

ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА ДЛЯ ДІАГНОСТИКИ НЕОДНОРІДНОЇ АТМОСФЕРИ СОНЦЯ: СПОСТЕРЕЖЕННЯ В ЛІНІЇ $\lambda 4554.03 \text{ \AA}$ ВА II

Стоділка М. І.^{a, b}, Скульський М. Ю.^b

^a *Астрономічна обсерваторія Львівського національного університету імені Івана Франка,
вул. Кирила і Мефодія, 8, Львів, 79005, Україна*

^b *Національний університет “Львівська політехніка”
вул. С. Бандери, 12, Львів, 79013, Україна*

(Отримано 22 вересня 2014 р.)

Розглянуто обернену задачу для діагностики неоднорідної атмосфери Сонця за профілями фраунгоферових ліній, зокрема лінії іонізованого барію $\lambda 4554.03 \text{ \AA}$. Стратифікація параметрів атмосфери визначається із умови найкращого узгодження теоретичних профілів з експериментальними. Задача розв'язана з використанням функцій відклику, для представлення яких використано метод коротких характеристик та тихонівських стабілізаторів. У роботі досліджено діагностичні можливості лінії іонізованого барію $\lambda 4554.03 \text{ \AA}$. Результати тестування показують, що відтворені параметри добре узгоджуються з вихідною моделлю в області чутливості вибраної лінії.

Ключові слова: інверсні методи, перенесення випромінювання, діагностика атмосфери Сонця.

PACS: 97.10.Ex

УДК: 523.942

Вступ

Оскільки спектральні лінії відображають фізичні умови тих шарів атмосфери зорі, де вони утворюються, то дослідження спектрів Сонця та зір дає змогу отримати інформацію про фізичні умови, які можна описати набором відповідних параметрів – температура, густина, швидкість тощо, що змінюються і вздовж просторових координат, і в часі.

Покращення точності та роздільної здатності спектральних приладів дає можливість отримати більше інформації із спостережуваних даних; при цьому виникає потреба в розвитку витончених методів, які б максимально враховували механізми утворення ліній і були б здатні відтворити спостережувані особливості. Поставлену задачу розв'язують інверсними методами, що відтворюють стратифікацію параметрів шляхом підгонки синтезованих і експериментальних даних і дають змогу в певний спосіб отримати напівемпіричні моделі атмосфери.

Перші спроби отримати стратифікацію параметрів атмосфери зводились до побудови моделей атмосфер методом спроб та помилок за допомогою синтезу теоретичних профілів і порівняння їх із спостережуваними. Звичайно, такий підхід громіздкий і, основне, малоефективний навіть під час дослідження по одній лінії.

У другому підході розв'язання інверсної задачі зводиться до знаходження функції джерела [1,2]. Так, в роботі [1] функцію джерела представлено лінійною кусково-неперервною апроксимацією; задача зводиться до знаходження на основі експериментальних даних параметрів такої апроксимації. У роботах

Теплицької та ін. [2] під час розв'язання рівняння переносу як рівняння Фредгольма I роду, використано метод регуляризації за Тихоновим для знаходження функції джерела в лінії. На жаль, отриманої інформації замало для відтворення параметрів атмосфери.

У третьому підході для полегшення підгонки даних використовують функції відклику, які ввели в аналіз спектральних ліній Беккерс і Мілкей [3]: функція відклику відображає чутливість лінії поглинання на конкретній довжині хвилі до локальних варіацій фізичних умов вздовж променя зору. Усебічний аналіз чутливості функцій відклику різних спектральних ліній до параметрів моделі атмосфери зроблено в [4]. Функції відклику набули популярності після того, як в [5] було запропоновано оригінальний інверсний метод для дослідження профілів Стокса спектральних ліній у наближенні локальної термодинамічної рівноваги (ЛТР) для одновимірної плоскопаралельної атмосфери. Інверсний код дає змогу отримати стратифікацію з глибиною таких параметрів, як: температура, тиск, вектор магнітного поля, поле швидкостей. Розроблена стратегія була розвинута в роботах: [6] – не-ЛТР інверсний метод для спектральних ліній (запропоновано наближення фіксованих не-ЛТР коефіцієнтів – FDC для швидкого обчислення функцій відклику), [7] – розширення методу, запропонованого в [6], для нерівноважного перенесення поляризованого випромінювання. У всіх схемах для найкращої підгонки даних застосовується метод найменших квадратів. Розроблені методи успішно застосували для вивчення сонячних плям [8], тонких магнітних трубок [9], сонячної грануляції [10,11], фотосферних осциляцій Сонця [12], мікроструктурованих

магнітних атмосфер [13], коливань у сонячних плямах [14] та магнітних трубках [15], дослідження розподілу магнітного поля та хімічного складу по верхній зорі [16].

У [17] застосовано Фур'є-аналіз для спектра, що дало змогу за відхиленням синтезованих і експериментальних профілів отримати тільки середні значення температури, швидкості та їхні градієнти. Інверсні методи є ефективним і багатообіцяючим підходом під час дослідження фізичних умов в атмосферах Сонця та зір на основі результатів спостережень і з низькою, і з високою просторовою роздільною здатністю. Поряд з інверсними методами застосовується моделювання фізичних процесів; цей підхід громіздкий в обчислювальному відношенні. А для числових розрахунків доводиться робити низку фізичних спрощень. Інверсні методи та моделювання фізичних процесів є взаємодоповнюючими підходами під час дослідження атмосфери Сонця та зір: перший підхід дає змогу отримати напівемпіричні моделі атмосфер, неоднорідностей, їх індивідуальні властивості, тоді як другий дає теоретичні моделі, їх розгортку в просторі та часі, дає змогу краще зрозуміти фізику явищ, що відбуваються в досліджуваних об'єктах.

I. Постановка задачі

Розглядаємо неоднорідну незбурену атмосферу Сонця як квазістаціонарну, тобто на нижній границі виконується умова горизонтального балансу тисків; всередині неоднорідностей такої атмосфери загальний тиск визначається статичним і динамічним тиском, зумовленим рухом речовини, та тиском магнітного поля:

$$P_{mid} = n_{tot}kT + \rho \frac{v^2}{2} + \frac{B^2}{8\pi},$$

де P_{mid} – повний газовий тиск для усередненої атмосфери; n_{tot} – загальна концентрація частинок, причому $n_{tot} = n + n_e$, n та n_e – концентрація важких частинок та електронів; ρ – густина речовини, $v^2 = V_{micro}^2 + V_{macro}^2 + V_{los}^2$, де V_{micro} , V_{macro} , V_{los} – мікротурбулентна швидкість, макротурбулентна швидкість та швидкість руху речовини вздовж поля зору, ці три величини задають поле швидкостей. Вхідними даними є: профілі ліній поглинання хімічного елемента, який розглядається, абсолютні значення інтенсивності в континуумі кожної лінії, стратифікація газового тиску у вибраній моделі спокійного Сонця, а також набір відповідних атомних параметрів.

Задача зводиться до знаходження стратифікації концентрації атомів водню, електронів, температури та поля швидкості з умови найкращого узгодження теоретичних профілів з експериментальними. Поставлена задача є оберненою і, як і всі обернені задачі – некоректною. Некоректність можна обійти, використовуючи спеціальні алгоритми обернення матриці чи вводячи спеціальні тихонівські стабі-

лізатори, які певним способом обмежують поведінку розв'язку; другий підхід більш обіцяючий. Розв'язок задачі шукаємо методом ітерацій: тобто, враховуючи використовувану модель атмосфери рахуємо теоретичні профілі ліній, по яких визначаємо поправки до параметрів моделі і т. д., поки не виконається умова збіжності ітераційної процедури.

Під час розв'язання подібних задач використовують функції відклику, що описують чутливість профілів ліній до варіації параметрів моделі.

II. Функції відклику

Нехай $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ – вектор, що задає стратифікацію x параметра по глибині атмосфери, а $d\mathbf{x}$ – вектор, що описує його варіацію, тобто незначне збурення параметра x в кожній точці атмосфери. Тоді за відсутності магнітного поля рівняння переносу випромінювання для моделі атмосфери, що задається x параметрами, матимуть вигляд

$$\frac{dI}{dl} = \chi(S - I), \quad (1)$$

а для моделі з $x + \delta x$ параметрами

$$\frac{d(I + \delta I)}{dl} = (\chi + \delta\chi)(S + \delta S - I - \delta I), \quad (2)$$

де I – інтенсивність випромінювання; S – функція джерела; dl – зміна геометричної глибини вздовж напрямку поширення променя; χ – коефіцієнт поглинання. Звідси, врахувавши (1), отримуємо рівняння переносу для варіації δI :

$$\frac{d\delta I}{d\tau} = \delta I - \delta S^{ef}, \quad (3)$$

де $\delta S^{ef} = S \frac{\delta\eta}{\eta} - I \frac{\delta\chi}{\chi}$, τ – оптична глибина; η – коефіцієнт випромінювання.

Для формального розв'язання рівняння (3) використовуємо метод коротких характеристик [18]: будемо вважати, що функція джерела міняється лінійно між двома сусідніми точками; тоді, використавши відоме співвідношення формального розв'язання, для двох сусідніх точок атмосфери вздовж напрямку поширення променя маємо:

$$\delta I_n = \delta I_{n+1} e^{-\Delta\tau_{n+1,n}} + a_n \delta S_n^{ef} + b_n \delta S_{n+1}^{ef} \quad (4)$$

де

$$b_n = (1 - (\Delta\tau_{n+1,n} + 1)e^{-\Delta\tau_{n+1,n}}) / \Delta\tau_{n+1,n}$$

$a_n = 1 - e^{-\Delta\tau_{n+1,n}} - b_n$; $\Delta\tau_{n+1,n} = \tau_{n+1} - \tau_n$ – оптична глибина між точками $n + 1, n$; ($\tau = 0$ – для верхньої точки атмосфери). Оскільки оптична глибина в нижніх шарах різко зростає, то природно вважати, що $\Delta\tau_{N+1,N} \gg 1$, $n = N$ – нижня точка. Тоді:

$$a_n = 1, b_N = 0,$$

а

$$\delta I_N = \delta S_N$$

Використавши рекурентне співвідношення (4), для інтенсивності, що виходить з атмосфери, отримуємо вираз:

$$\begin{aligned} \delta I_1 = & \delta S_N (a_N e^{-\tau_{N,1}} + b_{N-1} e^{-\tau_{N-1,1}}) + \\ & + \delta S_{N-1} (a_{N-1} e^{-\tau_{N-1,1}} + b_{N-2} e^{-\tau_{N-2,1}}) + \dots + \\ & + \delta S_2 (a_2 e^{-\tau_{2,1}} + b_1) + \delta S_1 a_1. \end{aligned} \quad (5)$$

Як бачимо, збурення, що йде з n -го шару атмосфери, визначається зміною функцій джерела в шарах n та $n+1$, тобто враховується вплив сусідніх шарів. Зазначимо, що вираз для вихідної інтенсивності (5), отриманий за допомогою рекурентного співвідношення методу коротких характеристик, точніший, ніж аналогічний вираз, записаний через функції внеску; це особливо стосується шарів з великими оптичними глибинами ($\tau \geq 1$). Крім того, точність представлення (5) можна збільшити, застосувавши, наприклад, параболічну інтерполяцію для збурень функції джерела.

Для визначення збурення функції джерела застосовуємо локальне наближення, тобто будемо вважати, що δS_n^{ef} визначається тільки параметрами точки n :

$$\delta S_n^{ef} = \sum_{k=1}^3 \partial S_n^{ef} / \partial x_n^{(k)} \delta x_n^{(k)}, \quad (6)$$

де верхній індекс k відповідає за температуру ($k=1$), швидкість руху речовини вздовж променя зору ($k=2$), мікротурбулентну швидкість ($k=3$) та макротурбулентну швидкість ($k=4$); макротурбулентна швидкість буде введена нижче. Ми вважаємо, що макротурбулентна швидкість для кожної лінії індивідуальна, тоді як решта параметрів спільні для всіх ліній і змінюються з глибиною. Підставивши (6) в (5), отримуємо:

$$\delta I_{1,i} = \sum_{k=1}^3 \sum_{n=1}^N R_{n,i}^{(k)} \delta x_n^{(k)}, \quad (7)$$

де $R_{n,i}^{(k)}$ – функції відклику на $\lambda = \lambda_i$ до збурень k -го параметра для n -го шару атмосфери, причому:

$$R_{n,i}^{(k)} = \partial S_n^{ef} / \partial x_n^{(k)} (a_n \exp(-\tau_{n,1}) + b_n \exp(-\tau_{n-1,1})). \quad (8)$$

Зазначимо, що в не-ЛТР випадку функція джерела залежить також від інтенсивності, яка визначається станом сусідніх шарів атмосфери. Отже, функція джерела перестає бути локальною. Однак, згідно з [7] відхилення від локальності проявляються тільки для функції відклику щодо температури для сильних ліній і то у верхніх шарах атмосфери.

Навіть під час дослідження спектрів з високою просторовою роздільною здатністю виникає потреба вводити мікротурбулентну швидкість, що моделює дрібномасштабні рухи. Ми також вводимо макротурбулентну швидкість, яка відображає турбулентність нисхідних та висхідних потоків на великих масштабах і призводить до додаткового розширення лінії. Швидкість руху речовини вздовж променя зору викликає зміщення центра лінії і формує її асиметрію.

Вплив макротурбулентної швидкості на профіль лінії будемо описувати згортокою профіля з гауссіаною, яка визначається V_{macro} , тобто :

$$\tilde{I}_{1,i} = \sum_{i'=-L}^L c_{i'} I_{1,i+i'}, \quad (9)$$

де коефіцієнти $c_{i'}$ дорівнюють добутку гауссіани при $\lambda = \lambda_{i'}$ на ваговий множник, який визначається методом інтегрування. Отже,

$$\delta \tilde{I}_{1,i} = \sum_{k=1}^3 \sum_{n=1}^N \tilde{R}_{n,i}^{(k)} \delta x_n^{(k)} + \tilde{R}_i^{(4)} \delta x^{(4)}, \quad (10)$$

де

$$\tilde{R}_{n,1}^{(k)} = \sum_{i'=-L}^L c_{i'} R_{n,i+i'}^{(k)}, \quad \tilde{R}_i^{(4)} = \partial \tilde{I}_{1,i} / \partial x^{(4)}$$

– функції відклику із врахуванням макротурбулентності.

Згідно з (8) функції відклику визначаються частинними похідними $\partial S_n^{ef} / \partial x_n^{(k)}$; врахувавши вираз для δS_n^{ef} , отримуємо:

$$\partial S_n^{ef} / \partial x_n^{(k)} = S_n / \eta_n \cdot \partial \eta_n / \partial x_n^{(k)} - I_n / \chi_n \cdot \partial \chi_n / \partial x_n^{(k)},$$

де $\eta = \eta_l + \eta_c$, $\chi = \chi_l + \chi_c$, η_l , χ_l , η_c , χ_c – коефіцієнти випромінювання та поглинання в лінії та континуумі, відповідно.

Коефіцієнти поглинання та випромінювання в лінії задаються реальними заселеностями рівнів; $n_i = \beta_i \cdot n_i^*$, де n_i^* – рівноважні заселеності рівнів; β_i – коефіцієнти відхилення від ЛТР; при обрахуванні функцій відклику вважатимемо їх фіксованими – FDC наближення [6]. Не-ЛТР коефіцієнти визначаються розв'язком задачі переносу випромінювання. Отже, відповідні похідні при обчисленні функцій відклику будемо визначати, як в ЛТР наближенні. Оскільки аналітичні вирази для похідних (наприклад по T) доволі громіздкі, то зручно порахувати η та χ в трьох точках $\mathbf{x} - \Delta \mathbf{x}$, \mathbf{x} , $\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}$, а похідну визначити по параболі чи сплайну, проведених через ці точки.

Функції відклику ми зображатимемо двовимірним масивом ($I \times N$) де N – число точок по глибині; I – число точок по λ для кожної лінії. У [5] запропоновано простий підхід для зменшення розмірності масиву, що зображає функцію відклику. Так справді можна ввести дещо видозмінені функції відклику, що визначають збурення δI , через значення функцій в вузлових точках l , що залишаються після відповідного прорідження масиву. Нехай $\mathbf{M}(N \times N')$ матриця, що інтерполіє значення змінної $\delta \mathbf{x}(N)$ через значення в вузлових точках $\delta \mathbf{x}'(N')$, N' – число вузлів; $\delta \mathbf{x} = \mathbf{M} \delta \mathbf{x}'$. Матрицю \mathbf{M} легко отримати, маючи відповідне інтерполяційне співвідношення. Отже, $\delta \mathbf{I} = \tilde{\mathbf{R}} \delta \mathbf{x} = \tilde{\mathbf{R}} \mathbf{M} \delta \mathbf{x}' = \tilde{\mathbf{R}}' \delta \mathbf{x}'$; матриця $\tilde{\mathbf{R}}'$ має розмірність ($I \times N'$). Таке перетворення дає змогу проводити стиснення інформації, що часто використовують в інверсних задачах, для зменшення розмірності матриці, які доводиться обертати.

III. Перенесення випромінювання

Невід'ємною частиною інверсної задачі є розв'язання рівняння переносу випромінювання в межах певної моделі атмосфери. Задача доволі спрощується, якщо виконується умова локальної термодинамічної рівноваги, бо в цьому разі функція джерела відома – вона дорівнює функції Планка. Тоді легко отримати вихідну інтенсивність

$$I(t) = \int_0^{\infty} B(t - \tau) e^{-\tau} d\tau.$$

Для чисельного знаходження інтенсивності ми використовуємо рекурентне співвідношення методу коротких характеристик:

$$I_n = I_{n+1} e^{-\Delta\tau_{n+1,n}} + S_n (1 - e^{-\Delta\tau_{n+1,n}}) + \frac{S_{n+1} - S_n}{\Delta\tau_{n+1,n}} \cdot (1 - (\Delta\tau_{n+1,n} + 1) e^{-\Delta\tau_{n+1,n}}),$$

тобто, знаючи інтенсивність на кожній границі: $I_N = B_N$, легко отримати I_1 .

У не-ЛТР випадку доводиться знаходити сумісний розв'язок рівнянь переносу та статрівноваги: нерівноважну багаторівневу задачу переносу розв'язуємо методом прискореної Λ -ітерації з використанням вкладених сіток та прискоренням збіжності [18].

IV. Визначення параметрів моделі

Параметри моделі будемо вибирати так, щоб теоретичні профілі, пораховані в межах отриманої моделі, найкраще співпадали зі спостережуваними. Для оцінки близькості профілів введемо цільову функцію

$$\chi^2 = \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^M (I_i^{obs.} - \tilde{I}_{1,i})^2 / \sigma_i^2,$$

де ν – число ступенів вільності (число експериментальних значень мінус число параметрів моделі); або ж тільки число експериментальних точок, σ_i – деякі вагові множники, вони можуть характеризувати, наприклад, похибки вимірювань, або ж їх можна використовувати для зміни внеску різних участків лінії в цільову функцію. Якщо ν – число ступенів вільності, а σ_i – похибки вимірювань, то маємо критерій χ^2 , в іншому випадку – найменші квадрати.

Для простоти всі подальші співвідношення будемо записувати тільки для однієї лінії; насправді, в цільову функцію входять дані всіх вибраних ліній. Крім того, надалі вважатимемо, що цільова функція унімодальна.

Нехай \mathbf{x} – сукупність параметрів, якими представлено модель, а $\delta\mathbf{x}$ – їхня варіація, що мінімізує цільову функцію; тоді, розклавши χ^2 в ряд Тейлора з точністю до другого порядку, отримуємо:

$$\chi^2(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) = \chi^2(\mathbf{x}) + (\nabla^T \chi^2) \delta\mathbf{x} + \frac{1}{2} \delta\mathbf{x}^T \mathbf{D} \delta\mathbf{x}, \quad (11)$$

де

$$\partial \chi^2 / \partial x_n = -\frac{2}{\nu} \sum_{i=1}^M (I_i^{obs.} - \tilde{I}_{1,i}) / \sigma_i^2 \cdot \partial \tilde{I}_{1,i}(\mathbf{x}) / \partial x_n,$$

\mathbf{D} – матриця Гессе, що визначається другими похідними χ^2 , тобто

$$D_{kj} = \frac{2}{\nu} \sum_{i=1}^M 1 / \sigma_i^2 [\partial \tilde{I}_{1,i} / \partial x_k \cdot \partial \tilde{I}_{1,i} / \partial x_j - (I_i^{obs.} - \tilde{I}_{1,i}) \partial^2 \tilde{I}_{1,i} / \partial x_k \partial x_j].$$

Другий доданок поблизу мінімуму малий; крім того для успішно вибраної моделі вираз $(I_i^{obs.} - \tilde{I}_{1,i})$ дає похибки, що не корелюють між собою. Отже, під час підсумовування по i другий доданок пропадає; крім того, використання других похідних збільшує чутливість моделі до шумів. Враховуючи наведене, матрицю Гессе представимо лише першим доданком:

$$D_{kj} \approx 2 / \nu \sum_{i=1}^M 1 / \sigma_i^2 \partial \tilde{I}_{1,i} / \partial x_k \cdot \partial \tilde{I}_{1,i} / \partial x_j.$$

Як бачимо, перші та другі похідні доволі просто описуються відповідними функціями відклику.

Із співвідношення (11) маємо:

$$\chi^2(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) - \chi^2(\mathbf{x}) = \delta\mathbf{x}^T \nabla \chi^2 + \frac{1}{2} \delta\mathbf{x}^T \mathbf{D} \delta\mathbf{x}.$$

З нього легко отримати вираз, яким апроксимується градієнт χ^2 :

$$\delta \chi^2 / \delta x_i = \nabla_i \chi^2 + \sum_j D_{ij} \delta x_j.$$

Оскільки в області мінімуму градієнт χ^2 близький до нуля, то отримуємо систему рівнянь:

$$\mathbf{D} \delta\mathbf{x} = -\nabla \chi^2, \quad (12)$$

розв'язок якої дає шукані збурення, що мінімізують цільову функцію:

$$\mathbf{x}^{new} = \mathbf{x}^{old} - \mathbf{D}^{-1} \nabla \chi^2(\mathbf{x}^{old}).$$

A Тихонівські стабілізатори

Відомо, що результати відтворення інверсними методами залежать від початкових значень відтворюваних параметрів [11]. Так, згідно з [11] похибка відтвореної температури у верхній фотосфері порядку декількох тисяч градусів (навіть за великої кількості спостережуваних ліній). У роботі [10] запропоновано доповнювати стандартну цільову функцію виразами (регуляризація), що забезпечує гладкість розв'язання і зменшує його осциляції; це дає змогу отримати достовірнішу картину сонячної граунуляції: стратифікацію температури, поле швидкостей тощо.

Інверсна задача належить до числа некоректних задач, оскільки існує певна множина розв'язків, що задовольняють деякий критерій, за яким отримують ці розв'язки.

Нехай χ^2 – введена вище цільова функція, а $S(x)$ – тихонівський стабілізатор [22] – вираз, який враховує а рїогї інформацію про розв'язок x : тип залежності, фізику процесу, сукупність певних обмежень тощо, а x – безрозмірний параметр моделі. Тепер будемо мінімізувати вираз

$$\chi_{reg}^2 = \chi^2 + \alpha S(x), \quad (13)$$

де χ_{reg}^2 – модифікована цільова функція; α – параметр регуляризації. Його визначають різними способами: а) за похибкою спостережуваних даних; б) за залежністю розв'язку від α , наприклад. Перший підхід доволі грубий, другий – вимагає значних витрат обчислювального часу, а відповідна залежність розв'язку від α не завжди проявляється. Тому ми будемо визначати параметр регуляризації за тестовими задачами з умови найкращого відтворення параметрів заданої моделі з вимогою незалежності розв'язань від початкових оцінок і відсутності фальшивих осциляцій розв'язків.

Розкладемо вираз (13) в ряд Тейлора; вважаючи, що $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \delta\mathbf{x}$, обмежимося другим порядком:

$$\chi_{reg}^2(\mathbf{x}) = \chi^2(\mathbf{x}_0) + \nabla^T \chi^2(\mathbf{x}_0) \delta\mathbf{x} + \frac{1}{2} \delta\mathbf{x}^T \mathbf{D} \delta\mathbf{x} + \alpha \mathbf{x}_0^T \mathbf{H} \mathbf{x}_0 + 2\alpha \mathbf{x}_0^T \mathbf{H} \delta\mathbf{x} + \alpha \delta\mathbf{x}^T \mathbf{H} \delta\mathbf{x}.$$

У наших позначеннях \mathbf{D} – матриця Гессе, яка визначається другими похідними від χ^2 .

Оскільки в точці екстремуму перша похідна дорівнює нулю, то:

$$\delta\mathbf{x} = -\frac{\nabla \chi^2(\mathbf{x}_0) + 2\alpha \mathbf{H} \mathbf{x}_0}{\mathbf{D}(\mathbf{x}_0) + 2\alpha \mathbf{H}}.$$

Як бачимо, внесення стабілізатора в цільову функцію дещо видозмінює основне рівняння оберненої задачі:

$$\delta\mathbf{x} = -\frac{\nabla \chi^2}{\mathbf{D}}.$$

Завначимо, при $\alpha \rightarrow \infty$ $\delta\mathbf{x} \rightarrow -\mathbf{x}_0$, а отже, $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \delta\mathbf{x} \rightarrow 0$.

За наявності швидкого коду оберненої задачі легко підібрати відповідні параметри регуляризації. Завначимо, що розв'язки слабо та плавно залежать від них.

Для чисельного розв'язку системи рівнянь ми використали метод Левенберга-Марквардта [19], який є комбінацією методу найшвидшого спуску (при \mathbf{x} далеких від оптимальних) та формули (12) для знаходження розв'язків поблизу мінімуму. Щоб забезпечити плавний перехід від одного підходу до другого, використовують параметр λ (якщо \mathbf{x} далеке від оптимального значення, то $\lambda > 1$) яким модифікуються діагональні елементи матриці \mathbf{D} : $d_{ii} \rightarrow d_{ii}(1 + \lambda)$.

Матриця \mathbf{D} погано обумовлена і може бути виродженою; під час її обертання ми використовували SVD алгоритм [19]. Виродженість матриці породжена кореляцією параметрів сусідніх точок атмосфери та відсутністю чутливості деяких шарів до відповідних збурень. Згадана кореляція збільшується за збільшення числа вузлів, тобто за збільшення розмірів матриці \mathbf{D} .

Профілі ліній не однаково чутливі до різних фізичних параметрів; так чутливість функцій відклику до температури значно більша, ніж чутливість до швидкостей. Щоб врахувати неоднакову чутливість функцій відклику до різних параметрів моделі ми, як у роботі [5], використали модифікований SVD метод.

Отже, маючи уточнені значення параметрів моделі, для поточної моделі розв'язуємо задачу переносу випромінювання і знаходимо не-ЛТР коефіцієнти β_i ; а по них – теоретичні профілі, які знову використовуються для найкращої підгонки до спостережуваних даних – χ^2 мінімізації і т.д.

V. Результати тестування

В умовах атмосфери Сонця атоми барію перебувають в іонізованому стані. Тому сонячний спектр барію представлений резонансною лінією нейтральних атомів та великою кількістю ліній іонізованого барію. Серед спектральних ліній іонів з погляду діагностичних можливостей інтерес становлять дві лінії: λ 4554.03Å та λ 6496.90Å. Ці лінії мають високу чутливість до збурень фізичних умов в сонячній атмосфері, утворюються в широкому діапазоні висот – від нижньої фотосфери до нижньої хромосфери, охоплюючи у такий спосіб область температурного мінімуму; як лінії важкого елемента, вони чутливі винятково до конвективних та хвильових рухів. У сонячному спектрі ці лінії слабо блендовані. Лінії барію, поряд з іншими лініями, використовують для діагностики атмосфери Сонця. Так Р. Костик та ін. за спостереженнями в лінії барію λ 4554.03Å дослідили сонячну грануляцію від фотосфери до нижньої хромосфери [24].

Оскільки в нашому розпорядженні є люб'язно надані нам працівниками ГАО НАНУ дані спостережень Сонця з високою просторово-часовою роздільною здатністю в лінії Ва II λ 4554.03Å, ми дослідили діагностичні можливості саме цієї лінії. Дані спостережень з високим просторовим розділенням дозволяють розв'язанням оберненої задачі переносу випромінювання отримати структуру спостережуваної неоднорідної атмосфери Сонця: тобто стратифікацію температури, густини, тиску, магнітного поля, променевої швидкості тощо на висотах утворення спостережуваних ліній. Оскільки вибрана лінія утворюється в верхніх шарах атмосфери, необхідно розглядати нерівноважний перенос випромінювання.

Зазначимо, барій має сім стабільних ізотопів. Тільки для двох ізотопів (^{135}Ba та ^{137}Ba) спін ядра

відмінний від нуля, а тому виникає надтонке розщеплення рівнів. Загальне число субкомпонент лінії, зокрема надтонке розщеплення та ізотопічний зсув, становить 17.

Для перевірки достовірності відтворення фізичних умов в атмосфері Сонця нашим підходом ми для кожного вузла сітки 3D моделей Асплунда [23] (куби даних $N_x \cdot N_y \cdot N_z$, $N_x = N_y = 50$, $N_z = 41$ термодинамічних і кінематичних параметрів з просторовим кроком $\Delta x = \Delta y = 120 \text{ км}$, $\Delta h = 20 \text{ км}$ і часовим кроком $\Delta t = 1 \text{ хв}$) порахували профіль лінії. Отриманий набір профілів подали на вхід оберненої задачі переносу випромінювання і отримали відтворену модель неоднорідної атмосфери. За параметрами наявної та відтвореної моделей легко отримати оцінку якості відтворення.

На рис. 1 показані задані згідно з моделлю та відтворені варіації температури на висоті $h = 400 \text{ км}$.

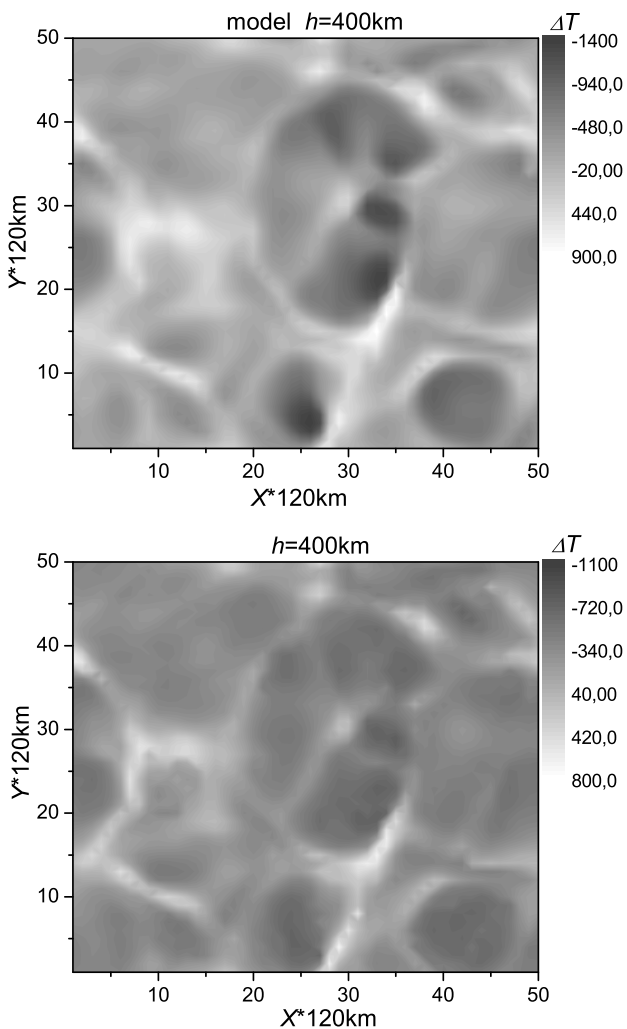


Рис. 1. Варіації температури на висоті $h = 400 \text{ км}$: вгорі – модель; внизу – відтворені

Як бачимо, температурна структура сонячної атмосфери відтворюється доволі непогано: областям з пониженою температурою відповідають гранули, а областям з підвищеною температурою – міжгранульні прошарки. Тут варто відзначити, через температурну інверсію температура в гранулах понижується, а в міжгранулах, навпаки, підвищується.

На рис. 2 наведені відтворені варіації температури залежно від заданих. Згідно з отриманими даними, діапазон відтворених варіацій температури менший порівняно з модельними значеннями. Крім того, для великих температурних варіацій проявляється насичення під час їх відтворення. Цей ефект зумовлений дією стабілізаторів, які обмежують розбаланс розв'язків.

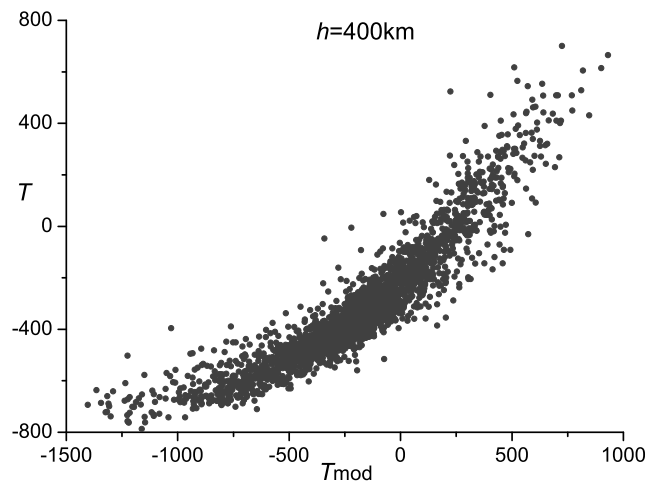


Рис. 2. Залежність відтворених варіацій температури від модельних значень (висота $h = 400 \text{ км}$)

Коефіцієнт кореляції між відтвореними та модельними значеннями варіацій температури на висоті $h = 400 \text{ км}$ порядку 0.91.

Висновки

Розроблений підхід дає змогу вивчати неоднорідності як квазістаціонарні утворення, що перебувають в незбуреній атмосфері, водночас відпадає проблема визначення глибин утворення ліній і прив'язки отриманих параметрів до відповідних шарів атмосфери.

Розв'язані пряма та обернена задачі нерівноважного переносу випромінювання в лініях барію.

Запропоновано оптимальні тихонівські стабілізатори для оберненої задачі.

Спостереження в лінії $\text{BaII } \lambda 4554.03 \text{ \AA}$ дозволяють відтворювати фізичні умови в шарах фотосфери та нижньої хромосфери Сонця: $0 \text{ км} < h < 600 \text{ км}$.

Лінія $\text{BaII } \lambda 4554.03 \text{ \AA}$ не чутлива до фізичних умов в шарах $h > 600 \text{ км}$.

Література

- [1] *Holt S. N.* *Astron. Astrophys.* **30**(2), 185 (1974).
- [2] *Теплицкая Р. Б., Турова И. П., Скочилов В. Г.* *Кинем. и физ. небес. тел.* **8**, №3, 27 (1992).
- [3] *Beckers J. M., Milkey R. W.* *Sol. Phys.* **43**, № 2, 289 (1975).
- [4] *Sheminova V. A.* *Astron. Astrophys.* **239**, 721 (1998).
- [5] *Ruiz Cobo B., I. C. del Toro Iniesta.* *Astrophys. J.* **398**, 398 (1992).
- [6] *Socas-Navarro H., Ruiz Cobo B. and Trujillo Bueno J.* *Astrophys. J.* **507**, 470 (1998).
- [7] *Socas-Navarro H., Trujillo Bueno J., Ruiz Cobo B.* *Astrophys. J.* **530**, 977 (2000).
- [8] *Collados M., Martinez Pillet V., Ruiz Cobo B., I. C. del Toro Iniesta and Vazquez M.* *Astron. Astrophys.* **291**, №2, 622 (1994).
- [9] *Bellot Rubio L. R., Ruiz Cobo B., Collados M.* *Astrophys. J.* **478**, L45 (1997).
- [10] *Frutiger C., Solanki S. K., Fligge M. and Bruls J.H.M.I.* *Astron. Astroph.* **358**(3), 1109 (2000).
- [11] *Borrero J. M. and Bellot Rubio L. R.* *Astron. Astrophys.* **358** (3), 1056 (2002).
- [12] *Ruiz Cobo B., Rodriguez Hidalgo I., Collados M.* *Astrophys. J.*, **488**, 462 (1997)
- [13] *Sanchez Almeida.* *Astrophys. J.* **491**, 993 (1997).
- [14] *Bellot L. R., Ruiz Cobo B., Rodriguez Hidalgo I.* *Astrophys. J.* **534**, 989 (2000).
- [15] *Bellot Rubio L. R., Ruiz Cobo B., Collador M.* *Astrophys. J.* **535**, 475 (2000).
- [16] *Piskunov N., Kochukhov O.* *Astron. Astroph.* **381**(2), 736 (2002).
- [17] *Mein P., Mein N., Malherbe J.M., Dame L.* *Astron. Astrophys.* **177**, 283 (1987).
- [18] *Стодилка М. І., Рикалюк Р. Є.* // *Журнал фіз. досл.* **2**, 427 (1998).
- [19] *Press W. H., Teukolsky S. A., Vetterling W. T., Flannery B. P.* *Numerical Recipies in Fortran* (Cambridge University Press, New York, 2 nd ed. (1992).
- [20] *Vernazza J. E., Avrett E. H., Loeser R.* *Astrophys. J. Suppl. Ser.* **45**, № 4, 635 (1981).
- [21] *Щужина Н. Г.* // *Кинем. и физ. небес. тел.* **14**, № 5, 415 (1998).
- [22] *Гончарський А. В., Черепашук А. М., Ягола А. Г.* *Некорректные задачи астрофизики.* – М.: Наука, 1985. – 349 с.
- [23] *Asplund M., Nordlund A., Trampedach R., Allende Prieto C., Stein R.F.* // *Astron. and Astrophys.* **359**, 729 (2000).
- [24] *Kostik R., Khomenko E., Shchukina N.* // *Astron. and Astrophys.* **506**, 1405 (2009).

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДИАГНОСТИКИ НЕОДНОРОДНОЙ АТМОСФЕРЫ СОЛНЦА: НАБЛЮДЕНИЯ В ЛИНИИ λ 4554.03 Å Ba IIСтодилка М. І.^{a,b}, Скульский М. Ю.^b^a *Астрономическая обсерватория Львовского национального университета имени Ивана Франко ул. Кирилла и Мефодия, 8, Львов, 79005, Украина*^b *Национальный университет "Львівська політехніка" ул. С. Бандеры, 12, Львов, 79013, Украина*

Рассмотрено обратную задачу для диагностики неоднородной атмосферы Солнца за профилями фраунгоферовых линий, в частности линии ионизированного бария λ 4554.03 Å. Стратификация параметров атмосферы определяется из условия наилучшего согласования теоретических профилей с экспериментальными. Задача решена с использованием функций отклика, для представления которых использован метод коротких характеристик, и тихоновских стабилизаторов. В работе проведено исследование диагностических возможностей линии ионизированного бария λ 4554.03 Å. Результаты тестирования показывают, что воспроизводимые параметры хорошо согласуются с исходной моделью в области чувствительности выбранной линии.

Ключевые слова: инверсные методы, перенос излучения, диагностика атмосферы Солнца.**PACS:** 97.10.Ex**УДК:** 523.942

INVERSE PROBLEM FOR INVESTIGATION OF INHOMOGENEOUS SOLAR ATMOSPHERE: OBSERVATIONS IN THE LINE λ 4554.03 Å BA II

Stodilka M. I.^{a, b}, Skulsky M. Yu.^b

^a*Ivan Franko National University, Astronomical Observatory,
8 Kyrylo and Mephody Str. 79005 Lviv, Ukraine*

^b*Lviv Polytechnic National University,
12 S. Bandera Str., 79013 Lviv, Ukraine*

The present paper deals with the analysis of inverse problem for the diagnostics of the inhomogeneous solar atmosphere using Fraunhofer lines, particular ionized barium line λ 4554.03 Å. The stratification of inhomogeneity parameters is obtained from the condition of theoretical and experimental profiles bestfit. When solving the problem we used the short characteristics method to represent the response functions and Tikhonov's stabilizers. This paper has studied the diagnostic capabilities of the ionized barium line λ 4554.03 Å. The test results show good coincidence of the reproduced parameters with the reference model in the layers of sensitivity for the selected line.

Key words: inverse problem, radiative transfer, diagnostics of the solar atmosphere.

PACS: 97.10.Ex

UDK: 523.942