

a test field. In the case if need for development of an intelligent sensor based on 3D-sensors for vector quantities measurement arises the proposed method of refining linear coefficients can be implemented in software of intelligent sensors.

1. Popovic R.S. *Hall Effect Devices* / R.S. Popovic – Adam Hilger, Bristol, Philadelphia and New York, 2002. – 420 p. 2. Hotra Z.Yu. *Microelectronic magnetic sensors* / Z.Yu.Hotra [et al.]. – Lviv: Publishing of Lviv Polytechnic National University, 2001. 3. Bolshakova I. *High precision mapper for cyclotron magnet* / I. Bolshakova, R. Holyaka, V. Erashok, M. Kumada // *IEEE Transactions on Applied Superconductivity*. – 2004. – Vol.14. №2. – P.1818 – 1821. 4. Antokhin E. *Permanent Magnet System for PET Cyclotron* / E. Antokhin, M. Kumada, Y. Iwashita, S. Wakasa, S. Matsumoto, T. Fujisawa, I. Bolshakova, R. Holyaka, V. Erashok, E. Sugiyama, H. Shimizu // *IEEE Transactions on Applied Superconductivity*. – 2008. – Vol.18, №2. – P. 965-968. 5. Bolshakova I. *Stable semiconductor magnetic field sensors under dozes of high radiation* / I. Bolshakova, V. Brudnyi, R. Holyaka [et al.] // *Plasma Physics and Controlled Fusion*. – 2003. – Vol.45. – Num.12A. – P.4.68. 6. Bolshakova I. *Way of providing radiation resistance of magnetic field semiconductor sensor* / I. Bolshakova, S. Krukovskii, R. Holyaka [et al.] // *Radiation Physics and Chemistry*. – 2001.– №61. – PP.743-745. 7. Bolshakova I.A. *Methods of modeling and calibrating 3D magnetic sensors based on splitted Hall structures* / I.A. Bolshakova, R.L. Holyaka, Z.Yu. Hotra, T.A. Marusenkova // *Electronics and communications. Electronics and nanotechnologies*. – 2011. – № 2(61). – PP. 34 – 38. 8. Hotra Z. Yu. *Arbitrary rotation method for 3D magnetic sensors calibration [CAD Systems in Microelectronics (CADSM), 2011 11th International Conference The Experience of Designing and Application of CAD Systems in Microelectronics]*, (Lviv-Polyana, Feb 23-25 2011) / Z.Yu. Hotra, R.L. Holyaka, I.A. Bolshakova [et al.] – 2011. – PP. 413–416.

УДК 517.957:550.837

Л. Журавчак, Ю. Федоришин

Карпатське відділення інституту геофізики ім. С. І. Субботіна НАН України

РОЗПІЗНАВАННЯ ПРОВІДНИХ ТА ВИСОМНИХ ВКЛЮЧЕНЬ У КУСКОВО-ОДНОРІДНОМУ ПІВПРОСТОРИ ПРИ МАТЕМАТИЧНОМУ МОДЕЛЮВАННІ УСТАЛЕНИХ КОЛИВАНЬ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ

© Журавчак Л., Федоришин Ю., 2014

Для кусково-однорідного провідного півпростору розглянуто аналітично-числову методику знаходження компонент векторів напруженості електромагнітного поля, збудженого стороннім джерелом струму. Проведено числові експерименти для повної, з урахуванням струмів зміщення, та квазістаціонарної моделей, досліджено вплив включення з вищою та нижчою, ніж у геосередовищі, провідністю на розподіл поля на денній поверхні.

Ключові слова: система рівнянь Максвелла; система рівнянь Гельмгольца; усталені коливання електромагнітного поля; непрямий метод граничних елементів.

The numerical-analytic technique for finding electric and magnetic components of electromagnetic field in a piecewise homogeneous conductive half-space is suggested. Electromagnetic field is excited by a horizontal contour with current harmonically changing in time. The problem is formulated and solved by means of the boundary element method.

Key words: Maxwell's equation system, the Helmholtz equation system, established EMF fluctuations; indirect boundary element method.

Вступ

Сьогодні гармонічно змінні в часі електромагнітні поля (ЕМП) в однорідних та горизонтально-шаруватих моделях земної кори за дії природних та штучних джерел досліджені за допомогою добре розвинутої теорії спектрального аналізу. Це особливо стосується широкого класу

двовимірних магнітотелуричних задач, коли зовнішнє поле задається у вигляді однорідного магнітного поля або плоскої хвилі. Відомі також аналітичні розв'язки задач розподілу ЕМП в порівняно простих електричних умовах для чужорідних локальних включень канонічної чи близької до неї форми у дво- та тривимірних горизонтально-шаруватих моделях [1, 2]. Щодо об'єктів із включеннями довільної форми, які краще відображають реальну геоелектричну ситуацію, то для математичного моделювання ЕМП, збудженого штучними джерелами, в останні роки на базі сучасних швидкодіючих комп'ютерів все частіше використовують числові та аналітично-числові методи розв'язування прямих задач геоелектрики. Застосування найпоширеніших різницевих методів [3, 4] чи методів скінченних елементів [5, 6] дає хорошу точність результатів, але вимагає покриття сіткою всієї області, яку займає різномірне тіло, що потребує великих обсягів пам'яті й програм для обернення матриць великих розмірів. Використання методу граничних інтегральних рівнянь [7–9] та створених на його основі методів граничних елементів [10] дає можливість дискретизувати тільки граничну поверхню об'єкта та поверхні розподілу середовища, що економить обсяг оперативної пам'яті під час реалізації алгоритму та дає порівняно високу точність розрахунків у внутрішніх точках.

У цій роботі запропоновано і апробовано аналітично-числовий підхід, який ґрунтується на непрямому методі граничних елементів, до розв'язування прямих тривимірних задач теорії ЕМП у випадку усталених коливань для провідного кускового-однорідного півпростору, враховано струми зміщення порівняно з квазістаціонарною моделлю, а також досліджено вплив включень з вищою та нижчою (на прикладі нафто- та газонесних покладів), ніж у геосередовищі, провідністю на розподіл поля.

Формулювання задачі

Розглянемо кусково-однорідний півпростір, що у декартовій системі координат займає область $\Omega = R^{3-} = \{(x_1, x_2, x_3) : -\infty < x_1 < \infty, -\infty < x_2 < \infty, -\infty < x_3 < 0\}$ і містить включення Ω_2 (просторове тіло у формі паралелепіпеда), яке перебуває в ідеальному електромагнітному контакті з геосередовищем $\Omega_1 = \Omega / \Omega_2$ і має відмінні від середовища електромагнітні характеристики. Середовище Ω_1 і включення Ω_2 характеризуються постійними електропровідностями σ_1, σ_2 , магнітними проникностями μ_1, μ_2 і діелектричними проникностями $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ відповідно. На поверхні півпростору $\Gamma = \{(x_1, x_2, x_3) : -\infty < x_1 < \infty, -\infty < x_2 < \infty, x_3 = 0\}$ електричне поле (ЕП) відсутнє, а в контурі $C \subset \Omega_1$ діє сторонній струм інтенсивності $\mathbf{y}^{\mathbf{r}}(x, t) = (y_1(x, t), y_2(x, t), y_3(x, t))$, де τ – часова змінна, $x = (x_1, x_2, x_3)$ – точка півпростору. В початковий момент часу спостерігається нульовий розподіл компонент вектора напруженості ЕП $E_i^l(x, \tau)$ у середовищі Ω_1 та у включенні Ω_2 , $i=1,2,3$, $l=1,2$, та швидкості їх зміни.

Поширення ЕМП у провідному кусково-однорідному півпросторі, в зоні Ω_1 якого діють сторонні струми, описується системою рівнянь Максвелла:

$$\begin{array}{ll}
 \text{для геосередовища } ((x, \tau) \in \Omega_1 \times T) & \text{для включення } ((x, \tau) \in \Omega_2 \times T) \\
 \text{rot} \mathbf{H}^1(x, \tau) = \sigma_1 \mathbf{E}^1(x, \tau) + \varepsilon_1 \frac{\partial \mathbf{E}^1(x, \tau)}{\partial \tau} + \mathbf{\Psi}(x, \tau), & \text{rot} \mathbf{H}^2(x, \tau) = \sigma_2 \mathbf{E}^2(x, \tau) + \varepsilon_2 \frac{\partial \mathbf{E}^2(x, \tau)}{\partial \tau}, \\
 \text{div} \mathbf{H}^1(x, \tau) = 0, & \text{div} \mathbf{H}^2(x, \tau) = 0, \\
 \text{rot} \mathbf{E}^1(x, \tau) = -\mu_1 \frac{\partial \mathbf{H}^1(x, \tau)}{\partial \tau}, & \text{rot} \mathbf{E}^2(x, \tau) = -\mu_2 \frac{\partial \mathbf{H}^2(x, \tau)}{\partial \tau}, \\
 \text{div} \mathbf{E}^1(x, \tau) = 0, & \text{div} \mathbf{E}^2(x, \tau) = 0,
 \end{array} \tag{1}$$

де $\mathbf{H}^l(x, \tau) = (H_1^l(x, \tau), H_2^l(x, \tau), H_3^l(x, \tau))$, $\mathbf{E}^l(x, \tau) = (E_1^l(x, \tau), E_2^l(x, \tau), E_3^l(x, \tau))$ – вектори напруженості магнітного та електричного поля в Ω_l , $T = \{\tau : 0 < \tau < \infty\}$.

Для багатьох задач електродинаміки доцільно поділити рівняння Максвелла (1), тобто записати окремо рівняння для електричного та магнітного полів. Використовуючи властивості векторних диференціальних операцій, отримаємо систему телеграфних рівнянь для визначення невідомих компонент ЕП $E_j^1(x,t)$ ($j=1,2,3$) у середовищі Ω_1 та $E_j^2(x,t)$ у включенні Ω_2 :

$$\begin{aligned} \Delta E_j^1(x,t) - s_1 m_1 \frac{\partial E_j^1(x,t)}{\partial t} - e_1 m_1 \frac{\partial^2 E_j^1(x,t)}{\partial t^2} &= m_1 \frac{\partial y_j(x,t)}{t}, (x,t) \in \Omega_1 \times T, \\ \Delta E_j^2(x,t) - s_2 m_2 \frac{\partial E_j^2(x,t)}{\partial t} - e_2 m_2 \frac{\partial^2 E_j^2(x,t)}{\partial t^2} &= 0, (x,t) \in \Omega_2 \times T, \end{aligned} \quad (2)$$

доповнену граничними

$$E_j^l(x,t) = 0, (x,t) \in \Gamma \times T, \quad (3)$$

початковими умовами

$$E_j^l(x,t) = 0, \frac{\partial E_j^l(x,t)}{\partial t} = 0, x \in \Omega_l \text{ при } t = 0, \quad (4)$$

а також умовами ідеального електромагнітного контакту (неперервність тангенціальних компонент електричного і магнітного полів (МП) та стрибок нормальних) на межі поділу середовищ:

$$E_d^1(x,t) = E_d^2(x,t), \quad \frac{1}{m_1} \text{rot} E_d^1(x,t) = \frac{1}{m_2} \text{rot} E_d^2(x,t), \quad (x,t) \in \Gamma_{12} \times T, \quad (5)$$

$$s_1 E_n^1(x,t) = s_2 E_n^2(x,t), \quad \text{rot} E_n^1(x,t) = \text{rot} E_n^2(x,t),$$

Тут Δ – оператор Лапласа, $\Gamma_{12} = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$, $\partial\Omega_l$ – межа зони Ω_l .

Якщо здійснювати спостереження через доволі тривалий час після зародження збурень, то можна припустити, що фізичні величини гармонічно змінюються в часі з кутовою частотою w , тобто ми маємо справу з задачею про усталені коливання. Припускаючи, що $E_j^l(x,t) = \underline{E}_j^l(x,w)e^{-iwt}$, $y_j(x,t) = \underline{y}_j(x,w)e^{-iwt}$, аналіз сильно спрощується, бо часова змінна виключається з початково-крайової задачі (2)–(5):

$$\Delta \underline{E}_j^1(x,w) + m_1 w(e_1 w + i s_1) \underline{E}_j^1(x,w) = -i w m_1 \underline{y}_j(x,w), x \in \Omega_1, \quad (6)$$

$$\Delta \underline{E}_j^2(x,w) + m_2 w(e_2 w + i s_2) \underline{E}_j^2(x,w) = 0, x \in \Omega_2,$$

$$\underline{E}_j^l(x,w) = 0, x \in \Gamma, \quad (7)$$

$$\underline{E}_d^1(x,w) = \underline{E}_d^2(x,w), \quad \frac{1}{m_1} \text{rot} \underline{E}_d^1(x,w) = \frac{1}{m_2} \text{rot} \underline{E}_d^2(x,w), \quad x \in \Gamma_{12} = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2. \quad (8)$$

$$s_1 \underline{E}_n^1(x,w) = s_2 \underline{E}_n^2(x,w), \quad \text{rot} \underline{E}_n^1(x,w) = \text{rot} \underline{E}_n^2(x,w),$$

Тут $\underline{E}_j^l(x,w) = \underline{E}_j^{l1}(x,w) + i \underline{E}_j^{l2}(x,w)$, $\underline{y}_j(x,w) = \underline{y}_j^1(x,w) + i \underline{y}_j^2(x,w)$ – комплексні амплітуди компонент вектора напруженості ЕП та сторонніх джерел струму.

Методика розв'язування. Інтегральне подання розв'язку

Для знаходження розв'язку задачі (6)–(8) використаємо непрямий метод граничних елементів. Згідно із цим методом границя розподілу середовища та включення розбивається на V областей (граничних елементів) Γ_v^{12} , таких що $\Gamma_{12} = \cup_{v=1}^V \Gamma_v^{12}$, $\Gamma_v^{12} \cap \Gamma_w^{12} = \emptyset$ при $v \neq w$. На кожному граничному елементі Γ_v^{12} задаються фіктивні джерела струму $j_{jv}^l(x,w) = j_{jv}^{l1}(x,w) + i j_{jv}^{l2}(x,w)$, ($j = 1,2,3$). Відповідно отримаємо нову систему рівнянь:

$$\Delta \underline{E}_j^1(x,w) + m_1 w(e_1 w + i s_1) \underline{E}_j^1(x,w) = - \sum_{v=1}^V j_{jv}^1(x,w) c_v - i w m_1 \underline{y}_j(x,w), \quad (9)$$

$$\Delta \underline{E}_j^2(x,w) + m_2 w(e_2 w + i s_2) \underline{E}_j^2(x,w) = - \sum_{v=1}^V j_{jv}^2(x,w) c_v,$$

де c_v – характеристична функція елемента Γ_v .

Використавши для півпростору без включення спеціальний фундаментальний розв'язок $\Phi_h^1(x, \mathbf{x}, w)$ рівняння Гельмгольца, який автоматично задовольняє граничну умову (7), та фундаментальний розв'язок $\Phi^2(x, \mathbf{x}, w)$ для включення, запишемо інтегральне подання розв'язку задачі (9), (7), (8) для компонент $\mathcal{E}_j^0(x, w)$ та $\mathcal{E}_j^2(x, w)$:

$$\mathcal{E}_j^0 = \sum_{v=1}^V \int_{\Gamma_v} \Phi_h^1(x, \mathbf{x}, w) j_{jv}^1(x, w) d\Gamma_v(x) + I_{cj}(x, w, \Phi_h^1), \quad \mathcal{E}_j^2 = \sum_{v=1}^V \int_{\Gamma_v} \Phi^2(x, \mathbf{x}, w) j_{jv}^2(x, w) d\Gamma_v(x), \quad (10)$$

а також одержані на його основі інтегральні зображення для похідних від цих компонент за координатами x_l :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{E}_j^0(x, w)}{\partial x_k} &= \sum_{v=1}^V \int_{\Gamma_v} Q_{hk}^1(x, \mathbf{x}, w) j_{jv}^1(x, w) d\Gamma_v(x) + I_{cj}(x, w, Q_{hk}^1), \\ \frac{\partial \mathcal{E}_j^2(x, w)}{\partial x_k} &= \sum_{v=1}^V \int_{\Gamma_v} Q_k^2(x, \mathbf{x}, w) j_{jv}^2(x, w) d\Gamma_v(x), \end{aligned} \quad (11)$$

де $F_h^1(x, \mathbf{x}, w) = F^1(r, w) - F^1(r', w)$, $F \in \{\Phi, Q_k\}$, $F^1(r, w) = F^1(x, \mathbf{x}, w) = F^{11}(r, w) + iF^{12}(r, w)$, $r^2 = \sum_{k=1}^3 (x_k - x_k)^2$, $r'^2 = \sum_{k=1}^2 (x_k - x'_k)^2$, $x'_k = x_k$ ($k = 1, 2$), $x'_3 = -x_3$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in R^3$,

$$\Phi^1(r, w) = \frac{\exp(ir\sqrt{m_l w}(e_l w + iS_l))}{4pr}, \quad \Phi^{11}(r, w) = \frac{1}{4pr} \exp(-rA_l \sin(\frac{q_l}{2})) \cdot \cos(rA_l \cos(\frac{q_l}{2})),$$

$$\Phi^{12}(r, w) = \frac{1}{4pr} \exp(-rA_l \sin(\frac{q_l}{2})) \cdot \sin(rA_l \cos(\frac{q_l}{2})), \quad Q_k^1(x, \mathbf{x}, w) = \frac{\partial \Phi^1(x, \mathbf{x}, w)}{\partial x_k} = (x_k - x_k) Q^1(r, w),$$

$$Q^{11}(r, w) = -\frac{1}{r^2} \left(rA_l (\Phi^{11} \sin(\frac{q_l}{2}) + \Phi^{12} \cos(\frac{q_l}{2})) + \Phi^{11} \right), \quad A_l = \sqrt{m_l w} \sqrt[4]{e_l^2 w^2 + S_l^2}, \quad q_l = \arctg\left(\frac{S_l}{e_l w}\right),$$

$$Q^{12}(r, w) = \frac{1}{r^2} \left(rA_l (\Phi^{11} \cos(\frac{q_l}{2}) - \Phi^{12} \sin(\frac{q_l}{2})) - \Phi^{12} \right),$$

$$I_{cj}(x, w, F_h^1) = iwm_l \int_C F_h^1(x, \mathbf{x}, w) y_j^0(x, w) dC(x) = I_{cj}^1(x, w, F_h^1) + iI_{cj}^2(x, w, F_h^1),$$

$$I_{cj}^1(x, w, F_h^1) = -wm_l \int_C (F_h^{11} y_j^0 + F_h^{12} y_j^1) dC(x), \quad I_{cj}^2(x, w, F_h^1) = wm_l \int_C (F_h^{11} y_j^1 - F_h^{12} y_j^0) dC(x).$$

Для спрощення алгоритму апроксимуємо невідомі функції $j_{jv}^{11}(x, w)$, $j_{jv}^{12}(x, w)$ константами d_{jv}^{11} , d_{jv}^{12} . Для їх знаходження побудуємо з використанням виразів (10), (11) систему лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР), вимагаючи задоволення в колокаційному сенсі умов контакту (8).

Після розв'язання СЛАР, використовуючи формули (10), обчислюємо значення компонент ЕП у будь-яких точках x^p півпростору, які нас цікавлять:

$$\mathcal{E}_j^{01}(x^p, w) = \sum_{v=1}^V \left(d_v^{11} I_{vp}(\Phi_h^{11}) - d_v^{12} I_{vp}(\Phi_h^{12}) \right) + I_{cj}^1(x^p, w, \Phi_h^1),$$

$$\mathcal{E}_j^{02}(x^p, w) = \sum_{v=1}^V \left(d_v^{11} I_{vp}(\Phi_h^{12}) + d_v^{12} I_{vp}(\Phi_h^{11}) \right) + I_{cj}^2(x^p, w, \Phi_h^1),$$

$$\mathcal{E}_j^{21}(x^p, w) = \sum_{v=1}^V \left(d_v^{21} I_{vp}(\Phi^{21}) - d_v^{22} I_{vp}(\Phi^{22}) \right), \quad \mathcal{E}_j^{22}(x^p, w) = \sum_{v=1}^V \left(d_v^{21} I_{vp}(\Phi^{22}) + d_v^{22} I_{vp}(\Phi^{21}) \right),$$

де $I_{vp}(F) = \int_{\Gamma_v} F(x, \mathbf{x}, w) d\Gamma_v(x)$, $F \in \{\Phi_h^{11}, \Phi_h^{12}, \Phi^{22}, \Phi^{21}\}$.

Дійсні та уявні частини $\mathcal{H}_j^{01}(x^p, w)$, $\mathcal{H}_j^{02}(x^p, w)$ компонент вектора напруженості МП обчислимо за формулами:

$$\mathcal{H}_k^{01}(x^p, w) = \frac{1}{wm_l} \left(\frac{\partial E_s^{12}}{\partial x_j} - \frac{\partial E_j^{12}}{\partial x_s} \right), \quad \mathcal{H}_k^{02}(x^p, w) = -\frac{1}{wm_l} \left(\frac{\partial E_s^{11}}{\partial x_j} - \frac{\partial E_j^{11}}{\partial x_s} \right). \quad (12)$$

Тут для різних k використовуються різні пари індексів s та j , так, для $k=1 - s=3, j=2$, для $k=2 - s=1, j=3$, для $k=3 - s=2, j=1$.

Квазістаціонарна модель

У випадку квазістаціонарної моделі рівняння системи (6) мають вигляд:

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{E}_j^0(x, w) + im_1 w s_1 \tilde{E}_j^0(x, w) &= -i w m_1 \mathcal{Y}_j^0(x, w), \\ \Delta \tilde{E}_j^2(x, w) + im_2 w s_2 \tilde{E}_j^2(x, w) &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Відповідно дещо спростяться вирази для фундаментальних розв'язків:

$$\begin{aligned} \Phi^{l1}(r, w) &= \frac{1}{4pr} \exp(-rA_l / \sqrt{2}) \cdot \cos(rA_l / \sqrt{2}), \quad \Phi^{l2}(r, w) = \frac{1}{4pr} \exp(-rA_l / \sqrt{2}) \cdot \sin(rA_l / \sqrt{2}), \\ Q^{l1}(r, w) &= -\frac{1}{r^2} (rA_l (\Phi^{l1} + \Phi^{l2}) / \sqrt{2} + \Phi^{l1}), \quad Q^{l2}(r, w) = \frac{1}{r^2} (rA_l (\Phi^{l1} - \Phi^{l2}) / \sqrt{2} - \Phi^{l1}), \end{aligned}$$

тут враховано, що $q_l = p / 2$, а для A_l маємо формулу $A_l = \sqrt{m_1 w s_1}$.

Числова реалізація

Задача 1. Для числових експериментів було розглянуто включення Ω_2 у формі паралелепіпеда розмірами $p_x=100, p_y=100, p_z=30$, розміщеного на глибині h_0 . Стороннім джерелом, яке збуджувало ЕМП, була квадратна рамка зі стороною $h=100$, розміщена на глибині $h_3=-0.001$. Залежність сили струму в ній описувалася функцією $\mathcal{Y}_j^0(x, w) = C_j(x)$, де $C_j(x)$ – проекції одиничного вектора, колінеарного дотичній до контура C в точці $x \in C$. У цьому частковому випадку інтеграли, які входять у вирази (10), (11), мали вигляд:

$$\mathcal{Y}_{cj}^0(x, w, \tilde{E}_j^0) = -w m_1 \int_C \tilde{E}_j^0 C_j(x) dC(x), \quad \mathcal{Y}_{cj}^2(x, w, \tilde{E}_j^2) = w m_2 \int_C \tilde{E}_j^2 C_j(x) dC(x).$$

Кожну грань паралелепіпеда розбивали на 27 граничних елементів (рис. 1).

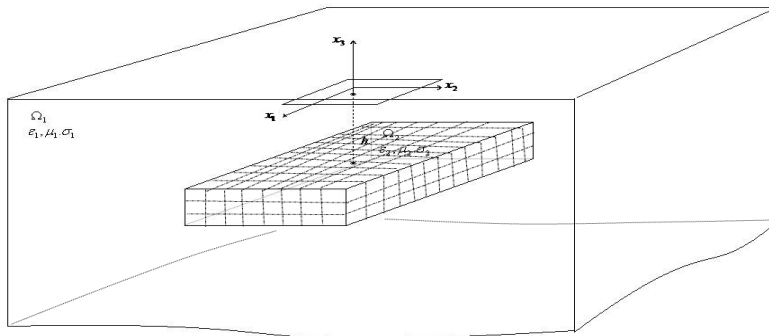


Рис. 1. Геоелектрична модель півпростору з включенням

На рис. 2 зображено залежність значень вертикальної компоненти $H_3^1(0, 0, h_3, w)$, одержаних в центрі рамки, від кутової частоти ω , для повної і квазістаціонарної моделей у випадку нафтового ($\sigma_2=0,25\sigma_1, \mu_2=0,99994\mu_1, \epsilon_2=2\epsilon_1$, ряди 3, 6), газового ($\sigma_2=0,1\sigma_1, \mu_2=1,00008\mu_1, \epsilon_2=\epsilon_1$, ряди 4, 7) та провідного ($\sigma_2=5\sigma_1, \mu_2=\mu_1, \epsilon_2=30\epsilon_1$, ряди 1, 5) включень, розміщених на глибині $h_0=40$; для порівняння наведено розподіл ЕМП в однорідному півпросторі $\sigma_1=1\text{См/м}, \mu_1=4\pi 10^{-7}\text{Гн/м}, \epsilon_1=15\epsilon_0, \epsilon_0=1/36 \pi 10^{-9} \text{Ф/м}$ для повної моделі (ряд 2). Як бачимо, для високоомних включень значення $H_3^1(0, 0, h_3; w)$ на всьому діапазоні частот є меншими, ніж в однорідному півпросторі, а для провідних – більшими; причому врахування струмів зміщення дає вищі величини, ніж квазістаціонарна модель, що особливо проявляється в області високих частот.

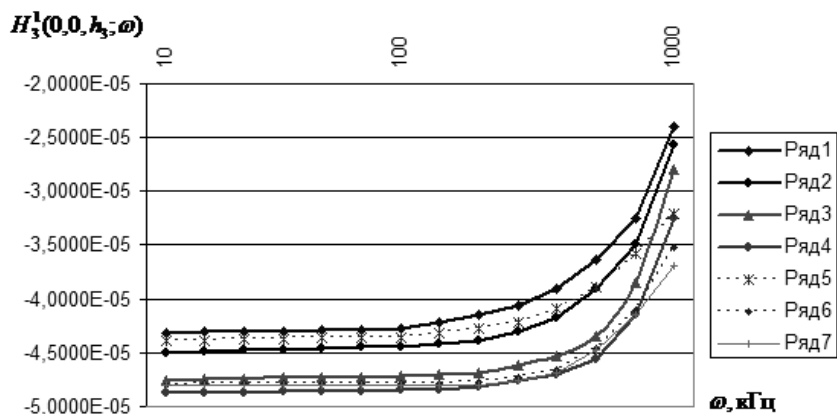


Рис. 2. Вплив електромагнітних параметрів включення на вертикальну компоненту вектора напруженості магнітного поля

Як відомо, під час інтерпретації результатів важливе значення мають теоретичні криві [11], які характеризують амплітуду $|r_w^f|/r_1$ та фазу q_w^f позірнього опору, тут

$$|r_w^f|/r_1 = \frac{\sqrt{(f^1 f^{01} + f^2 f^{02})^2 + (f^2 f^{01} - f^1 f^{02})^2}}{(f^{01})^2 + (f^{02})^2}, \quad q_w^f = \arctg \frac{f^2 f^{01} - f^1 f^{02}}{f^1 f^{01} + f^2 f^{02}}, \quad f^k \in \{H_1^{1k}, H_2^{1k}, H_3^{1k}, E_1^{1k}, E_2^{1k}, E_3^{1k}\}$$

($k=1,2$), f^1, f^{01}, f^2, f^{02} – дійсні та уявні частини компонент векторів напруженості ЕМП, індекс “0” вказує на величини в однорідному півпросторі з питомим опором $r_1 = 1/s_1$.

На рис. 3, 4 зображено графіки залежності теоретичних кривих $|r_w^f|/r_1$ та q_w^f від I_1/h_0 , побудованих на базі вертикальної компоненти МП, у центрі рамки для повної моделі.

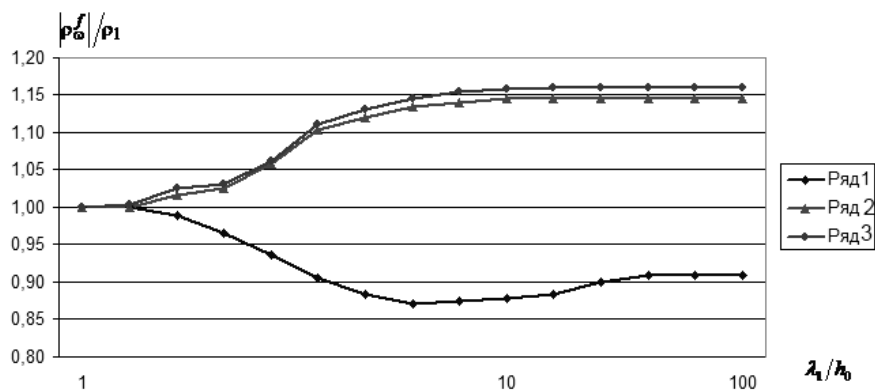


Рис. 3. Залежність амплітудних кривих від довжини хвилі

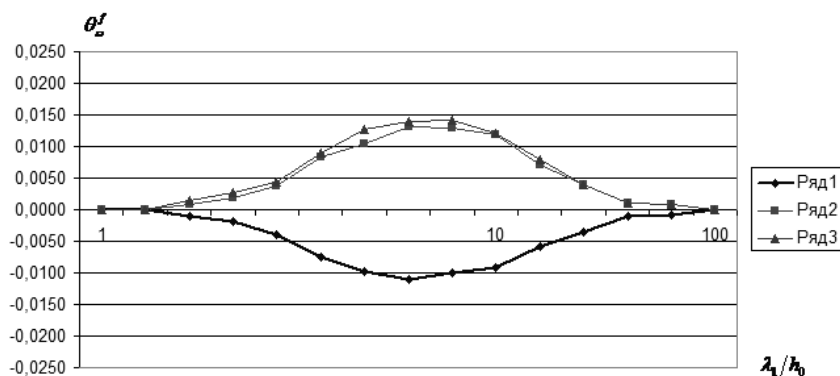


Рис. 4. Залежність фазових кривих від довжини хвилі

Також було розглянуто залежність величин $|r_w^f|/r_1$ та q_w^f , побудованих на базі вертикальної компоненти МП, від глибини залягання провідного включення ($\sigma_2=5\sigma_1$, $\mu_2=\mu_1$, $\varepsilon_2=30\varepsilon_1$) – $h_0=40$ (ряд 1), $h_0=80$ (ряд 2) і $h_0=100$ (ряд 3) для діапазону частот від 1кГц до 100 кГц. (рис. 5, 6).

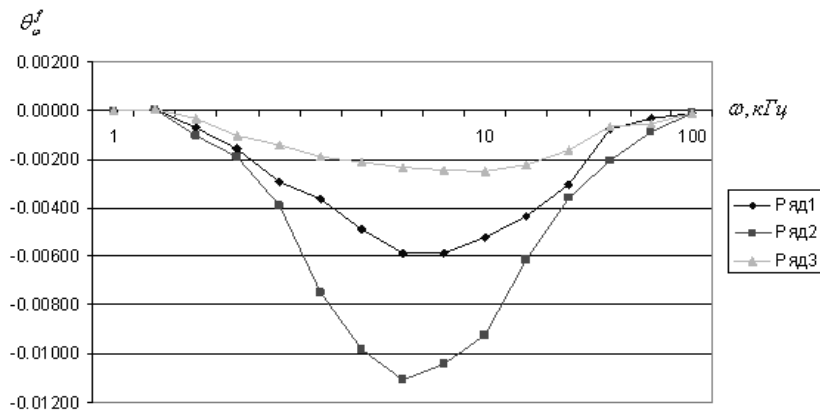


Рис. 5. Графік залежності фазових кривих від довжини хвилі та глибини залягання

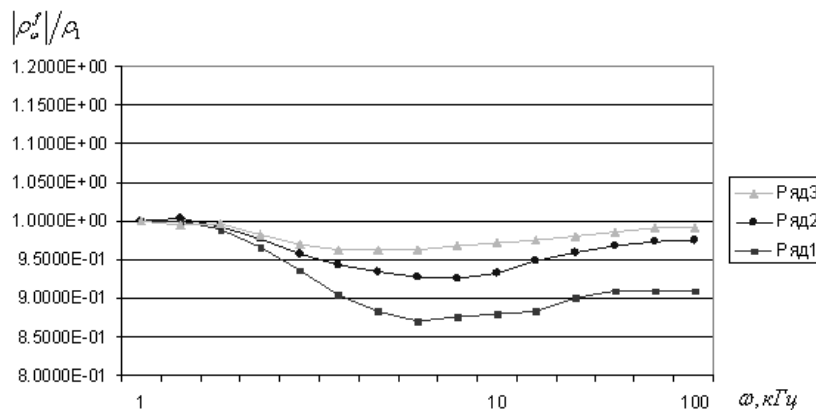


Рис. 6. Графік залежності амплітудних кривих від довжини хвилі та глибини залягання

Випадок однорідного об'єкта з довільною криволінійною межею

Задача знаходження компонент ЕМП для усталених коливань складається з системи рівнянь:

$$\Delta \tilde{E}_j(x, \omega) + \mu\omega(\varepsilon\omega + i\sigma)\tilde{E}_j(x, \omega) = -i\omega\mu\tilde{\psi}_j(x, \omega), \quad x \in \Omega,$$

та граничних умов:

$$\tilde{E}_j(x, \omega) = \tilde{E}_{jz}(x, \omega), \quad x \in \Gamma. \quad (14)$$

СЛАР для знаходження інтенсивності невідомих фіктивних джерел струму будемо, задовольняючи граничні умови (14).

Задача 2. Запропонований підхід також було застосовано для моделювання усталених коливань у тривимірному однорідному об'єкті з електромагнітними характеристиками провідного (ряд 1) і нафтового (ряд 2) покладів у формі еліпсоїда з осями $a=3$, $b=2$, $c=1$. Межу тіла розбивали на 74 граничні елементи. Досліджено вплив стороннього джерела струму у вигляді квадратної рамки, аналогічної випадку кусково-однорідного півпростору (див. задачу 1), та крайової умови першого роду ($\tilde{E}_1(x, \omega) = \tilde{E}_2(x, \omega) = 0$, $\tilde{E}_3(x, \omega) = 0.000005 \cdot (x_3/c + 1)/2$) на компоненти ЕМП всередині тіла.

На рис. 7 подано залежність тангенціальної компоненти МП від кутової частоти (в діапазоні від 1 до 20 кГц) у центрі тіла; рис. 8 описує залежність вертикальної компоненти ЕП у точках тіла, рівномірно розподілених по осі Ox_3 на відрізку $[-1, 1]$.

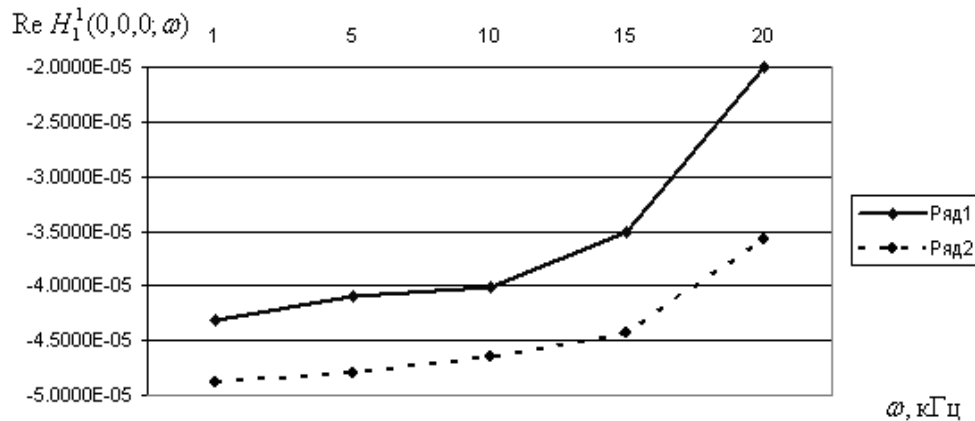


Рис. 7. Залежність дійсної компоненти МП від кутової частоти у центрі тіла

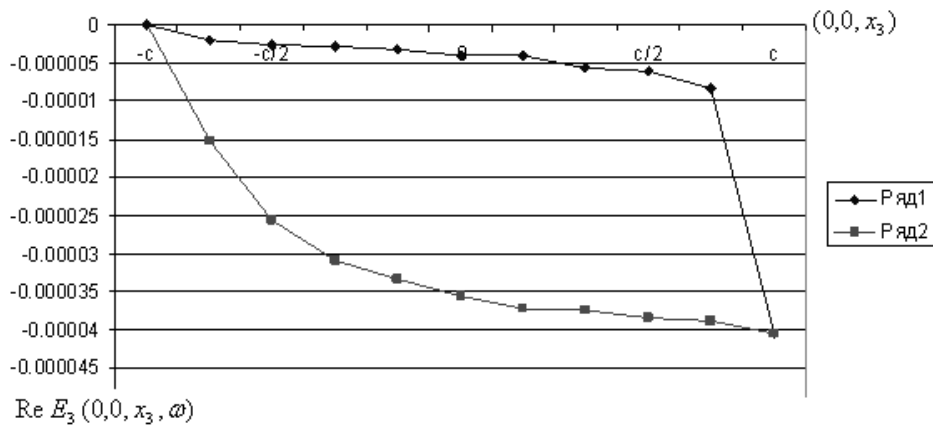


Рис. 8. Залежність дійсної компоненти ЕП від координат

Висновки

З погляду інтерпретаційного процесу пряма задача індукційних зондувань є дуже важливою і визначальною та підлягає постійній оптимізації. Варто зазначити, що інтерпретація даних, які стосуються горизонтально-неоднорідних середовищ, із застосуванням позірних параметрів одновимірних моделей (нехай навіть багат шарових) вже себе вичерпала. Сучасний інтерпретаційний процес вимагає застосування тривимірних математичних моделей. Гостроти ситуації додає й те, що тенденцією ЕМ досліджень є організація збирання й обробки все більших об'ємів даних, і, отже, всі елементи апарату інверсії, включаючи і елементи тривимірного характеру, повинні бути оперативні. Як відомо, обернену задачу розв'язують переважно на базі аналізу чутливості прямої задачі до змін геопараметрів і проводять його найчастіше шляхом багатократного використання процедури прямої задачі. Тому алгоритм прямої тривимірної задачі, який дозволяє в частотній області ефективно і з достатньою точністю обчислювати всі компоненти ЕМП й позірні величини, не вводячи потенціалів електричного чи магнітного типів, є в цій ситуації надзвичайно корисним.

З усього вищенаведеного випливає, що запропонована для розв'язування прямих тривимірних задач у провідному кусково-однорідному півпросторі методика є ефективною, а розвиток створеного на її базі програмного забезпечення може відбуватись із врахуванням таких факторів. Окрім розглянутого кусково-однорідного півпростору варто дослідити ще й шарувату модель з включеннями довільної форми, оскільки вона істотна для сучасних умов застосування індукційної

електророзвідки. Водночас для оперативнішої обробки великих масивів площинних даних під час розв'язування оберненої задачі геоелектрики слід одержати інтерпретаційні формули на базі амплітудних та фазових кривих позірнього опору.

Результати проведеного математичного моделювання свідчать про доцільність застосування індукційних електромагнітних методів геофізики для виявлення високопровідних включень типу рудних родовищ та високоомних включень типу нафтових і газових покладів. Загальними сприятливими умовами для виявлення і дослідження локальних неоднорідностей з провідністю, вищою й нижчою, ніж геосередовище, треба вважати співвимірну з горизонтальними розмірами (чи меншу) глибину їх залягання.

1. Жданов М.С. *Электроразведка*. – М.:Недра, 1986 – 316с.
2. Кауфман А.А. *Введение в теорию геофизических методов. Часть 2. Электромагнитные поля*. – М.:Недра, 2000. – 483с. – С. 190.
3. Newman G.A., and Alumbaugh, D.L. *Frequency-domain modeling of airborne electro-magnetic response of high-contrast prisms in layered earth: Geophys. Prosp.*, 1995, 43, 1021-1042.
4. Fomenko E.Y., and Mogi, T. *A new computation method for a staggered grid of 3D EM field conservative modeling: Earth, Planets and Space*, 2002, 54, 499-509.
5. Badea, E.A., Everett, M.E., Newman, G.A., and Biro, O. *Finite-element analysis of controlled-source electromagnetic induction using Coulomb-gauged potentials: Geophysics*, 2001, 66, 786-799.
6. Mitsuhashi, Y., and Uchida, T. *3D magnetotelluric modeling using the T- Ω finite-element method: Geophysics*, 2004, 69, 108-119.
7. Табаровский Л.А. *Применение метода интегральных уравнений в задачах геоэлектрики*. – Новосибирск: Наука, 1975. – 144 с.
8. Dmitriev, V.I., and Nesmeyanova, N.I. *Integral equation method in three-dimensional problems of low-frequency electrodynamics: Computat. Math. Modeling*, New-York: Plenum Pub. Corp., 1992, 3, 313-317.
9. Avdeev, D.B., Kuvshinov, A.V. Pankratov, O.V., and Newman, G.A. *Three-dimensional induction logging problems, Part I: An integral equation solution and model comparisons: Geophysics*, 67, 413-426.
10. Бенерджи П., Баттерфилд Р. *Метод граничных элементов в прикладных науках*. – М.:Мир, 1984. – 494с.
11. *Электроразведка: Справочник геофизика*. – М.:Недра, 1979. – 517с.