

**ДОСЛІДЖЕННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ РОЗВ’ЯЗКІВ ЗАДАЧІ
ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО РОЗСІЯННЯ
НА СУКУПНОСТІ ВКЛЮЧЕНЬ МАЛОГО РОЗМІРУ**

© Андрійчук М.І., 2013

M.I. Andriychuk

Pidstryhach Institute for Applied Problems in Mechanics and Mathematics, NASU
National University “Lviv Polytechnic”

**INVESTIGATION OF THE SOLUTION’S PROPERTIES
TO PROBLEM OF ELECTROMAGNETIC SCATTERING
ON A SET OF SMALL INCLUSIONS**

© Andriychuk M.I., 2013

The problem of scattering of the electromagnetic (EM) waves by many small impedance bodies (particles), embedded in a homogeneous medium is studied. Physical properties of the particles are described by their boundary impedance. The boundary integral equation is obtained for the effective EM field in the limiting medium for the case if radius of particles tends to zero and number of particles tends to infinity by suitable rate. The medium, created by the embedding of the small particles, has new physical properties.

Although scattering of EM waves by small bodies has a long history, the obtained results are new and useful in applications because EM wave scattering in nanostructures and small dust particles in the air are examples of the problem to which our approach can be applied. The developed previously Mie theory deals with scattering by a sphere, not necessarily small, and gives the solution to scattering problem in terms of the series in spherical harmonics. If the sphere is small, then the first term in the Mie series yields the main part of solution. The proposed approach is applicable only to small particles; it is development of ideas proposed earlier for the scattering of acoustic waves. However, the scattering of EM waves brought new technical difficulties. These difficulties come from the vector nature of boundary condition.

The particles in our approach can be of arbitrary shape. The solution of initial EM wave scattering problem is reduced to solving a linear algebraic system. This system is not obtained by a discretization of some boundary integral equation, and it has a clear physical meaning. Its limiting form yields an integro-differential equation for the limiting effective field in the medium where the small particles are embedded.

The new analytical-numerical method for solving the scattering problem of electromagnetic waves on the set of small particles has been developed. Investigation of properties of the solutions to problem depending on the parameters of medium, size of particles and their impedance has been carried out. The numerical results allowed to establish the correctness of assumption about property of divergence of the tangential component of electric field on the particle’s surface, which was used essentially for obtaining the asymptotic solution. The numerical results testify that the relative error of the obtained numerical solution, while compare it with the similar solution obtained by some complicate procedure, does not exceed of several percents.

Key words: electromagnetic scattering, small particles, asymptotic solution, numerical modeling.

Розглянуто задачу розсіяння електромагнітних хвиль малими імпедансними тілами (включеннями) у однорідному середовищі. Фізичні властивості включень описуються їх поверхневим імпедансом. Отримано граничне інтегральне рівняння для ефективного електромагнітного поля при $a \rightarrow 0$, де a – характерний розмір включень, а $M(a)$ – кількість включень. Проведено дослідження властивостей розв’язків задачі залежно від параметрів середовища, розміру включень та їх поверхневого імпедансу. Наведено результати числового моделювання.

Ключові слова: електромагнітне розсіяння, малі включення, асимптотичний розв’язок, числове моделювання.

Вступ

У роботі запропоновано аналітико-числовий метод розв’язування задачі розсіяння електромагнітних хвиль на сукупності включень малого розміру, які розміщені в деякій обмеженій області однорідного простору. Незважаючи на те, що дослідження задач дифракції і розсіяння електромагнітних хвиль започатковано ще у класичній роботі Релея [1] і нині цій проблемі присвячено велику кількість публікацій (див., наприклад, [2–3] і цитовану там літературу), актуальним залишається дослідження таких задач для випадку великої кількості розсіювачів малого розміру. Результати цих досліджень можна успішно використовувати для практичних застосувань в інженерних задачах формування середовищ із заданими електромагнітними властивостями [4–6].

Запропонований підхід має спільні особливості з викладеними у працях [7, 8], але ідея, методи і реалізація відрізняються значною мірою. Ці ідеї аналогічні запропонованим у [9, 10] для скалярного випадку. Однак розсіяння електромагнітних хвиль породжує нові технічні труднощі, які розв’язано у цій статті. Вони пояснюються векторним характером граничних умов. Запропонований підхід може бути використано для малих включень довільної форми, але для простоти ми обмежимося включеннями у формі кулі радіусом a [6].

Теорія електромагнітного розсіяння малими включеннями, які знаходяться в певній області однорідного простору, використовується для конструювання середовища як із заданим коефіцієнтом заломлення $n(x)$ [9], так із заданою магнітною проникністю $\mu(x)$. Обчислювальні алгоритми розв’язання відповідної задачі дифракції було розроблено у роботі [9].

Розсіяння електромагнітних хвиль малими включеннями

Нехай сукупність малих включень D_m , $1 \leq m \leq M$ розміщена в однорідному середовищі з постійними параметрами ϵ_0 , μ_0 , а $k^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0$, де ω – частота. Припустимо, що в заданій підобласті Δ області D кількість M малих включень задається формулою

$$M = \frac{1}{a^{2-\kappa}} \int_{\Delta} N(x) dx [1 + o(1)], a \rightarrow 0, \quad (1)$$

де $N(x) \geq 0$ – неперервна функція, яка спадає поза скінченною областю D , де розміщені включення, $\kappa \in (0, 1)$ – довільне задане число, а граничний імпеданс малих включень визначається так:

$$\zeta_m = \frac{h(x_m)}{a^\kappa}, x_m \in D_m, \quad (2)$$

де x_m – точка всередині m -го включення, $\operatorname{Re} h(x) \geq 0$, а $h(x)$ – неперервна функція, яка спадає поза D . Імпедансні граничні умови на поверхні S_m m -го включення D_m задаються так: $E^t = \zeta_m [H^t, N]$, де E^t (H^t) – тангенціальні компоненти E (H) на S_m , а N – зовнішня нормаль на S_m .

Розв’язок задачі розсіяння полягає у знаходженні векторів E і H , які задовольняють рівняння Максвелла

$$\nabla \times E = i\omega \mu_0 H, \quad \nabla \times H = -i\omega \epsilon_0 E \quad (3)$$

в $D := R^3 \setminus \bigcup_{m=1}^M D_m$, імпедансним граничним умовам

$$[N, [E, N]] = \zeta_m [H, N] \quad (4)$$

на $S_m, 1 \leq m \leq M$, і умовам випромінювання на безмежності

$$E = E_0 + v_E, \quad H = H_0 + v_H, \quad (5)$$

де ζ_m – імпеданс, E_0, H_0 – вектори падаючого поля, які задовольняють рівняння (3) у всьому просторі R^3 . Зазвичай, припускається, що падаюче поле E_0 – плоска хвиля, а v_E і v_H задовольняють граничні умови:

$$r \left(\frac{\partial v}{\partial r} - ikv \right) = o(1). \quad (6)$$

Систему (3) можна звести до вигляду

$$\nabla \times \nabla \times E = k^2 E \text{ in } D, \quad H = \frac{\nabla \times E}{i\omega\mu_0}. \quad (7)$$

Отже, початкова задача зведена до знаходження вектора $E(x)$, який шукатимемо у формі

$$E = E_0 + \sum_{m=1}^M \nabla \times \int_{S_m} g(x, t) \sigma_m(t) dt, \quad (8)$$

де $t \in S_m$, а dt – елемент площі S_m , $\sigma_m(t) \in T_m$, тут T_m – множина тангенціальних до S_m неперервних векторів, таких, що $\text{Div} E_t = 0$, де Div – поверхнева дивіргенція, а E_t – тангенціальна компонента E .

Визначимо *ефективне поле* $E_e(x) = E_e^m(x) = E_e^{(m)}(x, a)$, яке діє на m -му включенні D_m :

$$E_e(x) = E(x) - \nabla \times \int_{S_m} g(x, t) \sigma_m(t) dt := E_e^{(m)}(x). \quad (9)$$

Нехай $x_m \in D_m$ – точка в D_m , і $d = d(a)$ – відстань між двома сусідніми малими включеннями. У роботі [6] показано, що $E_e(x, a)$ прямує до границі $E_e(x)$ при $a \rightarrow 0$, а $E_e(x)$ – неперервна двічі диференційована функція.

Запишемо (9) так:

$$E(x) = E_0(x) + \sum_{m=1}^M [\nabla_x g(x, x_m), Q_m] + \sum_{m=1}^M \nabla \times \int_{S_m} (g(x, t) - g(x, x_m)) \sigma_m(t) dt, \quad (10)$$

де $Q_m := \int_{S_m} \sigma_m(t) dt$.

Використавши припущення $\text{Div} E_t = 0$, формулу (10) запишемо так:

$$E_e(x) = E_0(x) + \sum_{m=1}^M [\nabla_x g(x, x_m), Q_m] \quad (11)$$

з похибкою, що прямує до нуля при $a \rightarrow 0$, і коли $|x - x_j| \gg a$, то член з $m = j$ повинен бути опущений згідно з означенням ефективного поля. При $a \rightarrow 0$ сума в (11) збігається до відповідного інтегралу і

$$E(x) = E_0(x) + \nabla \times \int_D g(x, y) N(y) Q(y) dy, \quad (12)$$

де $Q(y)$ – функція, що визначається однозначно формулою $Q_m = Q(x_m) a^{2-\kappa}$. Ця функція може бути подана в термінах E

$$Q(y) = -\frac{8\pi i}{3\omega\mu_0} h(y) (\nabla \times E)(y). \quad (13)$$

З рівнянь (12) і (13) отримаємо

$$E(x) = E_0(x) - \frac{8\pi i}{3\omega\mu_0} \nabla \times \int_D g(x, y) h(y) N(y) \nabla \times E(y) dy. \quad (14)$$

Вектори $P := \nabla \times E(y)$ будуть використовуватися для визначення $E(y)$ у процесі числових розрахунків.

Числове розв'язування задачі розсіяння у випадку коли розсіювачі (включення) є малими порівняно з довжиною хвилі полягає у отриманні та розв'язуванні відповідної системи лінійних рівнянь для векторів

$$P_m = (\nabla \times E)(x_m), \quad 1 \leq m \leq M. \quad (15)$$

Якщо P_m знайдені, то за формулою (13) визначаємо

$$Q_m = -\frac{8\pi i}{3\omega\mu_0} a^{2-\kappa} h(x_m) P_m, \quad (16)$$

а за формулою (11) поле $E(x)$.

Алгебраїчна система для векторів P_m одержується так: з (14) випливає, що

$$P_j = P_{0j} - \frac{8\pi i}{3\omega\mu_0} a^{2-\kappa} \sum_{m \neq j, m=1}^M \{k^2 g(x, x_m) h(x_m) P_m + h(x_m) (P_m, \nabla) \nabla g(x, x_m)\} |_{x=x_j}, \quad (17)$$

де $1 \leq j \leq M$, і $P_{0j} := (\nabla \times E_0)(x_j)$, $P_j = (\nabla \times E)(x_j)$, $1 \leq j \leq M$. Остаточну рівняння (17) є алгебраїчною системою для знаходження векторів P_m .

Числові результати

Під час отримання асимптотичного розв'язку (11) задачі електромагнітного розсіяння використовувалося припущення $\text{Div}E_t = 0$ на поверхні включень S_m . Це припущення не є обґрунтованим теоретично, тому числове підтвердження цієї умови є важливим з погляду коректності отриманих результатів. Нижче наведено низку числових результатів, які демонструють виконання цієї умови з певною точністю, яка є достатньою для отримання практичних результатів.

На першому етапі проводилося дослідження залежності величини $\text{Div}E$ від значення радіуса a включень при фіксованій відстані d між ними. Обчислення проведені для $M = 10^3$, де M – загальна кількість включень у D , $d = 0.5$, $k = 0.1$. Лінійні розміри подано у сантиметрах (cm), а розмірність хвильового числа k – у cm^{-1} . На рис. 1 наведено максимальні значення $\text{Div}E_t$ на поверхні першого, центрального і останнього включень. Нумерація включень здійснюється з лівої нижньої до правої верхньої частини D . Із рисунка видно, що максимальне значення $\text{Div}E_t$ не перевищує 6.4×10^{-3} , 3.7×10^{-3} і 0.45×10^{-3} для першого, центрального і останнього включень відповідно. На рис. 2 наведено мінімальні значення компонент E_x і E_y на поверхні включень. Для цього випадку значення E_x і E_y практично збігаються, а значення компоненти E_z має такий самий порядок, як і E_x . Порівнюючи результати, наведені на обох рисунках, можна зауважити, що значення $\text{Div}E_t$ не перевищує 3% порівняно з відповідними значеннями E компонент. При цьому відношення $\max(\text{Div}E_t) / \min(E_{x,y,z})$ становить 1.4×10^{-2} , 0.46×10^{-2} і 2.5×10^{-2} для першого, центрального і останнього включень.

Числові результати, наведені на рис. 3, демонструють, що значення $\text{Div}E_t$ залежить від відстані d між включеннями меншою мірою і це значення стабілізується при зростанні d . Результати наведено для центрального включення, як і в попередньому прикладі, $M = 10^3$, $k = 0.1$. Так значення $\text{Div}E_t$ дорівнює 2.8×10^{-4} для $d = 0.5$ і воно стабілізується на рівні 3.4×10^{-4} для $d > 1.2$ (при $a = 0.05$). Аналогічні властивості $\text{Div}E_t$ спостерігаються при $a = 0.03$ і $a = 0.01$. Максимальне значення відношення $\max(\text{Div}E_t) / \min(E_{x,y,z})$ для розглянутого діапазону a і d дорівнює 1.4%. Значення $\text{Div}E_t$ незначною мірою зростає при $d/a < 7$.

Залежність величини $\text{Div}E_t$ від кількості M включень при різних a при фіксованому d наведено на рис. 4, тут значення $k=0.1$, $d=0.5$. Максимальне значення $\text{Div}E_t$ отримано при $M=125$ і воно дорівнює 2.0×10^{-3} , 1.15×10^{-3} і 0.33×10^{-3} для $a=0.05$, $a=0.03$ і $a=0.01$ відповідно. Це значення досягає локального мінімуму при $M=9^3$, воно зростає до певного значення при збільшенні M і стабілізується для $M > 15 \times 10^3$. Значення $\text{Div}E_t$ при даному M дорівнюють 1.62×10^{-3} , 0.73×10^{-3} і 0.09×10^{-3} для $a=0.05$, $a=0.03$ і $a=0.01$ відповідно. Максимальне значення відношення $\max(\text{Div}E_t)/\min(E_{x,y,z})$ для даних обчислень не перевищує 1.85%.

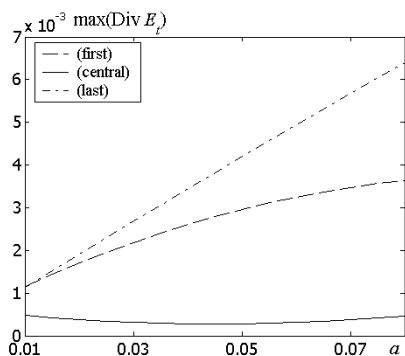


Рис. 1. Залежність максимального значення $\text{Div}E_t$ від радіуса a включення

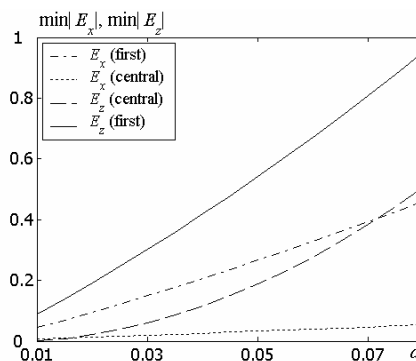


Рис. 2. Мінімальні значення компонент E_x і E_y на різних включеннях

З практичного погляду важливим також є питання про точність наближеної формули (11) порівняно з розв'язком, отриманим за допомогою методики [11]. З цією метою проведено низку обчислювальних експериментів, які стосуються порівняння отриманої формули (11) із формулою (40) із [11]. Відносна похибка розв'язку (11) при цьому визначається як $\|E_{(40)} - E_{(11)}\| / \|E_{(40)}\|$, де $\|\cdot\|$ – чебишевська норма, $E = (E_x, E_y, E_z)$, а $E_{(40)}$ і $E_{(11)}$ – розв'язки, отримані формулою (40) із [11] і формулою (11). На рис. 5 наведено відносну похибку для компонент E_x і E_y залежно від радіуса a включень для декількох значень d , число включень $M=10^3$. Видно, що відносна похибка зростає майже лінійно зі збільшенням a , ця похибка зменшується також зі зменшенням d . Максимальне значення похибки досягається для компоненти E_y при $a=0.5$ і воно дорівнює 1.2% для $d=2.0$ і 0.17% для $d=6.0$. Мінімальне значення відносної похибки досягається для компоненти E_x при $a=0.05$ і воно дорівнює 0.11% для $d=2.0$ і 0.05% для $d=6.0$. Числові результати показують, що при $d=6.0$ похибка зростає повільніше для значень $a \geq 0.7$, і вона практично стабілізується для $a \geq 1.0$.

Наступні результати демонструють залежність відносної похибки від відстані d між включеннями при заданому значенні радіуса a . На рис. 6 зображено відносну похибку для компоненти E_x для декількох значень a . Як і у попередньому прикладі, загальна кількість включень $M=10^3$. Максимальне значення відносної похибки досягається при $d=0.25$ для всіх значень a . Ця похибка дорівнює 1.5% і 0.1% при $a=0.01$ і $a=0.001$ відповідно. Мінімальне значення похибки досягнуто при $d=0.45$ і воно не перевищує 0.2%.

Висновки

Проведено дослідження властивостей асимптотичних розв'язків задачі розсіяння електромагнітних хвиль на сукупності включень малого розміру. Числові розрахунки дозволили встановити справедливість припущення, яке використовувалось істотно для отримання асимптотичного розв'язку (11) і не могло бути обґрунтоване аналітично. Одержані числові результати свідчать,

що відносна похибка асимптотичного розв'язку не перевищує 2.5% порівняно з розв'язком, отриманим за складнішою процедурою. Отримане числове подання розв'язку може бути використане у процесі розв'язування задачі формування середовища із заданою магнітною проникністю.

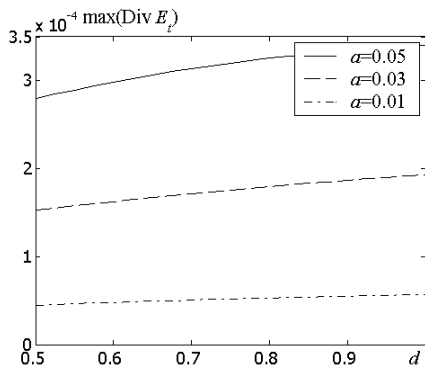


Рис. 3. Залежність максимального значення $\text{Div}E_t$ від відстані d між включеннями

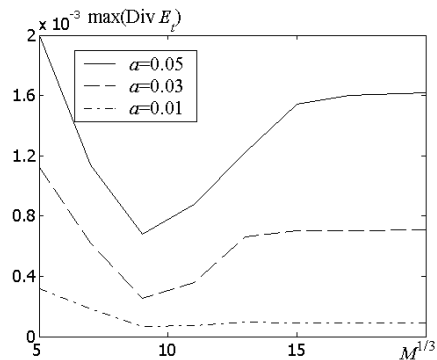


Рис. 4. Залежність максимального значення $\text{Div}E_t$ від кількості M включень

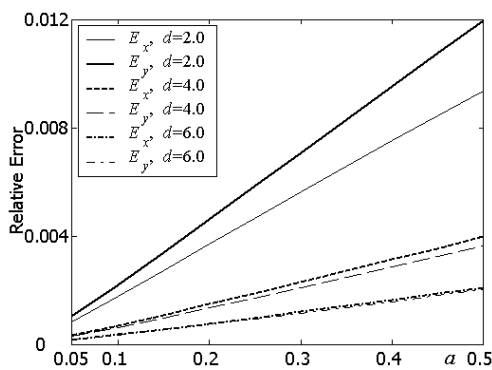


Рис. 5. Залежність відносної похибки компонент E_x і E_y від радіуса a включень

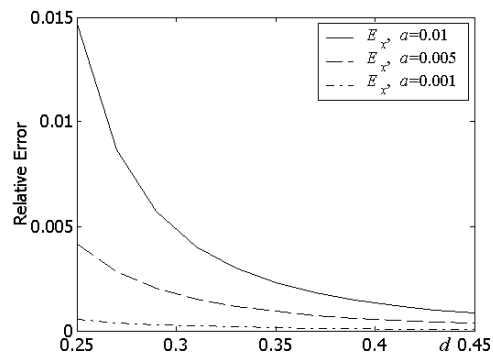


Рис. 6. Залежність відносної похибки компоненти E_x від відстані d між включеннями

1. Lord Rayleigh (John Strutt). *On the scattering of light by small particles* // *Philosophical Magazine*, series 4, 1871, 41, pp. 447-454. 2. C. Muller. *Foundations of the mathematical theory of electromagnetic waves*, Springer-Verlag, Berlin, 1969. 3. A. G. Ramm. *Wave scattering by small bodies of arbitrary shapes*, World Sci. Publishers, Singapore, 2005. 4. A. G. Ramm. *Distribution of particles which produces a desired radiation pattern* // *Physica B*, 2007, 394, No 2, – pp. 253–255. 5. A. G. Ramm. *Electromagnetic wave scattering by many small bodies and creating materials with a desired refraction coefficient* // *Progress in Electromagnetic Research M (PIER M)*, 2010, 13, – pp. 203–215. 6. A. G. Ramm. *Electromagnetic wave scattering by many small bodies and creating materials with a desired permeability* // *Progress in Electromagnetic Research M (PIER M)*, 2010, 14, – pp. 193–206. 7. A. G. Ramm. *Wave scattering by small particles embedded in a medium* // *Phys. Lett. A*, 2008, 372/17, – pp. 3046–3070. 8. A. G. Ramm, *Electromagnetic wave scattering by small bodies* // *Phys. Lett. A*, 2008, 372/23, pp. 4298–4306. 9. M. I. Andriychuk and A. G. Ramm. *Scattering by many small particles and creating materials with a desired refraction coefficient* // *Int. J. Computing Science and Mathematics*. Vol. 3, № 1/2, pp. 102–121, January 2010. 10. M. I. Andriychuk, A. G. Ramm. *Numerical Solution of Many-Body Wave Scattering Problem for Small Particles and Creating Materials with Desired Refraction Coefficient* // *In Book: Numerical Simulations of Physical and Engineering Processes*, Ed. by Jan Awrejcewicz, InTech Publishing House, Rieka, Croatia, 2011, – pp. 3–28. 11. A. G. Ramm. *Electromagnetic Wave Scattering by Small Impedance Particles of an Arbitrary Shape* // *Journ. of Appl. Math. and Computing (JAMC)*, 2013.