УДК 519.711

Б.Є. Рицар
Національний університет “Львівська політехніка”

МІНІМІЗАЦІЯ СИСТЕМИ ЛОГІКОВИХ ФУНКЦІЙ МЕТОДОМ ПАРАЛЕЛЬНОГО РОЗЧЕПЛЕННЯ КОН’ЮНКТЕРМІВ

B.Ye. Rytsar
Lviv Polytechnic National University

MINIMIZATION OF LOGIC FUNCTIONS SYSTEM BY KONJUNCTERMS PARALLEL SPLITTING METHOD

A new heuristic minimization method of logic functions of *n* variables has been suggested. It is based on the parallel splitting of conjuncterms and differs from the known methods for it is simpler in implementation due to less computational complexity.

One disadvantage of the classical method of minimization by Quine-McCluskey method and its modifications is the formation at the stage of finding prime conjuncterms some set equal conjuncterms of different ranks, whose number increases rapidly with *n* increasing. Such negative phenomenon as tautology of conjuncterms mainly occurs in the methods that employ adjacency and absorption laws for the formation conjuncterms lower ranks with the pairs of adjacent conjuncterms. Accordingly, to obtain the reduced SOP of a given function, it is necessary to identify and reduce excessive conjuncterms and that requires certain procedural means and time-consuming. Heuristic minimization method, based on the parallel splitting conjuncterms of a given function is devoid of tautology problem. However, this method despite its other advantages, including the formalization of simple operations and procedures that enable them to automate your computer, requires a certain time for the procedure of stepwise (sequential) splitting. In addition, this paper considers only the case of minimization of one complete (fully defined) function, which limits the scope of its practical application.

This work is devoted to the development of the mentioned minimization method of logic functions and is based on a new approach – parallel splitting of conjuncterms with just one matrix splitting of conjuncterms and performance in this matrix covering procedure as one function and of full and partial (incomplete specified) functions system. The theorem on the formation in a matrix of parallel splitting with not more than 2^{n-1} of conjuncterms 1-rank, no more than 2^{n-2} of conjuncterms 2-rank, ..., not more than two of conjuncterms $(n-1)$-rank has been proved. The time for obtaining the searched result is reduced and the way of procedure implementation is simplified due to the suggested approach. Advantages of the method are shown by the examples taken from publications of well-known authors which illustrate their methods of minimization of full and partial (incomplete specified) logic functions system.

Key words: logic function, minimization, system conjuncterm, matrix of splitting, covering of function

Запропоновано новий евристичний метод мінімізації логікових функцій від *n* змінних на основі паралельного розчеплення кон’юнктермів, що відрізняється від відомих методів простішою реалізацією за рахунок меншої обчислювальної складності. Переваги методу проілюстровано на прикладах мінімізації системи повних і неповних (недовизначених) функцій.

Ключові слова: логікова функція, мінімізація, системний кон’юнктерм, матриця розчеплення, покриття функції.

Вступ

Мінімізація логікових функцій є важливою складовою проєктування цифрових пристроїв (ЦП). Як відомо [1–4], будь-яку логікову функцію від довільної кількості змінних можна виразити різними еквівалентними нормальними формами. Знайти серед них вираз, зокрема, у диз'юнктивній нормальній формі (ДНФ), який би складався з мінімальної кількості кон'юнктермів (кон'юнктивних термів) мінімальних рангів, а отже, забезпечував би найбільш компактне подання заданої функції, є завданням мінімізації. Відповідно до критеріїв мінімізації заданої функції переважно відносять два:

- кількість кон'юнктермів змінімізованої функції, що визначає кількість блоків (чи логікових елементів), з яких складатиметься проєктований ЦП, за умови, що не існує іншого виразу функції з такою самою кількістю кон'юнктермів, але менших рангів;
- кількість літералів, з яких складаються всі кон'юнктерми змінімізованої функції, що визначає кількість зв'язків між окремими блоками (чи логіковими елементами) проєктованого ЦП.

До зазначених вище параметрів долучають також кількість інверсних змінних, які визначають кількість інверторів чи інвертованих входів блоків (чи логікових елементів) проєктованого ЦП.

Одним з недоліків класичного методу мінімізації Квайна-МакКласкі та його модифікацій [1–3] є те, що в процесі пошуку простих кон'юнктермів утворюється тавтологія кон'юнктермів різних рангів, кількість яких зростає зі збільшенням *n*. Це негативне явище переважно виникає у точних методах, які для пошуку пар сусідніх (тобто склеюваних) кон'юнктермів застосовують операції склеювання і поглинання. Відповідно, щоб одержати скорочену ДНФ, зайві кон'юнктерми доводиться виявляти і усувати, що вимагає певних процедурних засобів та затрати часу [5].

Євристичний метод мінімізації, що ґрунтується на послідовному розчепленні кон'юнктермів заданої функції [6,7], позбавлений проблеми тавтології. Проте цей метод, незважаючи на його інші переваги – покрокове покриття, формалізацію процедур, що уможливлюють автоматизацію всіх операцій і процедур на комп'ютері, – вимагає часові затрати на виконання процедури розчеплення, а крім того, розглянутий лише для випадку мінімізації одної повної (повністю визначеної) функції, що обмежує сфери його застосування.

Ця робота присвячена розвитку методу мінімізації [6] на основі нового підходу – паралельного розчеплення кон'юнктермів, як одної функції, так і системи повних і неповних (недовизначених) функцій, завдяки чому скорочується шлях отримання шуканого результату.

Теоретичні основи методу

У загальному випадку систему s логікових функцій від n змінних $F(X)=\{f_1(X), f_2(X),..., f_s(X)\}$, $X=\{x_1, x_2,..., x_n\}$, у теоретико-множинному форматі (ТМФ) можна задати деякою системою $\{Y_I^1;Y_I^*\}$, $I=1,2,...,s$, вигляду [7]

$$\begin{cases} Y_1^1=\{m_{11},m_{12},...,m_{1k_1}\}^1; Y_1^*=\{m_{1(k_1+1)},m_{1(k_1+2)},...,m_{1(2^n-k_1+v_1)}\}^* \\ Y_2^1=\{m_{21},m_{22},...,m_{2k_2}\}^1; Y_2^*=\{m_{2(k_2+1)},m_{2(k_2+2)},...,m_{2(2^n-k_2+v_2)}\}^* \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ Y_s^1=\{m_{s1},m_{s2},...,m_{sk_s}\}^1; Y_s^*=\{m_{s(k_s+1)},m_{s(k_s+2)},...,m_{s(2^n-k_s+v_s)}\}^* \end{cases}, \quad v_i<2^n-k_i, \qquad (1)$$

де m_{ij}, $i=1,2,...,s$, $j=1,2,...,v_i$, – j-й числовий (двійковий чи десятковий) мінтерм i-ї системи $\{Y_i^1;Y_i^*\}$, причому $Y_i^1 \cap Y_i^* = \varnothing$; $\{Y_i^*\}$ – деяка множина числових мінтермів, кількість яких визначається відображенням множини значень наборів змінних $\{0,1\}^n$ у множину значень кожної функції f_i, а саме: якщо $F(X)$ – це система повних (повністю визначених на 2^n наборах) s функцій, тобто $f_i:\{0,1\}^n \to \{0,1\}$, то $\{Y_i^*\}=\varnothing$ і тоді її досить задавати системою досконалих ТМФ $\{Y_i^1\}$, а якщо $F(X)$ – це система неповних (не повністю визначених на всіх 2^n наборах) s функцій, тобто

$f_i:\{0,1\}^n \to \{0,1,\sim\}$, де символ ~ означає невизначене значення f_i, то така система може складатися або з s недовизначених функцій (потужність $|Y_i^{\sim}|\le|Y_i^0|$) і тоді $\{Y_i^*\}\equiv\{Y_i^{\sim}\}$, тобто її доцільно задавати системою $\{Y_i^1;Y_i^{\sim}\}$, або з s слабковизначених функцій (потужність $|Y_i^{\sim}|>|Y_i^0|$) і тоді $Y_i^*\equiv Y_i^0$, тобто її доцільно задавати системою $\{Y_i^1;Y_i^0\}$.

У цій статті розглядається мінімізація систем повних та недовизначених функцій.

Особливість пропонованої процедури паралельного розчеплення кон'юнктермів (оператор $\overset{S}{\Rightarrow}$) покажемо спочатку для випадку однієї функції $f(x_1,x_2,...,x_n)$, що задана досконалою ТМФ $Y^1=\{m_1,m_2,...,m_k\}^1$.

Суть процедури *паралельного розчеплення кон'юнктермів* полягає у накладанні на двійкові мінтерми $m_1,m_2,...,m_k$ функції f масок літералів матриці-стовпця $\Lambda_n^1=\begin{bmatrix} L_n^1 \\ L_n^2 \\ ... \\ L_n^{n-1} \\ L_n^n \end{bmatrix}$ або $\Lambda_1^n=\begin{bmatrix} L_n^n \\ L_n^{n-1} \\ ... \\ L_n^2 \\ L_n^1 \end{bmatrix}$, де L_n^1, L_n^2, ..., L_n^{n-1}, L_n^n – множини масок літералів 1-, 2-, ..., $(n-1)$-, n - рангу, відповідно. Унаслідок цього утворюється *матриця кон'юнктермів* $\mathrm{M}_n^1=\begin{bmatrix} M_n^1 \\ M_n^2 \\ ... \\ M_n^{n-1} \\ M_n^n \end{bmatrix}$ або $\mathrm{M}_1^n=\begin{bmatrix} M_n^n \\ M_n^{n-1} \\ ... \\ M_n^2 \\ M_n^1 \end{bmatrix}$, де M_n^1, M_n^2, ..., M_n^{n-1}, M_n^n – підматриці розчеплених кон'юнктермів 1-, 2-, ..., $(n-1)$-, n-рангів, причому, M_n^n – підматриця-рядок k заданих мінтермів досконалої ТМФ Y^1. Зазначимо, що Λ_n^1 і M_n^1 та Λ_1^n і M_1^n рівноцінні щодо процедури розчеплення, тому подальші визначення розглядатимемо для Λ_n^1 і M_n^1. Оскільки розмірність матриці-стовпця Λ_n^1 залежить від n і r $(r=1,2,...,n)$ як $\sum_{i=1}^{n} C_n^i \times 1$, то, відповідно, M_n^1 матиме розмірність $\sum_{i=1}^{n} C_n^i \times k$ і складатиметься з n матриць $M_n^1 \times k$, $M_n^2 \times k$, ..., $M_n^{n-1} \times k$, $M_n^n \times k$. Наприклад, розмірність матриці-стовпця Λ_4^1 для $n=4$ дорівнює 15×1, а її (розгорнутий за рангами) вигляд такий: $\begin{vmatrix} l--- \\ -l-- \\ --l- \\ ---l \end{vmatrix} \begin{vmatrix} ll-- \\ l-l- \\ l--l \\ -ll- \\ -l-l \\ --ll \end{vmatrix} \begin{vmatrix} lll- \\ ll-l \\ l-ll \\ -lll \end{vmatrix} \lfloor llll \rfloor$, де пунктирними лініями позначено місця стику між сусідніми матрицями L_4^1, L_4^2, L_4^3 і L_4^4. Відповідно утворена матриця M_4^1 складатиметься з чотирьох матриць розмірностей $M_4^1 \times k$, $M_4^2 \times k$, $M_4^3 \times k$ і $M_4^4 \times k$.

Теорема. Матриця кон'юнктермів M_n^1, утворена процедурою розчеплення k мінтермів функції $f(x_1,x_2,...,x_n)$, що задана досконалою ТМФ Y^1, може мати: на будь-якому рядку матриці M_n^1 не більше 2^{n-1} розчеплених кон'юнктермів-копій 1-рангу, на будь-якому рядку матриці M_n^2 не більше 2^{n-2} розчеплених кон'юнктермів-копій 2 - рангу, ..., на будь-якому рядку матриці M_n^{n-1} – не більше двох розчеплених кон'юнктермів-копій $(n-1)$-рангу.

<u>Доведення</u> цієї теореми ґрунтується на теоремі [6, 7], згідно з якою у n-вимірному просторі повної функції f тільки пара сусідніх (за Квайном) кон'юнктермів r-рангу може утворити кон'юнктерм $(r-1)$-рангу. Відповідно, якщо маски літералів L_n^{n-1} накладати на два сусідні мінтерми, то на одному з рядків матриці M_n^{n-1} утвориться два тотожних розчеплених кон'юнктерми-копії $(n-1)$-рангу, якщо маски літералів L_n^{n-2} накладати на чотири сусідні мінтерми, то на одному з рядків матриці M_n^{n-2} утвориться чотири тотожних розчеплених кон'юнктерми-копії $(n-2)$-рангу, ..., а якщо маски літералів L_n^1 накладати на 2^{n-1} сусідні мінтерми, то на одному з рядків матриці M_n^1 утвориться 2^{n-1} тотожних розчеплених кон'юнктерми-копії 1-рангу.

Кількість матриць $M_n^1, M_n^2, ..., M_n^{n-1}$, у яких можна знайти відповідну кількість тотожних розчеплених кон'юнктермів-копій, залежить від числа k заданих мінтермів. Нема сенсу розглядати матрицю M_n^r, якщо $k < 2^{n-r}$, бо вона, згідно з теоремою, не може мати 2^{n-k} тотожних розчеплених кон'юнктермів-копій r-рангу. Щоб знайти такі елементи, матриця M_n^r повинна мати ранг $r \geq n -]log_2 k[$, де $]log_2 k[$ – найближче менше ціле число. Наприклад, якщо $k=7$ і $n=4$, то в матрицю-стовпець Λ_4^1 не потрібно включати множину літералів L_4^1, які утворюють кон'юнктерми 1-рангу, бо $7 < 2^3$. У цьому випадку на задані мінтерми накладаються маски множин L_4^2, L_4^3 і L_4^4, які формуватимуть три матриці відповідних розмірностей $M_4^2 \times 7$, $M_4^3 \times 7$ і $M_4^4 \times 7$.

Процедура мінімального покриття матриці M_n^1 виконується аналогічно до методу послідовного розчеплення [6,7] з тією лише різницею, що в цьому випадку відбір елементів покриття виконується з пріоритетом для матриць меншого рангу, починаючи з елементів матриць M_n^1, M_n^2, ..., M_n^{n-1}, M_n^n.

Метод паралельного розчеплення кон'юнктермів проілюструємо на прикладі мінімізації повної функції $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ [6], що задана досконалою ТМФ $Y^1 = \{2,3,4,6,7,8,9,10,11,15\}^1$. До двійкових мінтермів заданої функції f застосуємо матрицю-стовпець Λ_4^1 та побудуємо відповідну матрицю M_4^1, у якій, відповідно до теореми, виділимо підкресленням утворені кон'юнктерми-копії:

$$Y^1 = \{0010,0011,0100,0110,0111,1000,1001,1010,1011,1111\}^1 \overset{s}{\Rightarrow}$$

$$\overset{s}{\Rightarrow}\begin{bmatrix} l--- \\ -l-- \\ --l- \\ ---l \\ \hline ll-- \\ l-l- \\ l--l \\ -ll- \\ -l-l \\ --ll \\ \hline lll- \\ ll-l \\ l-ll \\ -lll \\ \hline llll \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccccccccc}
0--- & 0--- & 0--- & 0--- & 0--- & 1--- & 1--- & 1--- & 1--- & 1--- \\
-0-- & -0-- & -1-- & -1-- & -1-- & -0-- & -0-- & -0-- & -0-- & -1-- \\
--1- & --1- & --0- & --1- & --1- & --0- & --0- & --1- & --1- & --1- \\
---0 & ---1 & ---0 & ---0 & ---1 & ---0 & ---1 & ---0 & ---1 & ---1 \\
\hline
00-- & 00-- & 01-- & 01-- & 01-- & \underline{10--} & \underline{10--} & \underline{10--} & \underline{10--} & 11-- \\
\underline{0-1-} & \underline{0-1-} & 0-0- & \underline{0-1-} & \underline{0-1-} & 1-0- & 1-0- & 1-1- & 1-1- & 1-1- \\
0--0 & 0--1 & 0--0 & 0--0 & 0--1 & 1--0 & 1--1 & 1--0 & 1--1 & 1--1 \\
\underline{-01-} & \underline{-01-} & -10- & -11- & -11- & -00- & -00- & \underline{-01-} & \underline{-01-} & -11- \\
-0-0 & -0-1 & -1-0 & -1-0 & -1-1 & -0-0 & -0-1 & -0-0 & -0-1 & -1-1 \\
--10 & \underline{--11} & --00 & --10 & \underline{--11} & --00 & --01 & --10 & \underline{--11} & \underline{--11} \\
\hline
\underline{001-} & \underline{001-} & 010- & \underline{011-} & \underline{011-} & \underline{100-} & \underline{100-} & \underline{101-} & \underline{101-} & 111- \\
00-0 & 00-1 & \underline{01-0} & \underline{01-0} & 01-1 & \underline{10-0} & \underline{10-1} & \underline{10-0} & \underline{10-1} & 11-1 \\
\underline{0-10} & \underline{0-11} & 0-00 & \underline{0-10} & \underline{0-11} & 1-00 & 1-01 & 1-10 & \underline{1-11} & \underline{1-11} \\
\underline{-010} & \underline{-011} & -100 & -110 & -111 & -000 & -001 & \underline{-010} & \underline{-011} & -111 \\
\hline
0010 & 0011 & 0100 & 0110 & 0111 & 1000 & 1001 & 1010 & 1011 & 1111
\end{array}\right].$$

Щоб одержати мінімальне покриття (оператор $\overset{C}{\Rightarrow}$) матриці M_4^1, спростимо її, усунувши всі не підкреслені елементи. Спрощена матриця M_4^1 матиме такий вигляд:

$$\overset{C}{\Rightarrow}\left[\begin{array}{cccccccccc}
 & & & & & \underline{\mathbf{10--}} & \underline{\mathbf{10--}} & \underline{\mathbf{10--}} & \underline{\mathbf{10--}} & \\
\underline{\mathbf{0-1-}} & \underline{\mathbf{0-1-}} & & \underline{\mathbf{0-1-}} & \underline{\mathbf{0-1-}} & & & & & \\
\underline{-01-} & \underline{-01-} & & & & & & \underline{-01-} & \underline{-01-} & \\
 & \underline{\underline{\mathbf{--11}}} & & & \underline{\underline{\mathbf{--11}}} & & & & \underline{\underline{\mathbf{--11}}} & \underline{\underline{\mathbf{--11}}} \\
\hline
\underline{001-} & \underline{001-} & & \underline{011--} & \underline{011-} & \underline{100-} & \underline{100-} & \underline{101-} & \underline{101-} & \\
 & & \underline{\mathbf{01-0}} & \underline{\mathbf{01-0}} & & \underline{10-0} & \underline{10-1} & \underline{10-0} & \underline{10-1} & \\
\underline{0-10} & \underline{0-11} & & \underline{0-10} & \underline{0-11} & & & & \underline{1-11} & \underline{1-11} \\
\underline{-010} & \underline{-011} & & & & & & \underline{-010} & \underline{-011} &
\end{array}\right].$$

У спрощеній M_4^1, враховуючи умову пріоритетності кон'юнктермів меншого рангу (у нашому випадку це елементи 2-рангу підматриці M_4^2), мінімальне покриття, як бачимо, забезпечуватимуть виділені грубим шрифтом елементи, що належать маскам $\{ll--\}$, $\{l-l-\}$, $\{--ll\}$ і $\{ll-l\}$, та елемент 3-рангу підматриці M_4^3, які складатимуть шукану мінімальну ТМФ Y^1 заданої функції *f*.

Отже, задана функція *f* має мінімальну ТМФ

$$Y^1 = \left\{(10--),(0-1-),(--11),(01-0)\right\}^1 \equiv \left\{(8,9,10,11),(2,3,6,7),(3,7,11,15),(4,6)\right\}^1.$$

Результат одержано такий як у [6], але завдяки відсутності поетапного виконання процедур розчеплення і покриття, обчислювальна та часова складність у цьому випадку порівняно менша.

Мінімізація системи повних функцій. Як відомо [1–4], є два підходи до мінімізації системи логікових функцій від *n* змінних $F(X)$: *незалежна мінімізація системи,* коли кожна її функція мінімізується окремо, та *сумісна мінімізація системи,* коли для пошуку мінімальної форми системи використовується якнайбільше однакових кон'юнктермів (очевидно, якщо її функції мають такі елементи). Незалежна мінімізація системи $F(X)$ переважно є надлишковою щодо її реалізації, оскільки усунення надлишкових кон'юнктермів в окремій функції не усуває надлишковість у самій системі. У разі сумісної мінімізації системи $F(X)$ надлишковість усувається раціональним використанням однакових кон'юнктермів, що підтверджує практичну доцільність такого підходу. Тому, незважаючи на складнішу реалізацію, порівняно з незалежною мінімізацією, сумісна мінімізація системи функцій є основною оптимізаційною процедурою логікового синтезу ЦП, які описуються системою логікових функцій $F(X)$.

Для розгляду алгоритму сумісної мінімізації системи повних функцій методом паралельного розчеплення кон'юнктермів розглянемо необхідні поняття й означення.

<u>*Означення 1.*</u> *Системний мінтерм* $(m)_{1,2,\ldots,s'}$, $s' \in \{1,2,\ldots,s\}$, системи повних функцій $F(X)=\{f_1, f_2,\ldots, f_s\}, X=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$, що задана системою досконалих ТМФ $\{Y_i^1\}$, $i=1,2,\ldots,s$, – це мінтерм з індексом чи індексами, які показують до якої функції чи функцій він належить.

З наперед визначених *k*' двійкових системних мінтермів заданої системи $F(X)$ формується множина Y_I^1, $I=1,2,\ldots,s$. Над елементами множини Y_I^1, так само як для одної функції, виконується процедура паралельного розчеплення при накладанні масок матриці-стовпця Λ_n^1 (Λ_1^n), унаслідок чого сформується матриця кон'юнктермів M_n^1 (M_1^n) розмірності $\sum_{i=1}^{n} C_n^i \times k'$.

На відміну від мінімізації однієї функції, мінімальне покриття матриці M_n^1 (M_1^n) у випадку системи відрізняється тим, що тут вирішальним у виборі елемента покриття є не лише значення елемента матриці, але також його індекс приналежності до певної функції системи $F(X)$.

О з н а ч е н н я 2. Розчеплені системні кон'юнктерми $(r-1)$-рангу матриці M_n^1 вважаються *системними кон'юнктермами-копіями* і можуть бути елементами її покриття, якщо вони однакові за значенням, а їх індекси утворюють непорожній перетин.

Отже, якщо M_n^1 має, наприклад, у матриці M_n^{n-1} два різні за значенням розчеплені системні кон'юнктерми $(r-1)$-рангу $(\theta_i^{n-1})_{1,2,\ldots,s'}$ і $(\theta_j^{n-1})_{1,2,\ldots,s''}$, тобто $(\theta_i^{n-1} \neq \theta_j^{n-1})$, або якщо їх індекси утворюють порожній перетин $(\{1,2,\ldots,s'\} \cap \{1,2,\ldots,s''\} = \varnothing;\ s', s'' \in \{1,2,\ldots,s\})$, то за означенням 2 такі елементи не є системними кон'юнктермами-копіями і не можуть бути елементами покриття матриці M_n^1. Серед системних кон'юнктермів-копій розрізнятимемо *тотожні* (*елементи*) – такі, що мають однакові індекси, та *нетотожні* – такі, що мають неоднакові індекси, але перетин яких не порожній. Наприклад, $(101)_{2,4}$ і $(111)_{2,4}$ для маски $\{l-l\}$ утворюють тотожний елемент $(1-1)_{2,4}$, а $(101)_{2,4}$ і $(001)_4$ для маски $\{-ll\}$ утворюють нетотожний елемент $(-01)_4$.

Системні кон'юнктерми-копії матриці M_n^1 (M_1^n) виділятимемо підкресленням.

О з н а ч е н н я 3. Стовпець матриці M_n^1 вважається *покритим*, якщо він має хоча б один тотожний елемент, а якщо такого нема, то його покриття складає деяка множина нетотожних елементів, об'єднання індексів яких дорівнює індексу системного мінтерма цього стовпця за умови, якщо ці елементи мають тотожні копії на інших стовпцях матриці; у протилежному випадку – елементом покриття цього стовпця є системний мінтерм підматриці M_n^n.

Отже, за означенням 3 покриття матриці M_n^1 реалізується покриттям її стовпців, причому, таке стовпцеве покриття є мінімальним, оскільки відбір елементів має пріоритетний характер: найвищий пріоритет мають тотожні елементи, після них – нетотожні елементи, а найнижчий – системні мінтерми підматриці M_n^n. Водночас із стовпцевим покриттям матриці M_n^1 реалізується усуміснення заданої системи $F(X)$, оскільки у процедурі покриття вирішальне значення мають індекси системних кон'юнктермів. Саме в цьому полягає принципова відмінність процедури покриття системи функцій перед аналогічною процедурою у випадку одної функції.

Системні кон'юнктерми одержаної множини Y_I^1 мінімального покриття матриці M_n^1 (M_1^n) далі підлягають розподілу по функціях за їх індексами, утворюючи таким чином шукану систему сумісно змінімальних ТМФ заданої системи $F(X)$.

На основі одержаної системи сумісно мінімальних ТМФ Y_I^1 ефективність змінімізованої системи $F(X)$ можна визначити за величиною *ціни реалізації* як співвідношення $k_\theta / k_l / k_{in}$, де k_θ – кількість різних системних кон'юнктермів, k_l – кількість літералів, з яких вони складаються, k_{in} – кількість нулів, які вони містять.

Сумісну мінімізацію системи повних функцій запропонованим методом ілюструє нижче приклад.

Приклад 1. Методом паралельного розчеплення кон'юнктермів змінімізувати систему повних функцій [3, стор. 315] $F(X)=\{f_1, f_2, f_3\}$, $X=\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, задану системою досконалих ТМФ

$$\begin{cases} Y_1^1 = \{2,5,6,13,14\}^1 \\ Y_2^1 = \{5,7,13,14\}^1 \\ Y_3^1 = \{2,6,7,13,15\}^1 \end{cases}.$$

Розв'язання. Для заданої системи досконалих ТМФ визначимо всі двійкові системні мінтерми $(m)_{1,2,\ldots,s'}$ та сформуємо з них множину $Y_{1,2,3}^1$:

$$Y_{1,2,3}^1 = \{(0010)_{1,3},(0101)_{1,2},(0110)_{1,3},(0111)_{2,3},(1101)_{1,2,3},(1110)_{1,2},(1111)_3\}^1.$$

Над системними мінтермами множини $Y^1_{1,2,3}$ виконаємо процедуру паралельного розчеплення, застосувавши матриці масок L^2_4, L^3_4 і L^4_4. Утворена матриця M^2_4 складатиметься з підматриць M^2_4, M^3_4 і M^4_4, у яких виділимо підкресленням системні кон'юнктерми-копії відповідних рангів:

$$\overset{S}{\Rightarrow}\left[\begin{array}{c} ll-- \\ l-l- \\ l--l \\ -ll- \\ -l-l \\ --ll \\ \hline lll- \\ ll-l \\ l-ll \\ -lll \\ \hline llll \end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccccccc}
00-- & 01-- & 01-- & 01-- & 11-- & 11-- & 11-- \\
0-1- & 0-0- & 0-1- & 0-1- & 1-0- & 1-1- & 1-1- \\
0--0 & 0--1 & 0--0 & 0--1 & 1--1 & 1--0 & 1--1 \\
-01- & -10- & -11- & -11- & -10- & -11- & -11- \\
-0-0 & -1-1 & -1-0 & -1-1 & -1-1 & -1-0 & -1-1 \\
--10 & --01 & --10 & --11 & --01 & --10 & --11 \\
\hline
001- & 010- & \underline{011-}_3 & \underline{011-}_3 & 110- & 111- & 111- \\
00-0 & \underline{01-1}_2 & 01-0 & \underline{01-1}_2 & \underline{11-1}_3 & 11-0 & \underline{11-1}_3 \\
\underline{0-10}_{1,3} & 0-01 & \underline{0-10}_{1,3} & 0-11 & 1-01 & 1-10 & 1-11 \\
-010 & \underline{-101}_{1,2} & \underline{-110}_1 & \underline{-111}_3 & \underline{-101}_{1,2} & \underline{-110}_1 & \underline{-111}_3 \\
\hline
0010_{1,3} & 0101_{1,2} & 0110_{1,3} & 0111_{2,3} & 1101_{1,2,3} & 1110_{1,2} & 1111_3
\end{array}\right].$$

У підматриці M^2_4, як бачимо, нема жодного елемента, який би, згідно з теоремою, мав чотири копії зі спільним індексом. Отже, покриття матриці M^2_4 складатимуть елементи підматриць M^3_4 і M^4_4. Це системні кон'юнктерми-копії, індекси яких визначено перетином індексів їх твірних, тобто системних мінтермів підматриці M^4_4. Зокрема $(0010)_{1,3}$ і $(0110)_{1,3}$ є твірними тотожного елемента $(0-10)_{1,3}$, а $(0101)_{1,2}$ і $(0111)_{2,3}$ – нетотожного елемента $(01-1)_2$. Натомість $(1110)_{1,2}$ і $(1111)_3$ – це твірні несистемного елемента $(111-)_{1,2\cap 3}=(111-)_{\varnothing}$, який не підкреслено.

Для визначення мінімального покриття матриці M^2_4 усунемо з неї усі несистемні елементи:

$$\overset{C}{\Rightarrow}\left[\begin{array}{ccccccc}
 & & \underline{011-}_3 & \underline{011-}_3 & & & \\
 & \underline{01-1}_2 & & \underline{01-1}_2 & \underline{\mathbf{11-1}}_3 & & \underline{\mathbf{11-1}}_3 \\
\underline{\mathbf{0-10}}_{1,3} & & \underline{\mathbf{0-10}}_{1,3} & & & & \\
 & \underline{\mathbf{-101}}_{1,2} & \underline{-110}_1 & \underline{-111}_3 & \underline{\mathbf{-101}}_{1,2} & \underline{-110}_1 & \underline{-111}_3 \\
\hline
0110_{1,3} & 0101_{1,2} & 0110_{1,3} & \mathbf{0110}_{2,3} & 1101_{1,2,3} & \mathbf{1110}_{1,2} & 1111_3
\end{array}\right].$$

У спрощеній M^2_4 виділено грубим шрифтом елементи мінімального покриття: у підматриці M^3_4 – тотожний елемент $(0-10)_{1,3}$ та нетотожні елементи $(-101)_{1,2}$ і $(11-1)_3$, у підматриці M^4_4 – системні мінтерми $(0111)_{2,3}$ і $(1110)_{1,2}$.

Отже, унаслідок процедури мінімального покриття матриці M^2_4 одержимо множину

$$Y^1_{1,2,3}\overset{C}{\Rightarrow}\{(11-1)_3,(0-10)_{1,3},(-101)_{1,2},(0111)_{2,3},(1110)_{1,2}\}^1.$$

Після розподілу системних кон'юнктермів множини $Y^1_{1,2,3}$ по функціях заданої системи $F(X)$ утворюється шукана система мінімальних ТМФ

$$\begin{cases} Y^1_1 = \{(0-10),(-101),(1110)\}^1 \equiv \{(2,6),(5,13),(14)\}^1 \\ Y^1_2 = \{(-101),(0111),(1110)\}^1 \equiv \{(5,13),(7),(14)\}^1 \\ Y^1_3 = \{(11-1),(0-10),(0111)\}^1 \equiv \{(13,15),(2,6),(7)\}^1 \end{cases}.$$

Ціна реалізації змінімізованої системи $k_\theta / k_l / k_{in} = 5/17/7$ відповідає результату, одержаного аналітичним методом [3, с. 315], проте складність реалізації запропонованим алгоритмом порівняно менша.

Мінімізація системи недовизначених функцій. У цьому випадку система $F(X)$ задається системою (1) досконалих ТМФ $\{Y_i^1; Y_i^\sim\}$. Відповідно множина системних мінтермів заданої системи $F(X)$ складатиметься з двох множин, які відокремлюватимемо символом $\mathtt{M}$, тобто $\{Y_I^1 \mathtt{M} Y_I^\sim\}$, $I = 1,2,...,s$. Процедура паралельного розчеплення елементів множини $\{Y_I^1 \mathtt{M} Y_I^\sim\}$ у цьому випадку, так само як у попередніх, також виконується за допомогою матриці-стовпця Λ_n^1 (Λ_1^n), але матриця кон'юнктермів M_n^1 (M_1^n) тепер складатиметься з двох матриць – *базової* для елементів Y_I^1 і *допоміжної* для елементів $Y_I^\sim$, які відокремлюватимемо вертикальною пунктирною лінією.

Особливість процедури паралельного розчеплення у випадку мінімізації системи $F(X)$ недовизначених функцій полягає в тому, що тотожні і/чи нетотожні системні кон'юнктерми-копії можуть бути як у базовій матриці, так і в допоміжній, якщо їх твірні належать відповідним множинам Y_I^1 і $Y_I^\sim$. Елементи допоміжної матриці можуть бути використані для довизначення функцій системи $F(X)$. Це означає, якщо якийсь елемент базової матриці не має у ній усіх необхідних копій, а вони є у допоміжній матриці так, що їх кількість, згідно з теоремою, є повною, то цей елемент може бути використаний для покриття матриці M_n^1 (M_1^n). При цьому процедура мінімального покриття виконується над елементами базової матриці за аналогічним алгоритмом як для системи повних функцій, тобто з урахуванням умови пріоритетності.

Описаний алгоритм мінімізації системи недовизначених функцій нижче ілюструє приклад.

Приклад 2. Методом паралельного розчеплення кон'юнктермів змінімізувати систему недовизначених функцій [4, стор. 155] $F(X)=\{f_1, f_2\}$, $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$, задану системою досконалих ТМФ

$$\begin{cases} Y_1^1 = \{0,7,8,12,14,15\}^1; Y_1^\sim = \{6,11,13\}^\sim \\ Y_2^1 = \{0,1,6,7,8,12\}^1; Y_2^\sim = \{3,4,13,14\}^\sim \end{cases}.$$

Розв'язання. Визначивши із заданої системи досконалих ТМФ системні мінтерми, виконаємо над ними процедуру паралельного розчеплення за допомогою матриці-стовпця, наприклад, Λ_1^n:

$$\{Y_{1,2}^1 \mathtt{M} Y_{1,2}^\sim\} = \{(0000)_{1,2},(0001)_2,(0110)_2,(0111)_{1,2},(1000)_{1,2},(1100)_{1,2},(1110)_1,(1111)_1 \mathtt{M}$$

$$\mathtt{M}(0011)_2,(0100)_2,(0110)_1,(1011)_1,(1101)_{1,2},(1110)_2\} \overset{s}{\Rightarrow}$$

$$\overset{s}{\Rightarrow} \begin{bmatrix} llll \\ lll- \\ ll-l \\ l-ll \\ -lll \\ ll-- \\ l-l- \\ l--l \\ -ll- \\ -l-l \\ --ll \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0000_{1,2} & 0001_2 & 0110_2 & 0111_{1,2} & 1000_{1,2} & 1100_{1,2} & 1110_1 & 1111_1 \\ \underline{000-}_2 & \underline{000-}_2 & \underline{011-}_2 & \underline{011-}_{1,2} & 100- & \underline{110-}_{1,2} & \underline{111-}_1 & \underline{111-}_1 \\ 00-0 & \underline{00-1}_2 & \underline{01-0}_2 & 01-1 & 10-0 & \underline{11-0}_{1,2} & \underline{11-0}_1 & \underline{11-1}_1 \\ \underline{0-00}_2 & 0-01 & 0-10 & \underline{0-11}_2 & \underline{1-00}_{1,2} & \underline{1-00}_{1,2} & 1-10 & \underline{1-11}_1 \\ \underline{-000}_{1,2} & -001 & \underline{-110}_2 & \underline{-111}_1 & \underline{-000}_{1,2} & -100 & \underline{-110}_1 & \underline{-111}_1 \\ 00-- & 00-- & 01-- & 01-- & 10-- & \underline{11--}_1 & \underline{11--}_1 & \underline{11--}_1 \\ 0-0- & 0-0- & 0-1- & 0-1- & 1-0- & 1-0- & 1-1- & 1-1- \\ 0--0 & 0--1 & 0--0 & 0--1 & 1--0 & 1--0 & 1--0 & 1--1 \\ -00- & -00- & -11- & \underline{-11-}_1 & -00- & -10- & \underline{-11-}_1 & \underline{-11-}_1 \\ -0-0 & -0-1 & \underline{-1-0}_2 & -1-1 & -0-0 & \underline{-1-0}_2 & -1-0 & -1-1 \\ \underline{--00}_2 & -001 & --10 & --11 & \underline{--00}_2 & \underline{--00}_2 & --10 & --11 \end{bmatrix}$$

$$
\left|\begin{array}{cccccc}
0011_2 & 0110_2 & 0110_1 & 1011_1 & 1101_{1,2} & 1110_2 \\
\hline
001- & 010- & \underline{011-}_1 & 101- & \underline{110-}_{1,2} & 111- \\
\underline{00-1}_2 & \underline{01-0}_2 & 01-0 & 10-1 & \underline{11-1}_1 & \underline{11-0}_2 \\
\underline{0-11}_2 & \underline{0-00}_2 & 0-10 & \underline{1-11}_1 & 1-01 & 1-10 \\
-011 & -100 & \underline{-110}_1 & -011 & -101 & \underline{-110}_2 \\
\hline
00-- & 01-- & 01-- & 10-- & \underline{11--}_1 & 11-- \\
0-1- & 0-0- & 0-1- & 1-1- & 1-0- & 1-1- \\
0--1 & 0--0 & 0--0 & 1--1 & 1--1 & 1--0 \\
-01- & -10- & \underline{-11-}_1 & -01- & -10- & -11- \\
-0-1 & \underline{-1-0}_2 & -1-0 & -0-1 & -1-1 & \underline{-1-0}_2 \\
--11 & \underline{--00}_2 & --10 & --11 & --01 & --10
\end{array}\right] \overset{C}{\Rightarrow}
$$

$$
\left[\begin{array}{cccccccc|cccccc}
0000_{1,2} & 0001_2 & 0110_2 & 0111_{1,2} & 1000_{1,2} & 1100_{1,2} & 1110_1 & 1111_1 & 0011_2 & 0100_2 & 0110_1 & 1011_1 & 1101_{1,2} & 1110_2 \\
\hline
\underline{000-}_2 & \underline{000-}_2 & \underline{\mathbf{011}-}_2 & \underline{\mathbf{011}-}_{1,2} & & \underline{110-}_{1,2} & \underline{111-}_1 & \underline{111-}_1 & & & \underline{\mathbf{011}-}_1 & & \underline{110-}_{1,2} & \\
 & \underline{\mathbf{00-1}}_2 & \underline{01-0}_2 & & & \underline{11-0}_{1,2} & \underline{11-0}_1 & \underline{11-1}_1 & \underline{\mathbf{00-1}}_2 & \underline{01-0}_2 & & & \underline{11-1}_1 & \underline{11-0}_2 \\
\underline{0-00}_2 & & & \underline{0-11}_2 & \underline{1-00}_{1,2} & \underline{1-00}_{1,2} & & \underline{1-11}_1 & \underline{0-11}_2 & \underline{0-00}_2 & & \underline{1-11}_1 & & \\
\underline{-\mathbf{000}}_{1,2} & & \underline{-110}_2 & \underline{-111}_1 & \underline{-\mathbf{000}}_{1,2} & & \underline{-110}_1 & \underline{-111}_1 & & & \underline{-110}_1 & & & \underline{-110}_2 \\
\hline
 & & & & & \underline{\mathbf{11}--}_1 & \underline{\mathbf{11}--}_1 & \underline{\mathbf{11}--}_1 & & & & & \underline{\mathbf{11}--}_1 & \\
 & & & \underline{-11-}_1 & & & \underline{-11-}_1 & \underline{-11-}_1 & & & \underline{-11-}_1 & & & \\
 & & \underline{\mathbf{-1-0}}_2 & & & \underline{\mathbf{-1-0}}_2 & & & & \underline{\mathbf{-1-0}}_2 & & & & \underline{\mathbf{-1-0}}_2 \\
\underline{--00}_2 & & & & \underline{--00}_2 & \underline{--00}_2 & & & & \underline{--00}_2 & & & &
\end{array}\right].
$$

У спрощеній матриці M_1^4 виділено грубим шрифтом елементи мінімального покриття з урахуванням довизначення. Зокрема тотожний елемент $(-000)_{1,2}$ має копію в базовій матриці, а копія тотожного елемента $(00-1)_2$ – у допоміжній матриці. Виділено також нетотожний елемент $(011-)_2$, що має копію у допоміжній матриці, бо його тотожна копія $(011-)_{1,2}$ є елементом базової матриці.

Після виконання процедури мінімального покриття матриці M_1^4 з пріоритетом для елементів найнижчих рангів – у нашому прикладі це два довизначені системні кон'юнктерми 2-рангу підматриці M_2^4, а саме, тотожний елемент $(-1-0)_2$ і нетотожний елемент $(11--)_1$, одержимо множину покриття

$$Y_{1,2}^1 = \{(-1-0)_2, (11--)_1, (-000)_{1,2}, (00-1)_2, (011-)_{1,2}\}.$$

Після розподілу системних кон'юнктермів множини $Y_{1,2}^1$ по індексах функцій заданої системи $F(X)$ одержимо систему мінімальних ТМФ

$$\begin{cases} Y_1^1 = \{(-000), (011-), (11--)\}^1 \\ Y_2^1 = \{(-000), (00-1), (011-), (-1-0)\}^1 \end{cases}.$$

Відповідь. Ціна реалізації змінімізованої системи дорівнює $k_\theta / k_l / k_{in} = 5/13/7$, що є кращим результатом, ніж у [4, стор. 155, там $k_\theta / k_l / k_{in} = 5/13/9$], де цей приклад розв'язано методом карт Карно.

Одержаний результат сумісно змінімізованої заданої системи $F(X)=\{f_1, f_2\}$ подамо з метою перевірки у десятковому форматі (грубим шрифтом виділено мінтерми 3_2, 4_2, 6_1, 13_1 і 14_2, внесені процедурою довизначення):

$$\begin{cases} Y_1^1 = \{(0,8), (\mathbf{6},7), (12,\mathbf{13},14,15)\}^1 \\ Y_2^1 = \{(0,8), (1,\mathbf{3}), (6,7), (\mathbf{4},6,12,\mathbf{14})\}^1 \end{cases}$$

Висновки

Запропоновано новий метод мінімізації системи логікових функцій від *n* змінних на основі процедури паралельного розчеплення кон'юнктермів. Порівняно з відомими методами мінімізації [1–4,6] запропонований алгоритм характеризується простішою практичною реалізацією за рахунок меншої обчислювальної складності, що проілюстровано на прикладах, використаних з публікацій відомих авторів. Методом паралельного розчеплення кон'юнктермів скорочується також шлях одержання результату мінімізації у випадку слабковизначених функцій чи їх систем, алгоритм реалізації та приклади яких тут не наведено з причини перевищення обсягу поданого матеріалу.

1. Sasao T., Switching Theory for Logic Synthesis, Kluwer Academic Publishers, 1999. – 361 p. 2. Закревский А.Д., Потосин Ю.В., Черемисинова Л.Д. Логические основы проектирования дискретных устройств. – М.: Физматлит, 2007, – 590 с. 3. Гаврилов М.А., Девятков В.В., Пупырев Е.И. Логическое проектирование дискретных автоматов. – М.: Наука, 1977. – 352 с. 4. Tinder R.F. Engineering Digital Design. Academic Press, Elsevier Science (USA), 2000, 884 p. 5. Morreale E. Recursive operator for prime implicant and irredundand normal form determination, IEEE Trans. on Comp. – 1970 Vol. C–19. – P.504. 6. Рицар Б.Є. Мінімізація булових функцій методом розчеплення кон'юнктермів. Управляющие системы и машины. № 5. 1998, – с. 14–22. 7. Рицар Б.Є. Теоретико-множинні оптимізаційні методи логікового синтезу комбінаційних мереж // Дис. … д-ра техн. наук. – Львів, 2004.