $r \geq r_0/q$ маємо

$$\mu_f(r) = \max\{|a_n| r^n : n \geq n_2\} \leq \max\{b_n (qr)^n : n \geq n_2\} = \mu_g(qr) = e^{N_f(qr, a)}.$$

Далі нам буде потрібна така класична теорема Валірона (див., наприклад, [5, с. 184]).

Теорема С. Для довільної трансцендентної цілої функції h і кожного $p \in (0, 1)$ правильне співвідношення

$$M_h(pr) = o(\mu_h(r)), \quad r \rightarrow +\infty,$$

де $M_h(r) = \max\{|h(z)| : |z| = r\}$ — максимум модуля функції h .

Скориставшись встановленою вище нерівністю $\ln \mu_f(r) \leq N_f(qr, a)$, $r \geq r_0/q$, і теоремою Валірона, отримуємо

$$\ln M_f(qr) - N_f(qr, a) \rightarrow -\infty, \quad r \rightarrow +\infty,$$

що суперечить рівності Йєнсена, згідно з якою

$$N_f(r, a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(re^{i\theta}) - a| d\theta - \ln |c(a)| \leq \leq \ln M_f(r) + O(1), \quad r \rightarrow +\infty,$$

де $c(a)$ — перший ненульовий коефіцієнт в розвиненні функції $f - a$ в степеневий ряд в околі точки $z = 0$. Теорему 1 доведено.

II. Доведення теореми 2

Нехай $\delta \in [0; +\infty]$. Доведемо, що існує ціла функція f без пікарового виняткового значення така, що для кожного $a \in \mathbb{C}$ виконуються співвідношення (3).

У випадку $\delta = 0$ досить розглянути функцію f , існування якої стверджується у частині (ii) теореми А, і скористатись теоремами В і 1.

Якщо $\delta = +\infty$, то достатньо розглянути довільну трансцендентну цілу функцію f , для якої

$$\ln \mu_f(r) = O(\ln^2 r), \quad r \rightarrow +\infty.$$

Справді, для кожної такої функції і довільного $a \in \mathbb{C}$ при $r \rightarrow +\infty$ виконуються (див., наприклад, [6]) співвідношення

$$N_f(r, a) \sim \ln \mu_f(r), \quad n_f(r, a) = o(N_f(r, a)), \\ \nu_f(r) = o(\ln \mu_f(r)),$$

звідки бачимо, що функція f не має пікарового виняткового значення і виконується перше зі співвідношень (3) (з $\delta = +\infty$). З огляду на наведене, друге зі співвідношень (3) впливає з теореми В.

Для доведення теореми 2 у випадку $\delta \in (0, +\infty)$ нам буде потрібний один результат з роботи [7]. Перш ніж його сформулювати, введемо деякі позначення.

Розглянемо довільну трансцендентну цілу функцію вигляду

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n \tag{9}$$

і для кожного $r \geq 0$ прийmemo

$$S_g(r) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |b_n|^2 r^{2n} \right)^{1/2}, \quad \rho_g = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln \ln M_g(r)}{\ln r}.$$

Величина ρ_g , як відомо, називається порядком функції g і може бути обчислена через коефіцієнти цієї функції за такою класичною формулою Коші-Адамара:

$$\rho_g = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln n}{-\ln |b_n|}.$$

Нехай (Ω, \mathcal{A}, P) – деякий ймовірнісний простір, а $(\omega_n((\omega)))$ – послідовність незалежних рівномірно розподілених на відрізку $[0, 1]$ випадкових величин. Поряд з функцією (9) розглянемо випадкову трансцендентну цілу функцію

$$g_{\omega}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n e^{2\pi i \omega_n(\omega)} z^n. \tag{10}$$

Для функції (10) правильне наступне твердження ([7]).

Теорема Д. *Нехай g – довільна трансцендентна ціла функція скінченного порядку вигляду (9). Тоді для випадкової цілої функції (10) майже напевне для кожного $a \in \mathbb{C}$ виконується співвідношення*

$$N_{g_{\omega}}(r, a) \sim \ln S_g(r), \quad r \rightarrow +\infty. \tag{11}$$

Повернемось до доведення теореми 2. Нехай, отже, $\delta \in (0, +\infty)$.

Прийmemo $b_0 = 1$ і нехай $b_n = \left(\frac{e}{\delta n}\right)^{n\delta}$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Тоді, як легко бачити, степеневий ряд (9) з так визначеними коефіцієнтами b_n задає цілу функцію g , для якої за наведеною вище формулою Коші-Адамара маємо $\rho_g = \frac{1}{\delta}$.

Крім того, дослідивши на екстремум функцію $y(x) = \left(\frac{e}{\delta x}\right)^{x\delta} r^x$, $x \geq 1$, для кожного $r > 0$ отримуємо

$$\mu_g(r) = \max \left\{ \left(\frac{e}{\delta n}\right)^{n\delta} r^n : n \in \mathbb{N} \right\} = \\ = \max \left\{ \left(\frac{e}{\delta x}\right)^{x\delta} r^x, \left(\frac{e}{\delta(x+1)}\right)^{(x+1)\delta} r^{x+1} \right\},$$

де $x = x(r) = \left[\frac{1}{\delta} r^{\frac{1}{\delta}}\right]$. Звідси випливає, що

$$\ln \mu_g(r) \sim r^{\frac{1}{\delta}}, \quad r \rightarrow +\infty.$$

Тоді, як легко довести (див., наприклад, [4]),

$$\nu_g(r) \sim \frac{1}{\delta} r^{\frac{1}{\delta}}, \quad r \rightarrow +\infty.$$

Далі, скориставшись рівністю Парсевала

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g(re^{i\theta})|^2 d\theta = S_g^2(r),$$

бачимо, що $S_g(r) \leq M_g(r)$. Крім того, $\mu_g(r) \leq S_g(r)$. Тому, врахувавши, що для кожної трансцендентної цілої функції g скінченного порядку виконується (див., наприклад, [8, с. 185]) співвідношення

$$\ln \mu_g(r) \sim \ln M_g(r), \quad r \rightarrow +\infty,$$

отримуємо

$$\ln S_g(r) \sim \ln \mu_g(r) \sim r^{\frac{1}{\delta}}, \quad r \rightarrow +\infty.$$

Поряд з функцією g розглянемо випадкову цілу функцію g_{ω} вигляду (10). За теоремою Д існує множина $A \in \mathcal{A}$ така, що $P(A) = 1$ і для кожного $\omega \in A$ та всіх $a \in \mathbb{C}$ виконується співвідношення (11), а тому й співвідношення

$$N_{g_{\omega}}(r, a) \sim r^{\frac{1}{\delta}}, \quad r \rightarrow +\infty,$$

з якого випливає (див., наприклад, [4]), що

$$n_{g_{\omega}}(r, a) \sim \frac{1}{\delta} r^{\frac{1}{\delta}}, \quad r \rightarrow +\infty. \tag{12}$$

Зафіксуємо довільне $\omega \in A$ і прийmemo $a_n = b_n e^{2\pi i \omega_n(\omega)}$ для всіх $n \in \mathbb{N}_0$. Зрозуміло, що степеневий ряд (6) з так визначеними коефіцієнтами a_n задає цілу функцію $f = g_{\omega}$, яка, згідно з тим, що співвідношенням (12) виконується для всіх $a \in \mathbb{C}$, не має пікарових виняткових значень.

Оскільки $|a_n| = |b_n|$ для всіх $n \in \mathbb{N}_0$, то

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \mu_f(r)}{\nu_f(r)} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \mu_g(r)}{\nu_g(r)} = \delta,$$

Крім того, для кожного $a \in \mathbb{C}$ маємо

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{N_f(r, a)}{N_f(r, a)} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{N_{g_\omega}(r, a)}{n_{g_\omega}(r, a)} = \delta.$$

Отже, нами доведено перше зі співвідношень (3).

Нехай $a \in \mathbb{C}$, а $(\zeta_n(a))$ – послідовність усіх a -точок функції f , занумерованих з урахуванням кратностей у порядку неспадання модулів. Тоді зі співвідношення (12) випливає, що

$$|\zeta_n(a)| \sim (n\delta)^\delta, \quad n \rightarrow \infty,$$

а тому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\zeta_n(a)| \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n\delta)^\delta \left(\frac{e}{n\delta}\right)^\delta = e^\delta,$$

тобто виконується друге зі співвідношень (3). Теорему 2 повністю доведено.

III. Доведення теореми 3

Покажемо, що при $a = 0$ нерівність (4) виконується, наприклад, для функції $f(z) = e^z \pi(z)$, де

$$\pi(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{e^n}\right).$$

Справді, для функції f , як і для функції π , маємо $\zeta_n(0) = -e^{n+1}$ для всіх $n \in \mathbb{N}_0$, звідки випливає, що

$$n_f(r, 0) = n_\pi(r, 0) \sim \ln r, \quad r \rightarrow +\infty.$$

Скориставшись правилом Лопітала, отримуємо

$$N_f(r, 0) = N_\pi(r, 0) \sim \frac{1}{2} \ln^2 r, \quad r \rightarrow +\infty.$$

Тому,

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{N_f(r, 0)}{n_f(r, 0)} = +\infty. \quad (13)$$

Далі зауважимо, що

$$M_\pi(r) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{r}{e^n}\right), \quad M_f(r) = e^r M_\pi(r),$$

і, як нескладно довести (див., наприклад, [6]),

$$\ln M_\pi(r) \sim N_\pi(r, 0) \sim \frac{1}{2} \ln^2 r, \quad r \rightarrow +\infty.$$

Звідси отримуємо

$$\ln M_f(r) \sim r, \quad r \rightarrow +\infty.$$

Отже, функція f має порядок 1, а тому, як зазначалось при доведенні теореми 2,

$$\ln \mu_f(r) \sim \ln M_f(r) \sim r, \quad r \rightarrow +\infty,$$

звідки випливає, що

$$\nu_f(r) \sim r, \quad r \rightarrow +\infty.$$

Отже,

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln \mu_f(r)}{\nu_f(r)} = 1. \quad (14)$$

З (13) і (14) бачимо, що при $a = 0$ виконується нерівність (4). Першу частину теореми 3 доведено.

Перейдемо до доведення частини (ii) цієї теореми.

Нехай $\rho \in (0, +\infty)$. Як доведено в роботі [4] (див. твердження 2 цієї роботи і його доведення), існують ціла функція f і число $\alpha > 1$ такі, що виконуються співвідношення

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln M_f(r)}{r^\rho} = 1, \quad \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{T_f(\alpha r)}{T_f(r)} > \alpha^\rho, \quad (15)$$

де $T_f(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ |f(re^{i\theta})| d\theta$ – характеристика Неванлінни функції f .

Зрозуміло, що функція f має порядок ρ , а тому, як зазначалось при доведенні теореми 2,

$$\ln \mu_f(r) \sim \ln M_f(r) \sim r^\rho, \quad r \rightarrow +\infty,$$

звідки випливає, що

$$\nu_f(r) \sim \rho r^\rho, \quad r \rightarrow +\infty.$$

Отже,

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln \mu_f(r)}{\nu_f(r)} = \frac{1}{\rho}.$$

Далі зауважимо, що за відомою теоремою Валірона (див. теорему 2.1 в [1, с. 151]) для всіх $a \in \mathbb{C}$, за винятком множини значень $a \in \mathbb{C}$ нульової плоскої лебегової міри (такі значення називаються неванлінновими винятковими), виконується співвідношення

$$N_f(r, a) \sim T_f(r), \quad r \rightarrow +\infty.$$

Зафіксуємо довільне $a \in \mathbb{C}$, яке не є валіроновим винятковим значенням функції f , і доведемо, що для нього виконуватиметься співвідношення (5), тобто, що

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{N_f(r, a)}{n_f(r, a)} < \frac{1}{\rho}. \quad (16)$$

Скористаємось тим, що з другого зі співвідношень (15) випливає існування числа $\rho' > \rho$, для якого

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{N_f(\alpha r, a)}{N_f(r, a)} > \alpha^{\rho'}. \quad (17)$$

Якщо б співвідношення (16) не виконувалась, то справджувалась би нерівність

$$\frac{N_f(r, a)}{n_f(r, a)} \geq \frac{1}{\rho}, \quad r \geq r_0,$$

з якої, всупереч співвідношенню (17), для всіх $r \geq r_0$ випливал б нерівність

$$\ln \frac{N_f(\alpha r, a)}{N_f(r, a)} = \int_r^{\alpha r} \frac{n_f(r, a)}{r N_f(r, a)} \leq \rho' \ln \alpha.$$

Теорему 3 повністю доведено.

Література

- [1] Гольдберг А. А., Островский И. В. Распределение значений мероморфных функций. – М.: Наука, 1970. – 592 с.
- [2] Пельчарська І. В., Шеремета М. М. Про розподіл значень і коефіцієнти степеневого розвинення цілої функції // Доп. НАН України. – 2005. – № 5. – С. 21–25.
- [3] Андрусяк І. В. Нулі і коефіцієнти аналітичних функцій // Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка". – 2008. – № 625. – С. 43–47.
- [4] Філевич П. В., Шеремета М. М. Про правильну зміну основних характеристик цілої функції // Укр. мат. журн. – 2003. – Т. 55, № 6. – С. 840–849.
- [5] Леонтьев А. Ф. Ряды экспонент. – М.: Наука, 1976. – 536 с.
- [6] Заболоцкий Н. В., Шеремета М. Н. О медленном возрастании основных характеристик целых функций // Мат. заметки. – 1999. Т. 65, № 2. – С. 206–214.
- [7] Filevych P. V., Mahola M. P. The angular value distribution of random analytic functions // Mat. Stud. – 2012. – V. 37, № 1. – P. 34–51.
- [8] Евграфов М. А. Асимптотические оценки и целые функции. – М.: Наука, 1979. – 320 с.

КОЭФИЦИЕНТЫ СТЕПЕННОГО РАЗВИТИЯ
И a -ТОЧКИ ЦЕЛОЙ ФУНКЦИИАндрусяк І. В.^a, Філевич П. В.^b^a *Национальный университет "Львівська політехніка"*
ул. С. Бандеры, 12, 79013, Львов, Украина^b *Прикарпатский национальный университет имени Василия Стефанюка*
ул. Шевченко, 57, 76025, г. Ивано-Франковск, Украина

Для трансцендентных целых функций установлено связь между скоростью стремления к ∞ последовательности их a -точек и скоростью стремления к 0 последовательности их тейлоровских коэффициентов.

Ключевые слова: целая функция, a -точка, считающая функция a -точек, усредненная считающая функция a -точек, максимальный член, центральный индекс, максимум модуля, характеристика Неванлинны.

2000 MSC: 30D20, 30D35

УДК: 517.53

THE COEFFICIENTS OF POWER EXPANSION
AND a -POINTS OF ENTIRE FUNCTIONAndrusyak I. V.^a, Filevych P. V.^b^a *Lviv Polytechnic National University*
12, S. Bandery Str., Lviv, 79013, Ukraine^b *Vasyl Stefanyk Precarpathian National University*
57, Shevchenko Str., 76018, Ivano-Frankivsk, Ukraine

For transcendental entire functions the connection between the rate of tendency to ∞ for the sequence of their a -points and the rate of tendency to 0 for the sequence of their Taylor's coefficients are investigated.

Key words: entire function, a -point, counting function of a -points, integrated counting function of a -points, maximal term, central index, maximum modulus, Nevanlinna characteristic.

2000 MSC: 30D20, 30D35

UDK: 517.53