

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ РОЗПОДІЛУ ТЕПЛОВОГО ПОЛЯ У ПАРАЛЕЛЕПЕДІ З УРАХУВАННЯМ СКЛАДНОГО ТЕПЛООБМІНУ НА ЙОГО МЕЖІ ТА ВНУТРІШНІХ ДЖЕРЕЛ

© Журавчак Л., Крук О., 2013

Порівняно ефективність використання непрямих методів граничних та приграничних елементів для побудови чисельно-аналітичного розв'язку стаціонарних тривимірних задач теплопровідності з урахуванням умов складного теплообміну та інтенсивності внутрішніх джерел. З використанням інтегральних зображень для температури побудовано дискретно-континуальну модель задач з граничними умовами першого, другого та третього роду. Здійснено низку обчислювальних експериментів для оцінки похибок дискретизації та апроксимації математичної моделі. Досліджено вплив теплових плоских і об'ємних джерел на розподіл температурного поля в об'єкті.

Ключові слова: теплове поле, складний теплообмін, непрямий метод приграничних елементів, непрямий метод граничних елементів, внутрішні джерела.

We compare the efficiency using indirect methods of boundary and near-boundary elements for building numerical-analytical solution of three-dimensional stationary heat conduction problems considering the difficult conditions heat and intensity of inner sources. We built discrete-continual model for problems with boundary conditions of the first, second and third kind using integral representations for the temperature. The computing experiments are presented to estimate errors of discretization and mathematical model approximation. Influence of the thermal flat and three-dimensional internal sources on the distribution of temperature field in the object was investigated.

Key words: heat field, complex heat transfer, indirect near-boundary elements method, indirect boundary elements method, internal sources.

Вступ

Питання моделювання й оптимізації теплових процесів мають важливе значення в різних галузях економіки й техніки, зокрема, в приладо- і машинобудуванні під час проектування мікроелектронних пристроїв, покриття конструкцій та обладнання вогнезахисними матеріалами [7, 8]. Математичне моделювання температурних полів у таких об'єктах усуває необхідність проведення тестово-експериментальних досліджень для прогнозування їх міцності й надійності та потребує розвитку відомих і розроблення нових обчислювальних методів знаходження стаціонарних теплових полів в областях неканонічної форми та проведення на цій базі ґрунтовних наукових досліджень. Основою математичної моделі стаціонарного процесу теплопровідності, як і дифузії, фільтрації нестисливої рідини, електростатики, слугує диференціальне рівняння в часткових похідних еліптичного типу (Лапласа або Пуассона), доповнене граничними умовами першого роду, другого, третього та змішаними (за їх поєднання).

Оскільки точні аналітичні розв'язки вказаних задач вдається отримати для незначної кількості об'єктів, широкого розповсюдження набули чисельно-аналітичні та чисельні методи, зокрема, скінченних різниць і елементів, інтегральних та граничних інтегральних рівнянь, граничних та приграничних елементів, кожен з яких має свої недоліки та переваги [1, 2, 4, 5, 9–12].

У непрямих методах граничних та приграничних елементів інтегральні зображення вихідного диференціального рівняння записуються через згортку його фундаментального сингулярного розв'язку з інтенсивностями «фіктивних» джерел, розподіленими на межі об'єкта або в зовнішній приграничній до нього області. Самі по собі функції інтенсивності не мають певного фізичного сенсу, але, коли вони знайдені, значення шуканої температури усередині тіла можуть бути отримані за їх допомогою простим інтегруванням.

У статті під час моделювання стаціонарних процесів теплопровідності у паралелепіпеді порівняно непрямі методи граничних та приграничних елементів. Дискретно-континуальну модель для знаходження інтенсивностей невідомих джерел, введених у граничних або приграничних елементах і апроксимованих постійними, зведено до системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР), утвореної внаслідок задоволення в колокаційному сенсі граничних умов.

Математична модель для знаходження теплового поля

Розглянемо однорідний ізотропний паралелепіпед, зарахований до декартової системи координат x_1, x_2, x_3 , який займає область

$$\Omega = \{(x_1, x_2, x_3) : a_1 < x_1 < a_2, b_1 < x_2 < b_2, c_1 < x_3 < c_2\}. \quad (1)$$

з межею $\Gamma = \cup_{j=1}^6 \Gamma^{(j)}$, де $\Gamma^{(1)} = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = a_1, b_1 < x_2 < b_2, c_1 < x_3 < c_2\}$,

$$\Gamma^{(2)} = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = a_2, b_1 < x_2 < b_2, c_1 < x_3 < c_2\},$$

$$\Gamma^{(3)} = \{(x_1, x_2, x_3) : a_1 < x_1 < a_2, x_2 = b_1, c_1 < x_3 < c_2\},$$

$$\Gamma^{(4)} = \{(x_1, x_2, x_3) : a_1 < x_1 < a_2, x_2 = b_2, c_1 < x_3 < c_2\},$$

$$\Gamma^{(5)} = \{(x_1, x_2, x_3) : a_1 < x_1 < a_2, b_1 < x_2 < b_2, x_3 = c_1\},$$

$$\Gamma^{(6)} = \{(x_1, x_2, x_3) : a_1 < x_1 < a_2, b_1 < x_2 < b_2, x_3 = c_2\}.$$

Для знаходження невідомої температури $\theta(x)$ маємо вихідне рівняння

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 \theta(x)}{\partial x_i^2} = -\psi(x) \chi_\psi, x \in \Omega \subset \mathbf{R}^3, \quad (2)$$

та граничні умови першого, другого і третього роду:

$$\theta(x) = f_\Gamma^{(1)}(x), x \in \partial\Omega^{(1)}, \quad -\lambda_0 \frac{\partial \theta(x)}{\partial \mathbf{n}(x)} = f_\Gamma^{(2)}(x), x \in \partial\Omega^{(2)}, \quad (3)$$

$$-\lambda_0 \frac{\partial \theta(x)}{\partial \mathbf{n}(x)} + \nu(x) \theta(x) = \nu(x) f_\Gamma^{(3)}(x), x \in \partial\Omega^{(3)}. \quad (4)$$

Тут $\psi(x) = \tilde{\psi}(x)/\lambda_0$; $\tilde{\psi}(x)$ – інтенсивність джерел, які діють в $\Omega_\psi \subset \Omega$; Ω_ψ – область прямокутної форми (при $n=2$) або паралелепіпед (при $n=3$); χ_ψ – характеристична функція області Ω_ψ , тобто $\chi_\psi = 1$ при $x \in \Omega_\psi$, $\chi_\psi = 0$ при $x \notin \Omega_\psi$; $\partial\Omega^{(1)} \cup \partial\Omega^{(2)} \cup \partial\Omega^{(3)} = \Gamma$ – границя області Ω ; $x = (x_1, x_2, x_3)$; $f_\Gamma^{(1)}(x)$, $f_\Gamma^{(2)}(x)$ – відомі функції, що описують температуру і тепловий потік на межі паралелепіпеда; $f_\Gamma^{(3)}(x)$ – температура зовнішнього середовища; λ_0 , $\nu(x)$ – коефіцієнти теплопровідності матеріалу та тепловіддачі з поверхні об'єкта.

Побудова інтегральних зображень розв'язків рівняння та дискретно-континуальної моделі

Для побудови алгоритму розв'язування задачі (1)–(4) використаємо непрямі методи граничних (НМГЕ) і приграничних елементів (НМПГЕ). Згідно з основними положеннями цих методів на межі об'єкта Γ або у зовнішній приграничній до Ω області G введемо невідомі функції $\phi^\gamma(x)$, $\gamma \in \{\Gamma, G\}$, які описують розподіл фіктивних джерел тепла.

Після розширення області визначення функції $\theta(x)$ на весь \mathbf{R}^3 , рівняння (2) перепишемо у вигляді

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 \theta(x)}{\partial x_i^2} = -\psi(x)\chi_\psi - \varphi^\gamma(x)\chi_\gamma, \quad x \in \mathbf{R}^3, \quad (5)$$

де χ_γ – характеристична функція області γ , тобто $\chi_\gamma = 1$ при $x \in \gamma$, $\chi_\gamma = 0$ при $x \notin \gamma$.

Запишемо, враховуючи (5), такі інтегральні зображення для шуканої температури та похідної від неї за нормаллю [1, 3, 4]:

$$\theta^\gamma(x) = \mathbf{F}^\gamma(x, U) + b(x, U), \quad -\lambda_0 \frac{\partial \theta^\gamma(x)}{\partial \mathbf{n}(x)} = \mathbf{F}^\gamma(x, Q) + b(x, Q), \quad x \in \mathbf{R}^3, \quad (6)$$

де

$$\mathbf{F}^\gamma(x, \Phi) = \int_{\gamma} \Phi(x, \xi) \varphi^\gamma(\xi) d\gamma(\xi), \quad b(x, \Phi) = \int_{\Omega_{\psi n}} \Phi(x, \xi) \psi(\xi) d\Omega_{\psi n}(\xi), \quad \xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad (7)$$

$$U(x, \xi) = \frac{1}{4\pi\lambda_0 r}, \quad r = \sqrt{\sum_{l=1}^3 (x_l - \xi_l)^2},$$

$$Q(x, \xi) = -\lambda_0 \frac{\partial U(x, \xi)}{\partial \mathbf{n}(x)} = -\lambda_0 \sum_{l=1}^3 \frac{\partial U(x, \xi)}{\partial x_l} \mathbf{n}_l(x) = \sum_{l=1}^3 \frac{(x_l - \xi_l) \mathbf{n}_l(x)}{4\pi r^3}, \quad \Phi \in \{U, Q\},$$

$\mathbf{n}(x) = (n_1(x), n_2(x), n_3(x))$ – вектор зовнішньої одиничної однозначно визначеної нормалі до границі Γ .

Спрямувавши в (6) x з середини області Ω до границі Γ для задоволення граничних умов (3)–(4), одержимо граничні інтегральні рівняння (ГІР), які зв'язують невідомі $\varphi^\gamma(\xi)$ з відомими $\psi(\xi)$ та заданими на границі функціями $f_\Gamma^{(1)}(x)$, $f_\Gamma^{(2)}(x)$, $f_\Gamma^{(3)}(x)$:

$$\mathbf{F}^\gamma(x, U) = f_\Gamma^{(1)}(x) - b(x, U), \quad x \in \Gamma_1, \quad (8)$$

$$-\frac{1}{2} \varphi^\Gamma(x) + \mathbf{F}^\Gamma(x, Q) = f_\Gamma^{(2)}(x) - b(x, Q) \quad \text{або} \quad \mathbf{F}^G(x, Q) = f_\Gamma^{(2)}(x) - b(x, Q), \quad x \in \Gamma_2, \quad (9)$$

$$-\frac{1}{2} \varphi^\Gamma(x) + \mathbf{F}^\Gamma(x, Q + \nu(x)U) = \nu(x) f_\Gamma^{(3)}(x) - b(x, Q + \nu(x)U) \quad \text{або}$$

$$\mathbf{F}^G(x, Q + \nu(x)U) = \nu(x) f_\Gamma^{(3)}(x) - b(x, Q + \nu(x)U), \quad x \in \Gamma_3. \quad (10)$$

Оскільки здійснити аналітичне інтегрування у ГІР (8)–(10) для прикладних задач внаслідок довільності області Ω і функцій $\varphi^\gamma(\xi)$ та $\psi(\xi)$ практично неможливо, проведемо просторову дискретизацію. Грані $\Gamma^{(j)}$ ($j = \overline{1,6}$) паралелепіпеда або відповідні їм приграничні зони області $G^{(j)}$ дискретизуємо відповідно на V граничних або приграничних елементів γ_ν , причому $\cup_{\nu=1}^V \gamma_\nu = \gamma$; Γ_ν , G_ν – це плоскі та об'ємні елементи другого порядку відповідно з 4-ма та 8-ма вузлами [4], вони між собою не перетинаються, товщину приграничних елементів, побудованих на одній грані, виберемо однаковою і такою, що дорівнює h_j ($j = \overline{1,6}$). Тоді невідому функцію, яка описує розподіл фіктивних джерел тепла в межах елемента γ_ν , апроксимуємо постійною d_ν^γ . Область $\Omega_{\psi n}$ дискретизуємо на елементи другого порядку з 4-ма або 8-ма вузлами $\Omega_{\psi nq}$ ($q = 1, \dots, Q$) у випадку задання внутрішніх джерел у прямокутній області або паралелепіпеді відповідно.

Оператори $\mathbf{F}^\gamma(x, \Phi)$, $b(x, \Phi)$ (7) після просторової дискретизації мають вигляд

$$\mathbf{F}^\gamma(x, \Phi) = \sum_{\nu=1}^V d_\nu^\gamma \int_{\gamma_\nu} \Phi(x, \xi) d\gamma_\nu(\xi), \quad b(x, \Phi) = \sum_{q=1}^Q \int_{\Omega_{\psi nq}} \Phi(x, \xi) \psi(\xi) d\Omega_{\psi nq}(\xi). \quad (11)$$

Для задоволення граничних умов використаємо колокаційну методику. Точки колокації виберемо у середині кожного граничного елемента $\Gamma_w, w=1, \dots, V, \cup_{w=1}^V \Gamma_w = \Gamma$. ГІР (8)–(10) після просторової дискретизації запишемо у вигляді СЛАР:

$$\sum_{v=1}^V A_v^\gamma(x^w, U) d_v^\gamma = f_\Gamma^{(1)}(x^w) - b(x^w, U), x^w \in \Gamma_1, w=1, \dots, V_1, \quad (12)$$

$$-\frac{1}{2} d_w^\Gamma + \sum_{v=1}^V A_v^\Gamma(x^w, Q) d_v^\Gamma = f_\Gamma^{(2)}(x^w) - b(x^w, Q), x^w \in \Gamma_2, \text{ або}$$

$$\sum_{v=1}^V A_v^G(x^w, Q) d_v^G = f_\Gamma^{(2)}(x^w) - b(x^w, Q), x^w \in \Gamma_2, w=V_1+1, \dots, V_2 \quad (13)$$

$$-\frac{1}{2} d_w^\Gamma + \sum_{v=1}^V A_v^\Gamma(x^w, Q + v(x^w)U) d_v^\Gamma = v(x^w) f_\Gamma^{(3)}(x^w) - b(x^w, Q + v(x^w)U), x^w \in \Gamma_3, \text{ або}$$

$$\sum_{v=1}^V A_v^G(x^w, Q + v(x^w)U) d_v^G = v(x^w) f_\Gamma^{(3)}(x^w) - b(x^w, Q + v(x^w)U), x^w \in \Gamma_3, w=V_2+1, \dots, V, \quad (14)$$

де $A_v^\gamma(x, \Phi) = \int_{\gamma_v} \Phi(x, \xi) d\gamma_v(\xi)$.

Розв'язавши систему (12)–(14), одержані d_v^γ використаємо в (9) для знаходження температури і теплового потоку:

$$\theta^\gamma(x) = \sum_{v=1}^V A_v^\gamma(x, U) d_v^\gamma + b(x, U), \quad -\lambda_0 \frac{\partial \theta^\gamma(x)}{\partial \mathbf{n}(x)} = \sum_{v=1}^V A_v^\gamma(x, Q) d_v^\gamma + b(x, Q). \quad (15)$$

Знаходження інтегралів по граничних, приграничних та внутрішніх елементах

Для знаходження інтегралів $A_v^\gamma(x, \Phi)$ та $\int_{\Omega_{\psi nq}} \Phi(x, \xi) \psi(\xi) d\Omega_{\psi nq}(\xi)$ відобразимо граничні

(прямокутники), приграничні (паралелепіеди) та внутрішні елементи (прямокутники або паралелепіеди) на квадрати та куби з довжиною сторони 2 (квадратури Гаусса) [2]:

$$A_v^\Gamma(x, \Phi) = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \Phi(x, \xi^{(\Gamma v)}) \left| J_2(\xi^{(\Gamma v)}, \zeta) \right| d\zeta_1 d\zeta_2, \quad (16)$$

$$A_v^G(x, \Phi) = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \Phi(x, \xi^{(Gv)}) \left| J_3(\xi^{(Gv)}, \eta) \right| d\eta_1 d\eta_2 d\eta_3, \quad (17)$$

$$\int_{\Omega_{\psi 2q}} \Phi(x, \xi) \psi(\xi) d\Omega_{\psi 2q}(\xi) = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \Phi(x, \xi^{(\Omega 2q)}) \psi(\xi^{(\Omega 2q)}) \left| J_2(\xi^{(\Omega 2q)}, \zeta) \right| d\zeta_1 d\zeta_2, \quad (18)$$

$$\int_{\Omega_{\psi 3q}} \Phi(x, \xi) \psi(\xi) d\Omega_{\psi 3q}(\xi) = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \Phi(x, \xi^{(\Omega 3q)}) \psi(\xi^{(\Omega 3q)}) \left| J_3(\xi^{(\Omega 3q)}, \eta) \right| d\eta_1 d\eta_2 d\eta_3. \quad (19)$$

Тут

$$\left| J_2(\xi^{(m)}, \zeta) \right| = \sqrt{g_1^2(\xi^{(m)}, \zeta) + g_2^2(\xi^{(m)}, \zeta) + g_3^2(\xi^{(m)}, \zeta)}, \quad m \in \{\Gamma v, \Omega 2q\}, \quad (20)$$

$$g_1(\xi^{(m)}, \zeta) = \frac{\partial \xi_2^{(m)}}{\partial \zeta_1} \frac{\partial \xi_3^{(m)}}{\partial \zeta_2} - \frac{\partial \xi_3^{(m)}}{\partial \zeta_1} \frac{\partial \xi_2^{(m)}}{\partial \zeta_2}, \quad g_2(\xi^{(m)}, \zeta) = \frac{\partial \xi_3^{(m)}}{\partial \zeta_1} \frac{\partial \xi_1^{(m)}}{\partial \zeta_2} - \frac{\partial \xi_1^{(m)}}{\partial \zeta_1} \frac{\partial \xi_3^{(m)}}{\partial \zeta_2},$$

$$g_3(\xi^{(m)}, \zeta) = \frac{\partial \xi_1^{(m)}}{\partial \zeta_1} \frac{\partial \xi_2^{(m)}}{\partial \zeta_2} - \frac{\partial \xi_2^{(m)}}{\partial \zeta_1} \frac{\partial \xi_1^{(m)}}{\partial \zeta_2},$$

$$\xi^{(m)} = (\xi_1^{(m)}, \xi_2^{(m)}, \xi_3^{(m)}), \quad \xi_i^{(m)}(\zeta_1, \zeta_2) = \sum_{l=1}^4 \phi_l(\zeta_1, \zeta_2) \xi_i^{(ml)}, \quad (21)$$

$\xi^{(ml)} = (\xi_1^{(ml)}, \xi_2^{(ml)}, \xi_3^{(ml)})$ – координати l -го ($l=1, \dots, 4$) вузла m -го граничного або внутрішнього елемента дискретизації,

$$\phi_1(\zeta_1, \zeta_2) = 0.25(1 - \zeta_1)(1 - \zeta_2), \quad \phi_2(\zeta_1, \zeta_2) = 0.25(1 + \zeta_1)(1 - \zeta_2),$$

$$\phi_3(\zeta_1, \zeta_2) = 0.25(1 + \zeta_1)(1 + \zeta_2), \quad \phi_4(\zeta_1, \zeta_2) = 0.25(1 - \zeta_1)(1 + \zeta_2),$$

$$|J_3(\xi^{(q)}, \boldsymbol{\eta})| = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi_1^q}{\partial \eta_1} & \frac{\partial \xi_2^q}{\partial \eta_1} & \frac{\partial \xi_3^q}{\partial \eta_1} \\ \frac{\partial \xi_1^q}{\partial \eta_2} & \frac{\partial \xi_2^q}{\partial \eta_2} & \frac{\partial \xi_3^q}{\partial \eta_2} \\ \frac{\partial \xi_1^q}{\partial \eta_3} & \frac{\partial \xi_2^q}{\partial \eta_3} & \frac{\partial \xi_3^q}{\partial \eta_3} \end{vmatrix} = \left| \frac{\partial \xi_1^q}{\partial \eta_1} \left(\frac{\partial \xi_2^q}{\partial \eta_2} \frac{\partial \xi_3^q}{\partial \eta_3} - \frac{\partial \xi_3^q}{\partial \eta_2} \frac{\partial \xi_2^q}{\partial \eta_3} \right) - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial \xi_2^q}{\partial \eta_1} \left(\frac{\partial \xi_1^q}{\partial \eta_2} \frac{\partial \xi_3^q}{\partial \eta_3} - \frac{\partial \xi_3^q}{\partial \eta_2} \frac{\partial \xi_1^q}{\partial \eta_3} \right) + \frac{\partial \xi_3^q}{\partial \eta_1} \left(\frac{\partial \xi_1^q}{\partial \eta_2} \frac{\partial \xi_2^q}{\partial \eta_3} - \frac{\partial \xi_2^q}{\partial \eta_2} \frac{\partial \xi_1^q}{\partial \eta_3} \right) \right|, \quad q \in \{Gv, \Omega 3q\} \quad (22)$$

$$\xi^{(q)} = (\xi_1^{(q)}, \xi_2^{(q)}, \xi_3^{(q)}), \quad \xi_i^{(q)} = \xi_i^{(q)}(\boldsymbol{\eta}) = \sum_{l=1}^8 \beta_l(\boldsymbol{\eta}) \xi_i^{(ql)}, \quad (23)$$

$\xi^{(ql)} = (\xi_1^{(ql)}, \xi_2^{(ql)}, \xi_3^{(ql)})$ – координати l -го ($l=1, \dots, 8$) вузла q -го приграничного або внутрішнього елемента дискретизації,

$$\beta_1(\boldsymbol{\eta}) = 0.125(1 - \eta_1)(1 - \eta_2)(1 - \eta_3), \quad \beta_2(\boldsymbol{\eta}) = 0.125(1 + \eta_1)(1 - \eta_2)(1 - \eta_3),$$

$$\beta_3(\boldsymbol{\eta}) = 0.125(1 + \eta_1)(1 + \eta_2)(1 - \eta_3), \quad \beta_4(\boldsymbol{\eta}) = 0.125(1 - \eta_1)(1 + \eta_2)(1 - \eta_3),$$

$$\beta_5(\boldsymbol{\eta}) = 0.125(1 - \eta_1)(1 - \eta_2)(1 + \eta_3), \quad \beta_6(\boldsymbol{\eta}) = 0.125(1 + \eta_1)(1 - \eta_2)(1 + \eta_3),$$

$$\beta_7(\boldsymbol{\eta}) = 0.125(1 + \eta_1)(1 + \eta_2)(1 + \eta_3), \quad \beta_8(\boldsymbol{\eta}) = 0.125(1 - \eta_1)(1 + \eta_2)(1 + \eta_3).$$

Знаючи коефіцієнти $\xi_i^{(ml)}$, $\xi_i^{(ql)}$ в розкладах (21), (23), легко визначити детермінанти $J_2(\xi^{(m)}, \zeta)$ і $J_3(\xi^{(q)}, \boldsymbol{\eta})$, використовуючи формули (20) і (22). Вирази для похідних, що в них входять, зокрема, такі:

$$\frac{\partial \xi_i^{(m)}}{\partial \zeta_1} = 0.25(1 - \zeta_2)(\xi_i^{(m2)} - \xi_i^{(m1)}) + 0.25(1 + \zeta_2)(\xi_i^{(m3)} - \xi_i^{(m4)}),$$

$$\frac{\partial \xi_i^{(m)}}{\partial \zeta_2} = 0.25(1 - \zeta_1)(\xi_i^{(\Gamma v4)} - \xi_i^{(\Gamma v1)}) + 0.25(1 + \zeta_1)(\xi_i^{(\Gamma v3)} - \xi_i^{(\Gamma v2)}),$$

$$\frac{\partial \xi_i^{(q)}}{\partial \eta_1} = 0.125(1 - \eta_2)(1 - \eta_3)(\xi_i^{(q2)} - \xi_i^{(q1)}) + 0.125(1 + \eta_2)(1 - \eta_3)(\xi_i^{(q3)} - \xi_i^{(q4)}) +$$

$$+ 0.125(1 - \eta_2)(1 + \eta_3)(\xi_i^{(q6)} - \xi_i^{(q5)}) + 0.125(1 + \eta_2)(1 + \eta_3)(\xi_i^{(q7)} - \xi_i^{(q8)}),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi_i^{(q)}}{\partial \eta_2} &= 0.125(1 - \eta_1)(1 - \eta_3)(\xi_i^{(q4)} - \xi_i^{(q1)}) + 0.125(1 + \eta_1)(1 - \eta_3)(\xi_i^{(q3)} - \xi_i^{(q2)}) + \\ &+ 0.125(1 - \eta_1)(1 + \eta_3)(\xi_i^{(q8)} - \xi_i^{(q5)}) + 0.125(1 + \eta_1)(1 + \eta_3)(\xi_i^{(q7)} - \xi_i^{(q6)}), \\ \frac{\partial \xi_i^{(q)}}{\partial \eta_3} &= 0.125(1 - \eta_1)(1 - \eta_2)(\xi_i^{(q5)} - \xi_i^{(q1)}) + 0.125(1 + \eta_1)(1 - \eta_2)(\xi_i^{(q6)} - \xi_i^{(q2)}) + \\ &+ 0.125(1 + \eta_1)(1 + \eta_2)(\xi_i^{(q7)} - \xi_i^{(q3)}) + 0.125(1 - \eta_1)(1 + \eta_2)(\xi_i^{(q8)} - \xi_i^{(q4)}). \end{aligned}$$

На останньому етапі до отриманих інтегралів (16)–(19) застосовуємо формули чисельного інтегрування Гаусса:

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f_2(\zeta_1, \zeta_2) d\zeta_1 d\zeta_2 \approx \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n w_i w_j f_2(\zeta_{1i}, \zeta_{2j}), \quad (24)$$

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f_3(\eta_1, \eta_2, \eta_3) d\eta_1 d\eta_2 d\eta_3 \approx \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n w_i w_j w_k f_3(\eta_{1i}, \eta_{2j}, \eta_{3k}), \quad (25)$$

де n – загальна кількість точок інтегрування по одній осі; (ζ_{1i}, ζ_{2j}) , $(\eta_{1i}, \eta_{2j}, \eta_{3k})$ – координати точки інтегрування; $f_2(\zeta_1, \zeta_2) \in \{\Phi(x, \xi^{(\Gamma v)}) | J_2(\xi^{(\Gamma v)}, \zeta) |, \Phi(x, \xi^{(\Omega 2q)}) \Psi(\xi^{(\Omega 2q)}) | J_2(\xi^{(\Omega 2q)}, \zeta) | \}$; $f_3(\eta_1, \eta_2, \eta_3) \in \{\Phi(x, \xi^{(Gv)}) | J_3(\xi^{(Gv)}, \eta) |, \Phi(x, \xi^{(\Omega 3q)}) \Psi(\xi^{(\Omega 3q)}) | J_3(\xi^{(\Omega 3q)}, \eta) | \}$; w_i, w_j, w_k – відповідні вагові множники.

Як бачимо, залежно від типу розподілу внутрішніх джерел (на площині чи по об'єму) можна використати НМГЕ або НМПГЕ, що дає змогу досягнути уніфікації програмного забезпечення, оскільки під час інтегрування і по граничних (або приграничних), і по внутрішніх елементах (в обох випадках – прямокутниках або паралелепіпедах) використовуємо однакові якобіани переходу до нових змінних та інтерполяційні функції. Зрозуміло, що використання НМГЕ за об'ємного розподілу внутрішніх джерел, як і НМПГЕ при плоскому, спричинить застосування різних якобіанів переходу та інтерполяційних функцій.

Числові дослідження

Як вже зазначалось, отримані граничні інтегральні рівняння (8)–(10) є еквівалентним формулюванням поставленої задачі і дають точний її розв'язок, а похибки виникають тільки на межі і у внутрішній примежовій області внаслідок використання операцій дискретизації, апроксимації та формул числового інтегрування.

Задача 1. Порівняти отримані за допомогою НМГЕ та аналітично розподіли теплового поля у паралелепіпеді (1) з заданими на його межі крайовими умовами першого роду за відсутності внутрішніх джерел:

$$\theta(x) = v_1, x \in \Gamma^{(1)}, \quad \theta(x) = v_2, x \in \Gamma^{(2)}, \quad \theta(x) = 0, x \in \Gamma^{(j)}, j = \overline{3,6}, \quad (26)$$

де $a_1 = 0, a_2 = 2, b_1 = 0, b_2 = 2, c_1 = 0, c_2 = 2$. Тут і надалі всі фізичні величини взято в системі СІ, за винятком температури, вибраної в градусах Цельсія, $\lambda_0 = 1$ Вт/(м·°С).

Апроксимуємо невідомі джерела тепла постійними та порівняємо розв'язок, отриманий за допомогою НМГЕ для різної кількості граничних елементів V , з аналітичним розв'язком [6]:

$$\theta^a(x) = \frac{16}{\pi^2} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{[v_1 sh(l(a_2 - x_1)) + v_2 sh(lx_1)] \sin((2p+1)\pi x_2 / b_2) \sin((2q+1)\pi x_3 / c_2)}{(2p+1)(2q+1)sh(la_2)},$$

де $l = \sqrt{\frac{(2p+1)^2 \pi^2}{b_2^2} + \frac{(2q+1)^2 \pi^2}{c_2^2}}$, грані розбивали на однакову кількість елементів $V_\Gamma, V = 6V_\Gamma$.

У таблиці наведено абсолютну похибку $\delta\theta(x) = |\theta^\Gamma(x) - \theta^a(x)|$ у внутрішніх точках паралелепіпеда, для $v_1 = 2, v_2 = 10$, при цьому в аналітичному розв'язку брали по 22 члени ряду для p та q .

Порівняння розв'язків, отриманих за допомогою непрямого методу граничних елементів і аналітично

Координата точки	$\delta\theta(x), V_\Gamma = 4, V=24$	$\delta\theta(x), V_\Gamma = 16, V=96$	$\delta\theta(x), V_\Gamma = 36, V=216$
(0.5, 0.5, 0.5)	0.374665412127718	0.0883595393839017	0.0463688868595886
(0.5, 0.5, 1.0)	0.168253510632615	0.0455564755093749	0.0197977721768412
(0.5, 0.5, 1.5)	0.374665412127718	0.0883595393838967	0.0463688868595816
(0.5, 1.0, 0.5)	0.168253510632615	0.0455564755093734	0.019797772176841
(0.5, 1.0, 1.0)	0.133105088883634	0.020914534901773	0.0202940332916202
(0.5, 1.0, 1.5)	0.168253510632616	0.045556475509378	0.019797772176839
(0.5, 1.5, 0.5)	0.374665412127716	0.0883595393838977	0.0463688868595882
(0.5, 1.5, 1.0)	0.168253510632616	0.0455564755093802	0.0197977721768423
(0.5, 1.5, 1.5)	0.374665412127719	0.0883595393838987	0.0463688868595848
(1.0, 0.5, 0.5)	1.00825692307817	0.151954299194416	0.10264291620419
(1.0, 0.5, 1.0)	0.580576118221755	0.0803765318667202	0.0517733055662597
(1.0, 0.5, 1.5)	1.00825692307817	0.151954299194421	0.102642916204178
(1.0, 1.0, 0.5)	0.580576118221754	0.0803765318667158	0.0517733055662557
(1.0, 1.0, 1.0)	0.152699265134083	0.0417305090759177	0.0270093067875945
(1.0, 1.0, 1.5)	0.580576118221754	0.0803765318667204	0.0517733055662615
(1.0, 1.5, 0.5)	1.00825692307817	0.151954299194419	0.102642916204187
(1.0, 1.5, 1.0)	0.580576118221753	0.0803765318667216	0.0517733055662544
(1.0, 1.5, 1.5)	1.00825692307817	0.151954299194419	0.102642916204182
(1.5, 0.5, 0.5)	0.583440010871735	0.198577243604363	0.108578609025532
(1.5, 0.5, 1.0)	1.60582044884438	0.330137146585708	0.206396295108185
(1.5, 0.5, 1.5)	0.583440010871739	0.198577243604367	0.108578609025534
(1.5, 1.0, 0.5)	1.60582044884438	0.330137146585713	0.206396295108178
(1.5, 1.0, 1.0)	3.17311420484369	0.536463820817412	0.345461311809609
(1.5, 1.0, 1.5)	1.60582044884438	0.330137146585708	0.206396295108196
(1.5, 1.5, 0.5)	0.583440010871739	0.198577243604364	0.108578609025534
(1.5, 1.5, 1.0)	1.60582044884438	0.330137146585703	0.206396295108193
(1.5, 1.5, 1.5)	0.583440010871742	0.198577243604366	0.108578609025541

Як бачимо, у разі збільшення кількості граничних елементів отриманий чисельний розв'язок у внутрішніх точках збігається до аналітичного.

Задача 2. Порівняти отримані за допомогою НМГЕ та НМПГЕ розподіли теплового поля у паралелепіпеді (1) з заданою на його межі крайовою умовою першого роду за відсутності внутрішніх джерел:

$$\theta(x) = f(x) = x_2, x \in \Gamma, \quad (27)$$

де $a_1 = -1, a_2 = 1, b_1 = -1, b_2 = 1, c_1 = -1, c_2 = 1$.

Оскільки найбільші похибки при використанні НМГЕ та НМПГЕ отримують на межі (в середині тіла згідно з принципом максимуму вони є меншими), на рис. 1 показано абсолютну похибку задоволення граничної умови $\delta\theta^\gamma(x) = |\theta^\gamma(x) - f(x)|$ на верхній грані $\Gamma^{(4)}$ після розв'язання поставленої задачі для $V_\Gamma = 16, h_j = h = 0.25 (j = \overline{1,6})$.

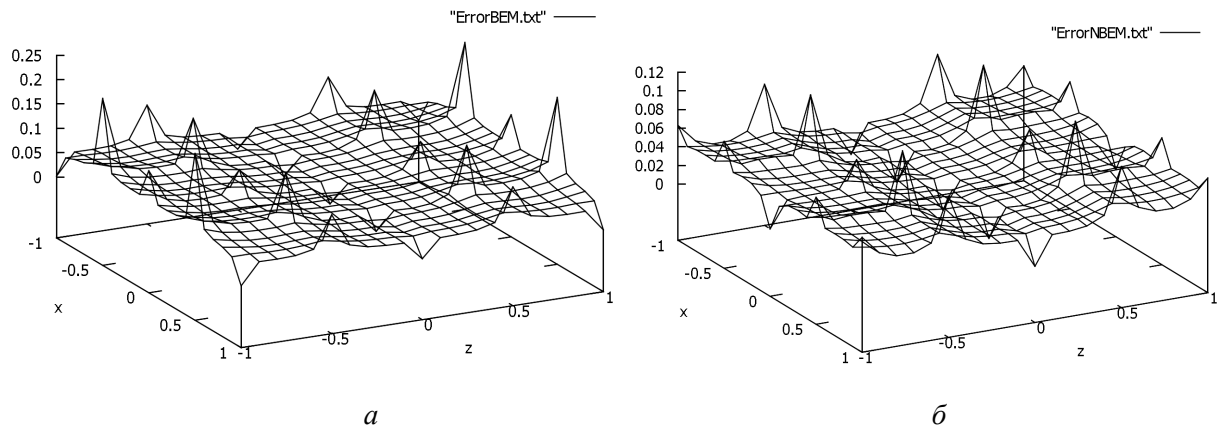


Рис. 1. Похибка задоволення граничної умови на верхній грані паралелепіпеда при розв'язуванні задачі за допомогою: НМГЕ (а) та НМПГЕ (б)

Як бачимо, під час застосування обох методів чисельні результати з наближенням до межі тіла погіршуються, при цьому зростання похибки спостерігається також на стику граничних і приграничних елементів (внаслідок вибору лише однієї точки колокації на граничному елементі). За збільшення кількості елементів дискретизації (що відповідає точнішому відображенню граничної умови) спостерігаємо покращення точності як на межі, так і всередині об'єкта. Водночас, як видно з рис. 1, НМПГЕ дозволяє досягнути вищої точності задоволення граничних умов порівняно з НМГЕ, це відбувається внаслідок можливості зміни параметра h_ν – товщин приграничних елементів, які згладжують різкий перехід від заданого на межі значення температури до нульового поза її межами. Зазначимо, що збільшення кількості точок інтегрування n від 4 до 10 у формулах Гаусса (24), (25) істотно не вплинуло на результати, тому з метою зменшення часу розрахунків в усіх числових дослідженнях вибрано $n=4$, тоді точки інтегрування та вагові множники мають вигляд: $\zeta_{m1} = -0.86114; \zeta_{m2} = -0.33998; \zeta_{m3} = 0.33998; \zeta_{m4} = 0.86114 (m=1,2)$ (аналогічно для η_{mk}); $w_1 = w_4 = 0.34785; w_2 = w_3 = 0.65215$.

Задача 3. Оцінити вплив внутрішнього джерела, заданого у вигляді квадратної пластини $\Omega_{\psi 2} = \{(x_1, x_2, x_3) : -d \leq x_1 \leq d, x_2 = 0.25, -d \leq x_3 \leq d\}$, з інтенсивністю

$\tilde{\psi}(x) = \psi_g (1 + \cos(\frac{\pi x_1}{d})) (1 + \cos(\frac{\pi x_2}{d}))$, де $d = 0.5$, на розподіл теплового поля у паралелепіпеді (1) з заданою на його межі крайовою умовою першого роду (27).

На рис. 2 наведено розподіл теплового поля без внутрішнього джерела та порівняно його з урахуванням впливу різної інтенсивності джерел тепла. Після розв'язання поставленої задачі за допомогою НМГЕ для $V_\Gamma = 16$, при цьому кількість внутрішніх елементів дискретизації пластини $Q=4$ (зазначимо, що вона ніяк не впливала на розмірність матриці СЛАР (12)).

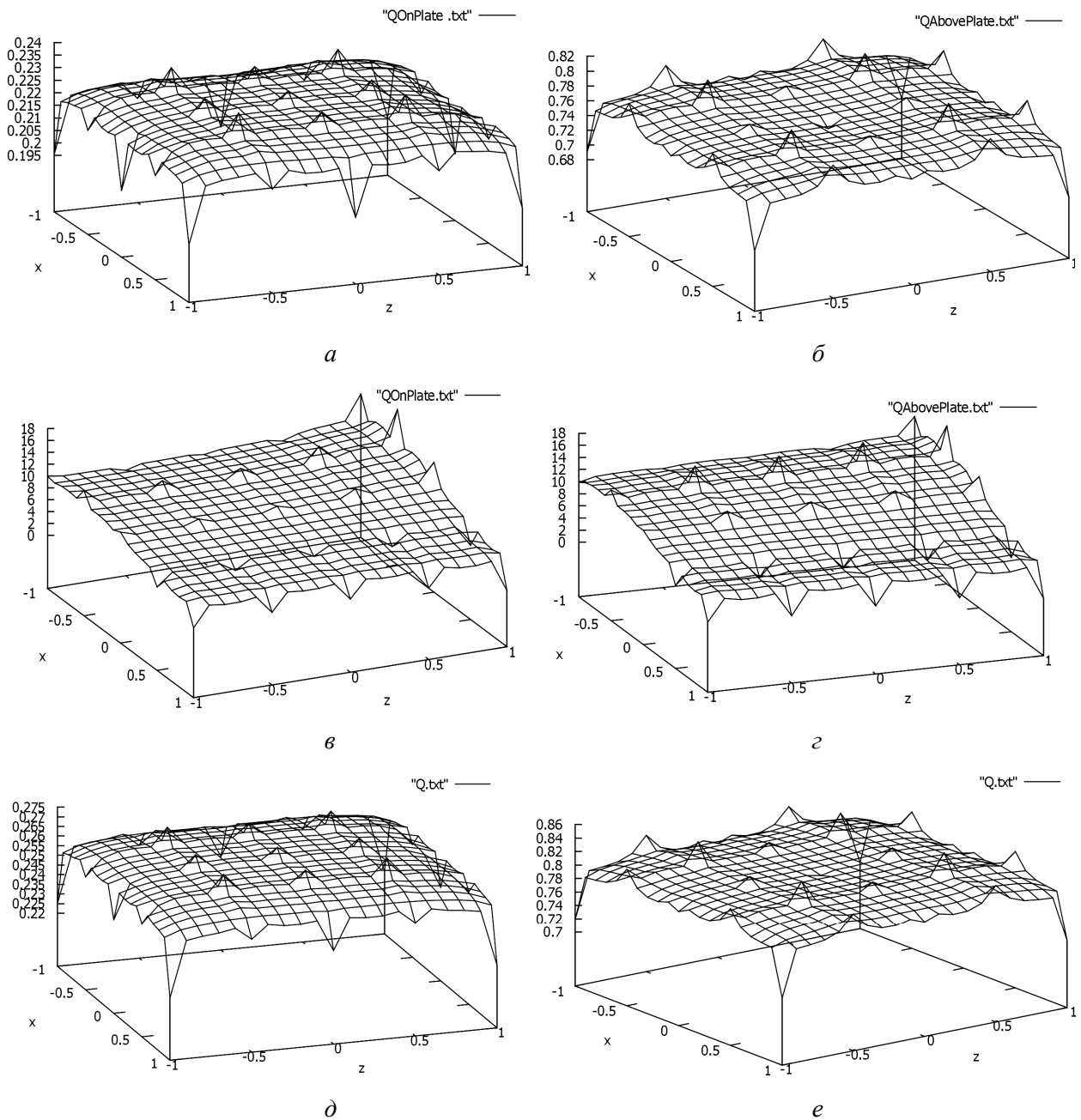


Рис. 2. Розподіл температури в паралелепіпеді за заданого внутрішнього джерела тепла у вигляді пластини: для $\psi_g = -0.5$ - (а) на пластині $x_2 = 0.25$; (б) вище пластини $x_2 = 0.75$; для $\psi_g = 0.5$ - (в) на пластині $x_2 = 0.25$; (г) вище пластини $x_2 = 0.75$; без джерела тепла - (д) $x_2 = 0.25$ та (е) $x_2 = 0.75$

Як бачимо, у разі нагрівання внутрішнім джерелом ($\psi_g = 0.5$) температура в паралелепіпеді зростає порівняно з випадком, коли такого джерела нема, а у разі охолодження спадає ($\psi_g = -0.5$).

Задача 4. Оцінити вплив об'ємного внутрішнього джерела, заданого у вигляді паралелепіпедя $\Omega_{\psi_3} = \{(x_1, x_2, x_3) : -d_1 \leq x_1 \leq d_1, -d_2 \leq x_2 \leq d_2, -d_3 \leq x_3 \leq d_3\}$, (28) інтенсивністю

$$\tilde{\psi}(x) = \psi_g \left(1 + \cos\left(\frac{\pi x_1}{d_1}\right)\right) \left(1 + \cos\left(\frac{\pi x_2}{d_2}\right)\right) \left(1 + \cos\left(\frac{\pi x_3}{d_3}\right)\right), \quad (29)$$

де $d_1 = d_2 = d_3 = 0.75$, на розподіл теплового поля в об'єкті (1) з крайовою умовою першого роду (27).

На рис. 3 наведено розподіл теплового поля без внутрішнього джерела та порівняно його з урахуванням впливу різної інтенсивності джерела тепла після розв'язання поставленої задачі за допомогою НМГЕ для $V_{\Gamma} = 16$, при цьому кількість внутрішніх елементів дискретизації куба $Q=8$.

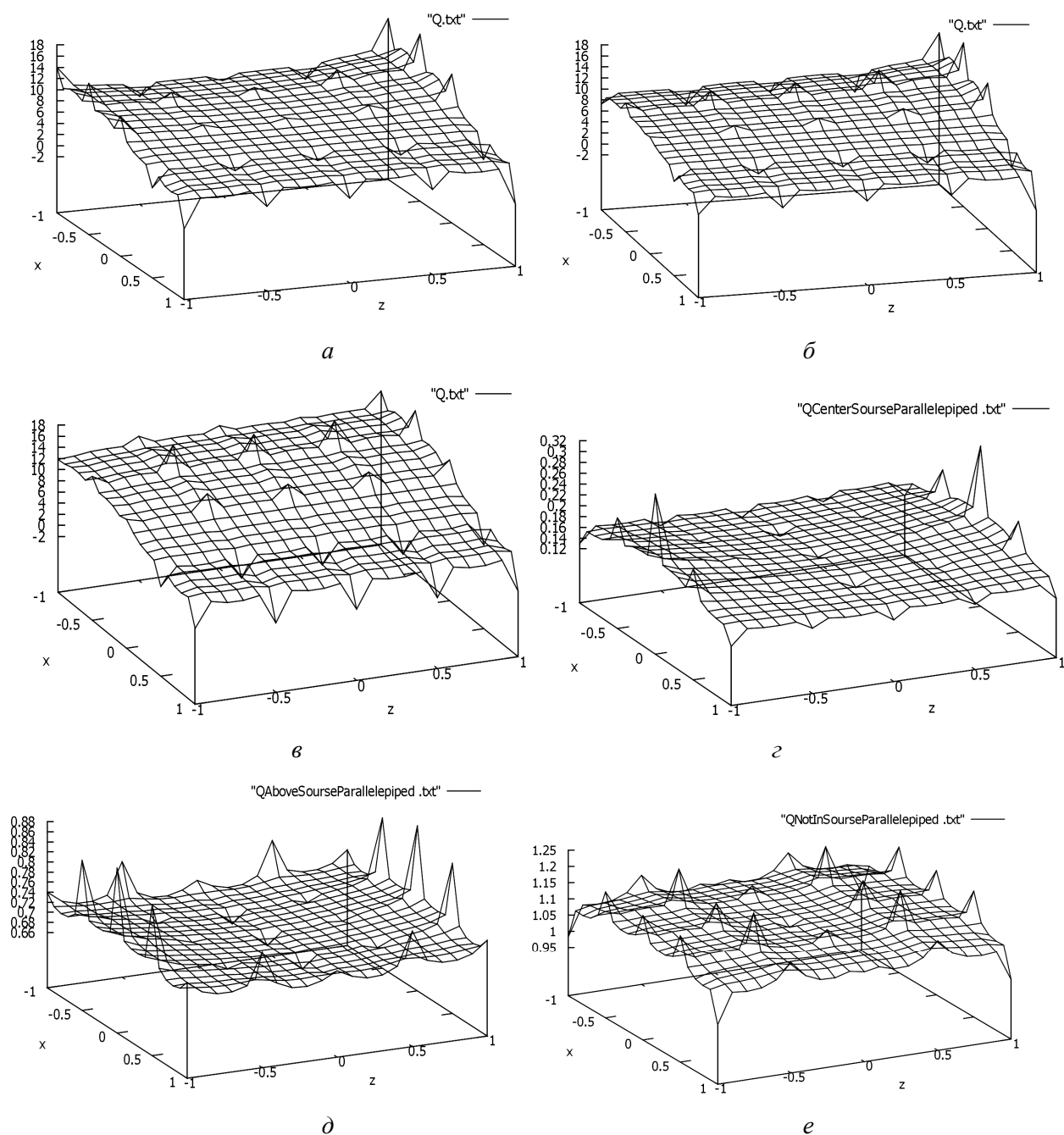


Рис. 3. Розподіл температури в паралелепіпеді при заданому внутрішньому джерелі тепла у вигляді куба – ($\Psi_g = 0.5$) - (а) на площині, що проходить через центр джерела, $x_2 = 0.0$; (б) на площинах в середині джерела $x_2 = 0.5$; (в) на його межі $x_2 = 0.75$; ($\Psi_g = -0.5$) - (г-е) на тих самих площинах

Як бачимо, під час нагрівання об'ємним внутрішнім джерелом ($\Psi_g = 0.5$) температура в паралелепіпеді є вищою порівняно з попереднім випадком, коли джерело було плоским, а у разі охолодження – нижчою ($\Psi_g = -0.5$).

Задача 5. Знайти розподіл теплового поля в паралелепіпеді (1) з заданими змішаними граничними умовами першого та третього роду:

$$\theta(x) = 10, x \in \Gamma^{(1)}, \quad \theta(x) = 0, x \in \Gamma^{(2)}, \quad -\lambda_0 \frac{\partial \theta(x)}{\partial \mathbf{n}(x)} + \nu_0 \theta(x) = 0, x \in \Gamma^{(j)}, j = \overline{3,6},$$

та об'ємним внутрішнім джерелом (28) інтенсивністю (29), де $\psi_g = -0.5$, $a_1 = -0.25, a_2 = 0.25, b_1 = c_1 = -0.75, b_2 = c_2 = 0.75, \nu_0 = 1 \text{ Вт/м}^2 \text{ С}, d_1 = 0.25, d_2 = d_3 = 0.75$.

На рис. 4 наведено розподіл теплового поля після розв'язання поставленої задачі за допомогою НМПГЕ для $V_\Gamma = 16, h_1 = h_2 = 0.3, h_3 = h_4 = 0.1, h_5 = h_6 = 0.15$, кількість елементів дискретизації внутрішнього об'ємного джерела $Q=8$.

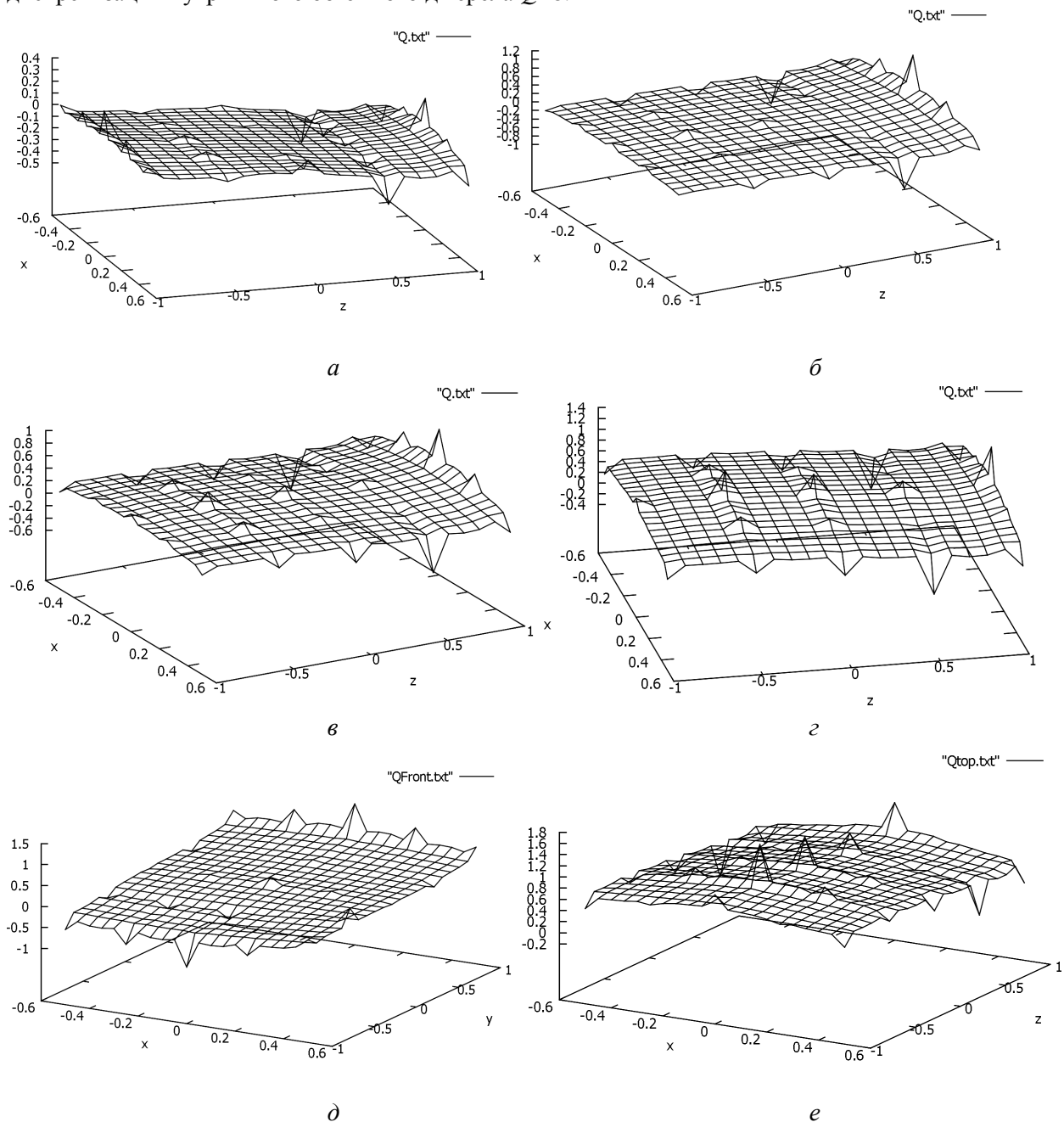


Рис. 4. Розподіл температури в паралелепіпеді із внутрішнім об'ємним джерелом тепла на площині, (а) що проходить через центр джерела, $x_2 = 0.0$; (б) на площинах в середині джерела $x_2 = 0.5$, (в) на його межі $x_2 = 0.75$, (г) поза його межами $x_2 = 0.95$; (д) на передній та (е) верхній гранях паралелепіпедя

Висновки

Здійснено апробацію запропонованих підходів, що ґрунтуються на комбінованому використанні переваг аналітичних та чисельних методів. Вони об'єднують фундаментальний розв'язок рівняння Лапласа, основні ідеї непрямих методів граничних і приграничних елементів та методу колокації. Збільшення кількості елементів дискретизації зменшує похибку задоволення граничних умов. Водночас ускладнення процедури чисельного інтегрування (під час використання, наприклад, розподілів невідомих функцій, які в межах граничного чи приграничного елементів змінюються неперервно, а не є постійними), дало б змогу істотно знизити обчислювальні похибки навіть при меншій кількості елементів дискретизації. Зауважимо також, що до переваг обох підходів зарахуємо те, що вони не потребують диференціювання чисельних величин.

Для проведення розрахунків наукових досліджень було використано мову програмування C#. Для візуалізації результатів досліджень використано Gmplot.

Запропонований підхід може бути розширений для розгляду тривимірних об'єктів довільної форми, що спричинить обчислення інтегралів по 8-ми вузлових граничних елементах замість чотирьох та 24-х вузлових приграничних елементах замість 8-ми.

1. Бенерджи П., Баттерфилд Р. *Метод граничных элементов в прикладных науках.* – М.: Мир, 1984. – 494 с.
2. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. *Методы граничных элементов.* – М.: Мир, 1987. – 524 с.
3. Владимиров В.С. *Уравнения математической физики.* – М.: Наука, 1971. – 512 с.
4. Журавчак Л.М., Грицько Є.Г. *Метод приграничних елементів у прикладних задачах математичної фізики.* – Львів: Карпатське відділення Інституту геофізики НАН України, 1996. – 220 с.
5. Журавчак Л. М., Забродська Н. В. *Нестационарное тепловое поле в неоднородных материалах с нелинейной поведінкою їх компонент // Фіз.-хім. механіка матеріалів.* – 2010. – № 1. – С. 33–41.
6. Г.Карслоу, Д.Егер. *Теплопроводность твердых тел: Пер. с англ.* – М.:Наука, 1964. – 488 с.
7. Круковський П.Г. *Визначення теплофізичних характеристик спучувального вогнезахисного покриття методом обернених задач теплопровідності // Журнал "Пожежна безпека: теорія і практика".* – 2008. – №1. – С. 49–53.
8. Федасюк Д.В. *Методи та засоби теплового проектування мікроелектронних пристроїв.* – Львів: Вид-во Держ. Ун-ту "Львів. політехніка", 1999. – 228 с.
9. Shaw R. P. *An outer boundary applied to transient wave scattering in an inhomogeneous medium.* - *Appl. Mech.*, 42,1975. – С. 147–152 .
10. Ozisik, M.N. *Heat Conduction, 2nd edition.*- John Wiley and Sons, N.Y., 2002. – 512 с.
11. Beer G., Smith I., Duenser C. *The Boundary Element Method with Programming: for Engineers and Scientists.* - Wienn: Springer-Verlag, 2008. – 496 p.
12. Marczak R.J. *An Object-Oriented Programming Framework for Boundary Integral Equation Methods / R.J. Marczak // Computers and Structures, 2004. – Vol. 82. – P. 1237–1257.*