

КОНЦЕНТРАЦІЯ НАПРУЖЕНЬ БІЛЯ КРУГОВОГО ОТВОРУ В ОРТОТРОПНИХ ПЛАСТИНКАХ З УРАХУВАННЯМ ДЕФОРМАЦІЇ ЗСУВУ

В. А. Лазько, Р. М. Махніцький, В. Л. Лозбень, О. Я. Бродяк, В. М. Гук

*Національний університет “Львівська політехніка”
вул. С. Бандери, 12, 79013, Львів, Україна*

(Отримано 27 березня 2018 р.)

Розглянуто задачу визначення концентрації напружень у полярно-ортотропній пластині із круглою апертурою. Задача розв’язується наближеними варіаційними методами. Проаналізовано вплив на напружений стан механічних та геометричних параметрів пластини.

Ключові слова: концентрація напружень, ортотропна пластина, полярна ортотропія, варіаційний метод.

2000 MSC: 74C05

УДК: 539.3

Вступ

Концентрацію напружень біля отворів у ізотропних і анізотропних пластинчатих елементах конструкцій на основі класичної теорії досліджував Г. М. Савін [1]. Однак під час розрахунку елементів конструкцій із нових композиційних матеріалів істотно врахування специфічних особливостей їхньої механічної поведінки, які не враховує класична теорія, зокрема, низької зсувної жорсткості.

Формулювання і розв’язання задач про концентрацію напружень біля отворів у трансверсально-ізотропних пластинках на основі теорії типу Тимошенко подано в роботі [2].

Для ортотропних пластинок (без будь-якого обмеження на характер ортотропії) задача істотно ускладнюється, оскільки змінні у розв’язуваній системі рівнянь відокремити не вдається. Для інтегрування цієї системи доцільно використовувати різні числові методи.

У цій роботі наведено формулювання і розроблено методику розв’язування задач про концентрацію напружень в анізотропних пластинках із полімерних композиційних матеріалів.

I. Постановка задачі

Розглянемо послаблену круговим отвором пластинку з циліндричною ортотропією [3]. Стан згину пластинки на основі теорії типу Тимошенко за відсутності масових і поверхневих сил описується такими рівняннями:

а) рівняння рівноваги

$$\frac{\partial(\rho Q_\rho)}{\partial \rho} + \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} = 0;$$

$$\frac{\partial(\rho M_\rho)}{\partial \rho} + \frac{\partial H_\theta}{\partial \theta} - M_\theta - \rho Q_\rho = 0; \quad (1)$$

$$\frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho^2 H_{\rho\theta})}{\partial \rho} - \rho Q_\theta = 0;$$

б) співвідношення пружності

$$M_\rho = D_1 \left[\frac{\partial \gamma_\rho}{\partial \rho} + \nu_2 \left(\frac{\gamma_\rho}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \gamma_\theta}{\partial \theta} \right) \right];$$

$$M_\theta = D_2 \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \gamma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\gamma_\rho}{\rho} + \nu_1 \frac{\partial \gamma_\rho}{\partial \rho} \right);$$

$$H_{\rho\theta} = D_{12} \left(\frac{\partial \gamma_\theta}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \gamma_\rho}{\partial \theta} - \frac{\gamma_\theta}{\rho} \right); \quad (2)$$

$$Q_\rho = \Lambda_{13} \left(\frac{\partial w}{\partial \rho} + \gamma_\rho \right);$$

$$Q_\theta = \Lambda_{23} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \gamma_\theta \right),$$

де $\gamma_\rho, \gamma_\theta, w$ – узагальнені переміщення;
 $D_i = \frac{2E_i h^3}{3(1 - \nu_1 \nu_2)}$, $\Lambda_{13} = 2k' h G_{13}$ – жорсткості пластинки на згин і поперечний зсув відповідно; $D_{12} = \frac{2}{3} h^3 G_{12}$; $2h$ – товщина пластини; $E_i, G_{12}, G_{13}, \nu_i$ ($i = 1, 2$) – пружні сталі матеріалу пластинки, віднесені до полярних координат; $k' = \frac{5}{6}$ – коефіцієнт зсуву.

Підставляючи (2) в (1), отримуємо систему рівнянь рівноваги в узагальнених переміщеннях виду

$$L_{i1} \gamma_\rho + L_{i2} \gamma_\theta + L_{i3} w = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \quad (3)$$

де L_{ij} – диференціальні оператори вигляду

$$L_{11} = \Lambda_{13} \left(1 + \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right); \quad L_{12} = \Lambda_{23} \frac{\partial}{\partial \theta};$$

$$L_{13} = \Lambda_{13} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} + \rho \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \right) + \Lambda_{23} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2};$$

$$L_{22} = (D_1 v_2 + D_{12}) \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial \theta} - (D_2 + D_{12}) \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta};$$

$$L_{23} = -\rho \Lambda_{23} \frac{\partial}{\partial \rho};$$

$$L_{31} = (D_2 v_2 + D_{12}) \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial \theta} + (D_2 + D_{12}) \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta};$$

$$L_{32} = D_2 \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + D_{12} \left(\rho \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - D_2 \frac{1}{\rho} - \rho \Lambda_{13} \right).$$

Задача полягає у знаходженні розв'язку системи (3), що задовольняє такі граничні умови:

а) вільний отвір

$$M_\rho + M_\rho^0 = 0; \quad H_{\rho\theta} + H_{\rho\theta}^0 = 0;$$

$$Q_\rho + Q_\rho^0 = 0 \quad (\rho = a); \quad (4)$$

б) абсолютно жорстке включення

$$\gamma_\rho + \gamma_\rho^0 = 0; \quad \gamma_\theta + \gamma_\theta^0 = 0;$$

$$w + w^0 = 0 \quad (\rho = a), \quad (5)$$

де величини з індексом "0" – силові й деформаційні фактори для суцільної (не послабленої отвором) пластинки.

Інтегрування системи (3) в загальному вигляді неможливе. Нижче запропоновано наближений метод розв'язування задач про концентрацію напружень, який ґрунтується на застосуванні варіаційних методів.

II. Метод розв'язування

Розв'язок системи (3) шукатимемо у вигляді подвійних рядів

$$w = a \sum_{m=0}^p \sum_{t=1}^s A_{mt}^1 \left(\frac{a}{\rho} \right)^{2t} \cos 2m\theta;$$

$$\gamma_\rho = \sum_{m=0}^p \sum_{t=1}^s A_{mt}^2 \left(\frac{a}{\rho} \right)^{2t+1} \cos 2m\theta; \quad (6)$$

$$\gamma_\theta = \sum_{m=1}^p \sum_{t=1}^s A_{mt}^3 \left(\frac{a}{\rho} \right)^{2t+1} \sin 2m\theta,$$

причому A_{mt}^i – невідомі коефіцієнти; a – параметр, що характеризує розмір неоднорідності.

Використовуючи представлення (6), граничні умови (4), (5) можна подати у вигляді

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{t=1}^s A_{mt}^i a_{ij}^{mt} = f_m^i \quad (7)$$

$$(i = 1, 2, 3; \quad m = 0, 1, \dots, p; \quad A_{0t}^3 = 0).$$

Коефіцієнти a_{ij}^{mt} і вільні члени f_m^i алгебраїчної системи рівнянь (3) залежать від виду граничних умов.

Для першої основної граничної задачі разом із рівняннями (7) потрібно розв'язати варіаційне рівняння виду

$$\delta V + \sum_{j=1}^3 \sum_{m=0}^p \Lambda_j^m \left(\sum_{i=1}^3 \sum_{t=1}^s \delta A_{mt}^i a_{ij}^{mt} \right) = 0, \quad (8)$$

де Λ_j^m – множники Лагранжа; δV – варіація пружної енергії деформації пластинки, яку можна подати формулою

$$\delta V = \int_a^\infty \int_0^{2\pi} \sum_{i=1}^3 \rho \left(\sum_{j=1}^3 L_{ij} u_j \right) \delta u_i d\rho d\theta, \quad (9)$$

причому $u_1 = w$; $u_2 = \gamma_\rho$; $u_3 = \gamma_\theta$.

Варіації в (8) беруться за довільними сталими A_{mt}^i .

Використовуючи розв'язки (6), з варіаційного рівняння (8) (прирівнюючи до нуля члени при однакових варіаціях) отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{i=1}^3 \left(\sum_{t=1}^s A_{mt}^i b_{ij\bar{t}}^{mt} + \Lambda_i^m c_{ij\bar{t}}^m \right) = 0,$$

$$(j = 1, 2, 3; \quad \bar{t} = 1, 2, \dots, s; \quad m = 0, 1, \dots, p),$$

де $A_{0t}^3 = \Lambda_{0t}^3 = 0$.

Система рівняння (8) разом з (7) замкнута і її порядок $(s+1)(3p+2)$. У цій системі коефіцієнти $b_{ij\bar{t}}^{mt}$ не залежать від виду граничних умов, а є функціями лише механічних і геометричних параметрів пластинки.

III. Циліндричний згин пластинки

Дослідимо концентрацію напружень біля вільного кругового отвору за циліндричного згину пластинки моментами M ($M_x^\infty = M$, $M_y^\infty = H_{xy}^\infty = Q_x^\infty = Q_y^\infty = 0$).

Граничні умови у випадку вільного отвору мають вигляд (3). В цьому випадку

$$M_\rho^0 = \frac{M}{2}(1 + \cos 2\theta); \quad H_{\rho\theta}^0 = -\frac{M}{2} \sin 2\theta; \quad Q_\rho^0 = 0.$$

Коефіцієнти a_{ij}^{mt} і вільні члени f_m^j в (7) з використанням (4) матимуть форму

$$a_{12}^{mt} = -2t; \quad a_{22}^{mt} = 1; \quad a_{33}^{mt} = 2m\nu_2; \quad a_{21}^{mt} = 2m;$$

$$a_{31}^{mt} = 2(t+1); \quad a_{23}^{mt} = \nu_2 - 2t - 1; \quad a_{31}^{\theta t} = 0;$$

$$f_1^1 = -\frac{D_1}{D_{12}}; \quad f_0^3 = f_1^3 = -1$$

$$(m = 0, 1, \dots, p; \quad t = 1, 2, \dots, s).$$

Решта a_{ij}^{mt} і f_j^m дорівнюють нулю. Коефіцієнти $c_{ij\bar{t}}^m$ залежать від граничних умов (7) і визначаються формулою

$$c_{ij\bar{t}}^m = a_{ij}^{m\bar{t}} \quad (i, j = 1, 2, 3; \quad m = 0, 1, \dots, p; \quad \bar{t} = 1, 2, \dots, s).$$

Силові фактори виражаються так

$$M_\rho(\rho, \theta) = \frac{M}{2} \sum_{m=0}^p \sum_{t=1}^s [2m\nu_2 A_{mt}^3 + (v_2 - 2t + 1) A_{mt}^2] \left(\frac{a}{\rho} \right)^{2t+2} \cos 2m\theta;$$

$$M_{\theta}(\rho, \theta) = \frac{MD_2}{2D_1} \sum_{m=0}^p \sum_{t=1}^s [2mA_{mt}^3 + (1 - \nu_1(2t + 1))A_{mt}^2] \left(\frac{a}{\rho}\right)^{2t+2} \cos 2m\theta;$$

$$H_{\rho\theta}(\rho, \theta) = -\frac{MD_{12}}{D_1} \sum_{m=1}^p \sum_{t=1}^s [mvA_{mt}^3 + (2t + 1)A_{mt}^3] \left(\frac{a}{\rho}\right)^{2t+2} \sin 2m\theta;$$

$$Q_{\rho}(\rho, \theta) =$$

$$= \frac{M\Lambda_{13}h}{2D_1} \sum_{m=0}^p \sum_{t=1}^s (A_{mt}^3 - 2tA_{mt}^1) \frac{a^{2t+2}}{\rho^{2t+1}} \cos 2m\theta;$$

$$Q_{\theta}(\rho, \theta) =$$

$$= \frac{M\Lambda_{23}h}{2D_1} \sum_{m=1}^p \sum_{t=1}^s (A_{mt}^3 - 2mA_{mt}^1) \frac{a^{2t+2}}{\rho^{2t+1}} \sin 2m\theta.$$

Збіжність розв'язку досліджували, послідовно збільшуючи кількість членів в рядах (6). Для цієї задачі в рядах розв'язків достатньо утримувати до шести членів і похибка не перевищує 5 % порівняно з наступними наближеннями. На рис. 1 зображено розподіл коефіцієнтів концентрації моментів M_{θ} , $k_0 = M_{\theta}/M|_{\rho=a}$ залежно від a/h для значень параметрів $E_1/G_{12} = 2, 6$; $\nu_1 = 0, 3$; $G_{13} = G_{23}$; $E_1/G_{13} = 2, 6$ (суцільні лінії) і $E_1/G_{12} = 40$ (штрихові лінії) за різних значень параметрів E_1/E_2 . На рис. 2 показано розподіл моментів по контуру кругового отвору для $a/h = 4$; $E_1/G_{12} = 2, 6$; $G_{13} = G_{23}$; $E_1/G_{13} = 40$. Криві, які позначено цифрами 1, 2, 3, відповідають значенням $E_1/E_2 = 0, 5; 1, 0; 2, 0$.

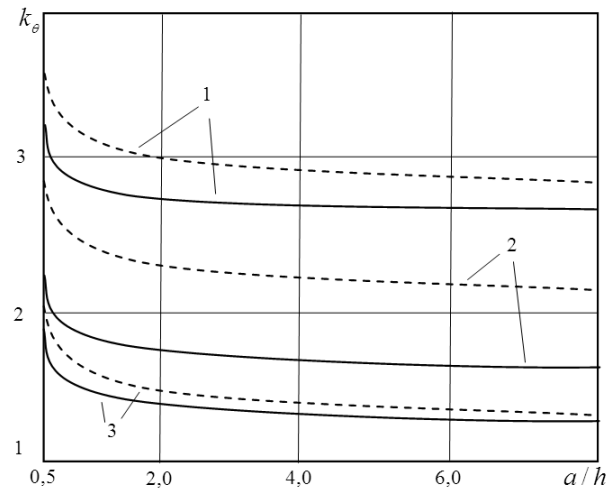


Рис. 1

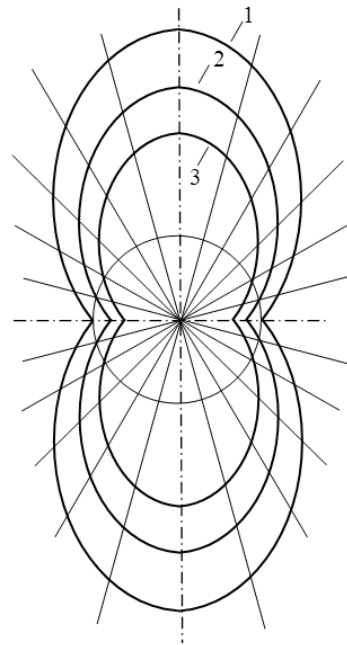


Рис. 2

З аналізу рис. 1 і 2 можна зробити висновок про істотний вплив на розподіл напружень параметра E_1/E_2 . З одержаного розв'язку, якщо $E_1/E_2 = 1$, знаходимо значення коефіцієнтів концентрації моментів для випадку трансверсальної ізотропії матеріалу пластинки.

Література

- [1] Савин Г. Н. Распределение напряжений около отверстий. – К.: Наук. думка, 1968. – 887 с.
- [2] Пелех Б. Л., Лазько В. А. Слоистые анизотропные пластинки и оболочки с концентраторами напряжений. – К.: Наук. думка, 1982. – 296 с.
- [3] Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. – М.: Гостехиздат, 1957. – 464 с.

CONCENTRATION OF STRESSES AROUND A ROUND HOLE IN ORTHOTROPIC PLATES WITH ALLOWANCE FOR SHEAR DEFORMATION

V. A. Lazko, R. M. Makhnitskyi, V. L. Lozben, O. Ya. Brodyak, V. M. Huk

*Lviv Polytechnic National University
12, S. Bandera Str., Lviv, 79013, Ukraine*

The problem of determining the concentration of stresses in a polar-orthotropic plate with a circular aperture is considered. The problem is solved by an approximate variational method. The influence on the stress state of the mechanical and geometric parameters of the plate is analyzed.

Key words: concentration of stresses, orthotropic plate, polar orthotropy, variational method.

2000 MSC: 74C05

UDK: 539.3