цікавою галуззю знань, ніж написання програмного забезпечення для комп'ютера, а з урахуванням роботи з реальними процесами можна вважати, що ця робота близька до мистецтва.

*1. Open System [Електронний ресурс]/ Конкурсное задание. Олимпиада апрель 2011 (очная). – Режим доступу: http://opensys.com.ua/Olympic/Konkurs2011, вільний. – Загл. з екрана. – Мова рос. 2. Жимарши Ф. Сборка и программирование мобильных роботов в домашних условиях / Ф. Жимарши. – М.: НТ Пресс, 2007. – 288 с. – 3. Лебедев М. Б. CodeVisionAVR: пособ. для начинающих / М.Б. Лебедев. – М.: Додэка-XX1, 2008. – 592 с.*

**УДК 62.50:658.21**

**Т.М. Боровська, І.С. Колесник, П.В. Северілов, А.О. Маліночка**
Вінницький національний технічний університет

# ОПТИМАЛЬНЕ АГРЕГУВАННЯ СИСТЕМ ЗІ СТОХАСТИЧНИМИ ФУНКЦІЯМИ ВИРОБНИЦТВА



**На основі методології оптимального агрегування побудовано систему математичних моделей оптимального агрегування стохастичних функцій виробництва для виробничих систем з паралельно працюючими виробничими елементами. Розроблено структуру даних для стохастичних функцій виробництва. Програмно реалізовано бінарний оператор оптимального агрегування стохастичних виробничих функцій – асоціативний і комутативний. Багатовимірна задача оптимізації розбивається в послідовність одновимірних задач оптимізації. У підсумку структура з довільним числом паралельно працюючих виробничих елементів заміняється еквівалентним оптимальним за адитивним критерієм виробничим елементом, з розподілом ймовірностей сумарного виробництва, що є згорткою розподілів елементів виробничої системи.**

**Ключові слова: оптимальне агрегування, моделювання, ймовірність, згортка, виробнича функція, виробнича система.**

**On the basis of methodology of optimal aggregation of the system of mathematical models for optimal aggregating of stochastic functions of production is built for the production systems with parallel working production elements. The structure of data is developed for the stochastic functions of production. Its programming is realized by binary operator of optimal aggregating of stochastic production functions – associative and commutative. The multidimensional task of optimization was decomposed into the sequence of one dimension tasks of optimization. As a result a structure with the arbitrary number of parallel working production elements is replaced by an equivalent optimal production element, with distribution of probabilities of total production which is convolution of distribution of elements of the production system.**

**Key words: optimal aggregating, modeling, probability, convolution, production function, production system.**

## Вступ

Оцінка ризиків є невід'ємним елементом будь-яких управлінських рішень у виробничій організації. Наявні методи оцінки ризиків на основі статистики та класичних моделей теорії ймовірностей – досконалі, добре відпрацьовані "острівці", сформовані на основі певних розподілів ймовірностей – пуасонівського, Стьюдента та ін. На жаль, з причини наявності нелінійних взаємодій між виробничими системами і продуктами виробництва класичні моделі не є адекватними реальності. Ще одне ускладнення – необхідність підтримки оптимальності процесів функціонування і розвитку виробничої системи на усіх рівнях – від техпроцесів до корпоративного рівня.

Справді, в умовах стихійної глобалізації позитивних і негативних факторів необхідною умовою існування окремої виробничої системи є “онлайнова” оптимізація процесів функціонування і розвитку з аналізом ризиків з “плавною деградацією” якості прогнозування і оптимізації залежно від повноти  і достовірності вхідних даних – статистики виробництва.

**Постановка проблеми**

Сьогодні невідомі інтегровані моделі і методи для оптимізації розподілу ресурсів виробництва і розвитку між елементами виробничих систем з визначенням розподілів імовірностей для оптимізованої виробничої системи. Необхідна умова корисності таких інтегрованих моделей – відсутність обмежень математичних моделей типу лінійності, неперервності, випуклості і зняття проблеми розмірності в оптимізації розподілу ресурсів між елементами виробничої системи.

**Аналіз останніх досліджень та публікацій**

Сьогодні відчувається певне розмежування публікацій за цільовим призначенням: “кваліфікаційні”, “грантові” і “корпоративні”, що є конфіденційними: за рівнем вимог джерела публікації – на “рецензовані” і “дорецензійні” – в США для оперативних публікацій, і “безрецензійні” – публікації в Інтернеті. Проведено пошук в усіх категоріях публікацій. Сьогодні головний центр наукових публікацій – видання і конференції IEEE – комерційні системи з доступом для членів IEEE. В [5] розглянута адаптивна система стабілізації температури у типовій стохастичній системі – біореакторі; в [4] пропонується підхід до визначення оцінок невимірюваних змінних – стану нелінійного об’єкта з розподіленими параметрами. Публікація [6] є найближчим за методологією аналогом; пропонується нелінійний адаптивний з динамічним горизонтом прогнозування алгоритм. Найближчі знайдені аналоги моделей розвитку – у статтях [7, 9]. У [7] на рівні схем і словесних моделей розглядаються проблеми радикальних інновацій виробництва зі споживачами як головним джерелом невизначеностей і потенційного успіху. В [9] на основі класичних моделей пропонується вирішення проблеми інновацій і гарантованого зростання високотехнологічних виробництв на основі “квантільної регресії”. Тобто маємо або неконструктивне узагальнення, або точне розв’язання локальної задачі. Найпродуктивніший методологічний аналог – монографії і статті групи Салтеллі [3], де задача аналізу ризиків виробничої системи розв’язується інтеграцією моделі ризиків з моделлю функціонування. Однак для реалізації моделі вибрано класичну статистику.

Ця стаття є продовженням теоретичних [1, 2] і практичних досліджень авторів. Одна з інтерпретацій і практичного запровадження моделей оптимального агрегування стохастичних функцій – біореактори для переробки органічних відходів. Зокрема, спроектовано ряд дослідницьких біореакторів (П.В. Северілов) – типових стохастичних технологічних об’єктів, де збурювальними факторами є наявність у сировині антибіотиків тощо, що істотно впливає на характеристики “витрати – випуск” добрив та біогазу. Ще один методологічний аналог був знайдений вже після  створення інтегрованого методу оптимізації і еквівалентістних перетворень моделей систем **матеріального виробництва**, що називається **методом оптимального агрегування.** Це відома робота “Optimal aggregation algorithms for middleware” [9]. Особливість її полягає в поєднанні абстрактних математичних моделей з програмуванням. Область призначення – великі бази даних, інформаційне виробництво.

**Формулювання цілі роботи**

Теоретичне обґрунтування і програмна реалізація оператора оптимального агрегування стохастичних функцій виробництва, побудова алгебраїчної системи, носіями якої є матричні структури, що містять інформацію про дискретизовану оптимальну еквівалентну функцію виробництва (ФВ), відповідні функції оптимального розподілу ресурсів та дискретизовані функції розподілів ймовірностей значень оптимальної еквівалентної ФВ для кожного значення сітки значень сумарних витрат ресурсів у системі.

Для досягнення цілі потрібно:

– виявити і провести порівняльний аналіз альтернатив структури бінарного оператора оптимального агрегування стохастичних ФВ;

– розглянути і реалізувати альтернативні методи отримання згортки довільних розподілів.

**Новизна роботи –** розроблення і дослідження стосовно нового класу об'єктів – стохастичних функцій "витрати – випуск" та алгебри оптимального агрегування.

## Виклад основного матеріалу

Для побудови моделей і методів вибираємо ресурсний підхід: виробничу систему і її елементи розглядаємо, як **технологічні перетворювачі ресурсів в продукт**, і методологію оптимального агрегування [1], що є гілкою методології Беллмана: заміна задачі вибору точки в багатовимірному фазовому просторі на послідовність виборів точки у фазових просторах меншої розмірності, в ідеалі – одновимірних. Метод ґрунтується на принципі оптимальності і на припущенні про нестрогу монотонність і позитивність характеристик "витрати – випуск" – "функції виробництва" для усіх елементів системи. Змінними управління для задачі оптимізації вибрані частки ресурсів, що виділяються для елементів системи. Ресурси можуть витрачатись на виробництво, розвиток виробництва та створення інновацій. Побудова ресурсних моделей починається від "породжуючих механізмів" – достовірних законів механіки, фізики, термодинаміки, біології і екології і соціопсихології (поведінка користувачів), що перевіряються статистикою віртуальної і реальної реальностей.

## Постановка детермінованої задачі оптимального агрегування

Маємо модель функції виробництва ФВ): $y = f(x, Vp, k)$, де $y$ – продукт; $x$ – ресурс; $Vp$ – вектор параметрів; $k$ – клас ФВ.

Пряма базова задача: $y_i = f_i(x_i)$, $i = 1,.., N$, де $x_i$ – ресурс, для $i$-го елемента.

Критерій, ціль оптимізації і обмеження, змінні управління:

$$F(x_1, x_2,.., x_N) = \sum_i f_i(x_i) \to \max; \; G(x_1, x_2,.., x_N) = \sum_i x_i - R = 0,$$

де $x_i$ – змінні управління.

Спряжена задача. Критерій, ціль оптимізації і обмеження:

$$Gs(x_1, x_2,.., x_N) = \sum_i x_i \to \min; \; Fs(x_1, x_2,.., x_N) = \sum_i f_i(x_i) - Ys = 0,$$

де $Ys$ – заданий темп виробництва; $y_i = f_i(x_i)$ – змінні управління.

Шукаємо неточкове розв'язання, а функцію – залежність оптимального розподілу ресурсу від величини обмеження. Форма розв'язання задачі: $Ys = fops(Xs)$ – оптимальна ФВ системи, $Dop(X)$ – вектор-функція оптимального розподілу ресурсу; $x_i = Dop_i(Xs)$ – частка ресурсу для $i$-го елемента виробничої системи. Форма розв'язання бінарної задачі (двоелементна система): $y2 = f2op(Xs)$ – оптимальна ФВ системи; $x_1 = ao \cdot Xs$; $x_2 = (1 - ao) \cdot Xs$ – розподіл ресурсу.

Бінарний оператор оптимального розподілу бере дві ФВ елементів і повертає оптимальну ФВ системи: $f2op = F2o(f1, f2)$. Якщо $F2o$ – асоціативний, то багатовимірна задача нелінійного програмування може бути розбита в систему одновимірних задач оптимального розподілу ресурсу між елементами розподіленої виробничої системи.

Реалізація підходу на основі оптимального агрегування розбивається у послідовність етапів, на кожному з яких виконується формалізація задач і побудова відповідних програмних модулів, що трансформують абстрактні математичні моделі в активну форму – “живу математику” математичних пакетів. На рис. 1 показано інформаційний блок “бібліотека базових функцій виробництва і розвитку”.

**Ступенева** $F1(x, A, w, s) \equiv 1A \cdot x^{10w}$

**Логарифмічна** $F2(x, A, w, s) \equiv 1.5A \cdot ln(x+1)$

**Експоненційна** $F3(x, A, w, s) \equiv 10 \cdot A \cdot \left(1 - e^{-w \cdot x}\right)$

**Увігнуто-випукла** (S-функція) $F4(x, A, w, s) \equiv 10 \cdot A \cdot \left(1 - e^{-w \cdot x}\right)^{s}$

**Лінійна з обмеженням**, лінійна з обмеженням і порогом витрат функції

**Ступінчаста (прирощення виробничих потужностей дискретними одиницями)**

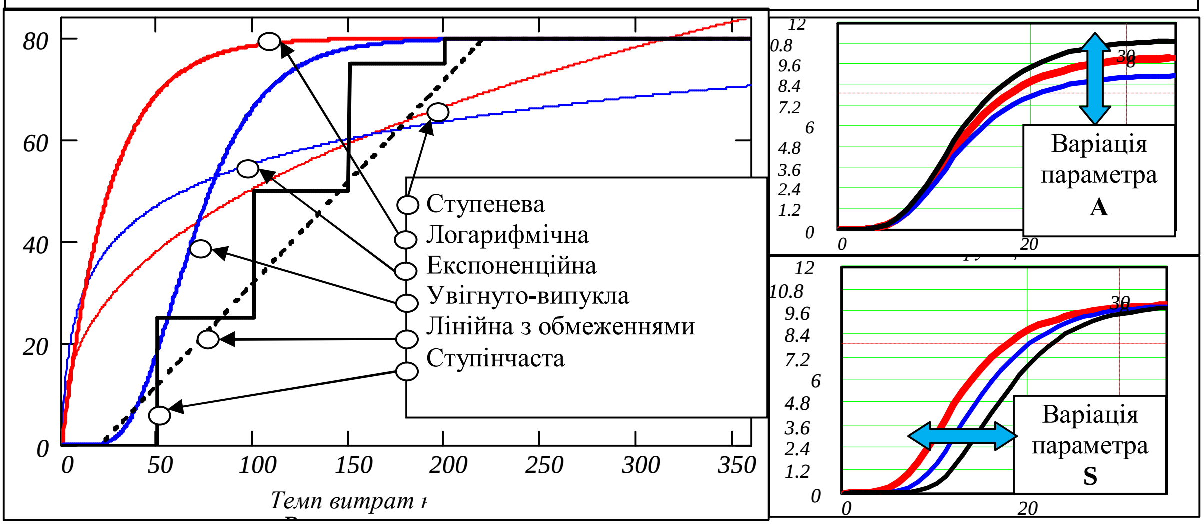


*Рис. 1. Бібліотека базових функцій виробництва і розвитку*

**Математична модель еквівалентної оптимально агрегованої ВС**

Деталізуємо задачу максимізації сумарного виробництва за обмеження ресурсів для ВС з паралельно працюючими елементами з використанням методу оптимального агрегування. Розглядається система з $N$ виробничих елементів, що використовують деякий ресурс у кількості $x_i$ і виробляють продукцію у кількостях:

$$y_i = f_i(x_i);\ i = 1, \mathbf{K}, N,$$

де $x_i$ – кількість ресурсу, виділеного $i$-му елементу. Треба розподілити ресурс R так, щоб максимізувати сумарне виробництво:

$$F(x_1, x_2, \mathbf{K}, x_N) = \sum_{i=1}^{N} f_i(x_i); \Rightarrow \max;$$

за обмеження $G(x_1, x_2, \mathbf{K}, x_N) = \sum_{i=1}^{N} x_i - R = 0.$, управління $- x_i$.

Метод оптимального агрегування дає змогу виконати декомпозицію задачі пошуку екстремуму функції $N$ змінних у послідовність з $(N\text{-}1)$ задач знаходження екстремуму функцій однієї змінної. Обмеження методу на функції виробництва: нестрого монотонно зростаюча, нестрого позитивна.

Вводимо вектор-функцію оптимального розподілу ресурсу $Dop(R)$, $0 \le R \le R\max$, де *Rmax* – границя інтервалу припустимих значень ресурсу. Компоненти вектор-функції $Dop(R)$ – частки ресурсів для кожного елемента ВС.

Вводимо оптимальну еквівалентну ФВ виробничої системи:

$$Yop(R) = \sum_{i=1}^{N} \cdot$$

Властивості $Yop(R)$ з нестрого позитивними і нестрого монотонними ФВ-елементами:

– неперервність та нестрога монотонність $R2 > R1 \rightarrow Yop(R2) \geq Yop(R1)$;

– точкам розриву $Dop(R)$ відповідають розриви похідної $\frac{\partial}{\partial R} Yop(R)$.

**Алгебра оптимального агрегування**

Метод оптимального агрегування паралельних структур створює алгебраїчну систему: <*A*;***WF***;***WR***>, де *A* – множина дискретизованих ФВ – *носій алгебри*; ***WF*** – множина операцій алгебри, визначених на *A* (оператори оптимального агрегування для паралельних, послідовних і кільцевих структур); ***WR*** – множина відносин, визначених на *A* (для двох і довільного числа ФВ – відносини домінування, аналоги підмножин Парето).

Бінарний оператор $f2o(f1,\ f2)$ оптимального агрегування бере дві дискретизовані ФВ, представлені матрицями з фіксованою кількістю рядків і змінною кількістю стовпців; а повертає об’єкт того самого класу – дискретизовану оптимальну ФВ, подану матрицею тієї самої структури.

Властивості оператора оптимального агрегування для паралельних структур: асоціативність і комутативність $f2o(f1,\ f2o(f2, f3)) = f2o(f2,\ f2o(f3, f1))$.

Декомпозиція багатовимірної задачі оптимального розподілу обмеженого ресурсу у послідовність одновимірних оптимізаційних задач – наслідок асоціативності бінарного оператора $f2o(f1,\ f2)$. Виконаємо дослідження оптимального агрегування, спрямоване на реалізацію оператора оптимального агрегування – ключового елемента методу оптимального агрегування. Введемо множину α-функцій (2.4): $fa\,(f1,\ f2, a, x) := f1(a \cdot x) + f2\left[(1-a) \cdot x\right]$.

Оптимальна ФВ системи з двох елементів є огинаючою системи функцій $fa(f1,\ f2, a, x),\ 0 \leq a \leq 1,$ тобто результатом застосування комутативної і асоціативної операцій max(.).

Бінарна операція оптимального агрегування принципово відрізняється від аналогів, наприклад, отримання передаточної функції для паралельного поєднання двох елементів тим, що крім власне композиції, виконується також одновимірна оптимізація розподілу ресурсу для заданого інтервалу значень ресурсу. Тобто результатом є залежність витрати ресурсів на двоелементну систему – максимальний сумарний випуск продукції. Це оптимальна еквівалентна ФВ системи. Оптимізація виконується методом прямого перебору на фіксованій сітці. На сучасних ЕОМ з можливостями розпаралелювання обчислень метод прямого перебору має переваги над пошуковими методами.

У підсумку метод прямого перебору знімає проблему розмірності:

– маємо послідовність одновимірних задач оптимізації – обчислювальні витрати зростають приблизно лінійно до функції розмірності задачі;

– усуваються проблеми пошуку глобального екстремуму і обробки розривів та інших особливостей цільової функції.

**Структура операндів**

Для побудови цілісної алгебраїчної системи і для практичного використання операнд в алгебрі оптимального агрегування повинен містити не тільки вектори значень дискретизованої оптимальної еквівалентної ФВ, але і значення вектор-функції оптимального розподілу ресурсів для кожного значення ресурсу. За послідовних агрегувань пам’ять попередніх агрегувань розширюється, – збільшується кількість стовпців у структурі даних операнда. У кожному *i*-му стовпці подаються значення часток ресурсу для *i*-го виробничого елемента за зміни сумарного ресурсу системи. “Монолітні” елементи не мають історії попередніх агрегувань, можна також, за необхідності, онулювати історію агрегувань. Таке ускладнення структури операндів зумовлено не тільки забезпеченням повноти алгебраїчної системи, але і потребами практичного застосування – для визначення часток ресурсу усіх елементів на усіх рівнях ієрархії реальної виробничої системи. Назвемо операцію розрахунку цих часток ресурсу для кожного елемента виробничої системи, що виконується після отримання оптимальної еквівалентної ФВ виробничої системи, “дезагрегуванням”. На рис. 2 показана суть перетворення розподіленої ВС в еквівалентний оптимальний елемент. Це обґрунтована і реалізована база для розширення операції оптимального агрегування на стохастичні ФВ.

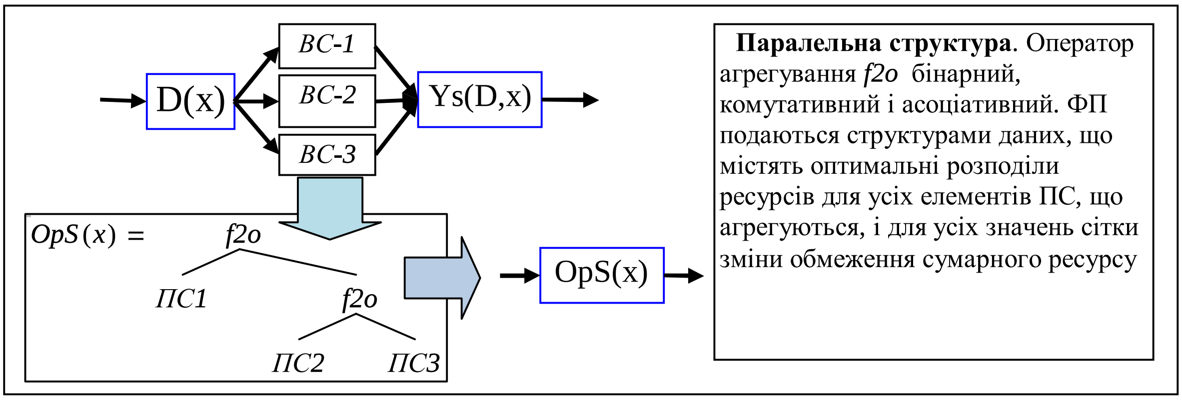


*Рис. 2. Схема отимального еквівалентного перетворення паралельної структури ВС*

### Невизначеності у виробничих системах

Використовуємо термінологію Беллмана для процесів управління “однокрокові процеси”, “багатокрокові процеси”, оскільки вона введена саме для дискретних процесів. Сформулюємо дві елементарні задачі управління для виробничих систем:

– задана величина ресурсу; треба визначити вихід виробничої системи;

– задана величина ресурсу і відповідний розподіл ймовірностей ВФ; треба визначити розподіл ймовірностей виходу виробничої системи.

Сформулюємо аналогічні задачі для ВС, що складається з кількох паралельно працюючих підсистем:

– задані величина ресурсу ФВ усіх підсистем; визначити сумарний вихід ВС за умови оптимального розподілу ресурсу;

– задані величина ресурсу і оптимальна еквівалентна ФВ системи з паралельно працюючих елементів; визначити вихід оптимального еквівалентного елемента;

– задана величина ресурсу і відповідний розподіл ймовірностей елементів системи, визначити розподіл ймовірностей виходу ВС за умови оптимального розподілу ресурсу між підсистемами.

Являють практичний інтерес такі три варіанти задачі:

1) система оптимального розподілу оперативно із задовільною точністю розраховує і реалізує оптимальний розподіл ресурсів;

2) система оптимального управління має деякі значення параметрів ФП усіх елементів системи і по них розраховує оптимальний розподіл ресурсів:

3) система управління протягом певного інтервалу часу збирає і обробляє інформацію про ФВ елементів, корегує параметри ФВ і починає новий цикл “ідентифікація – корегування”.

На рис. 3 зображені схеми перетворень розподілів ймовірностей: простих – лінійних, нелінійних і складних нелінійних, породжених операціями оптимального агрегування.

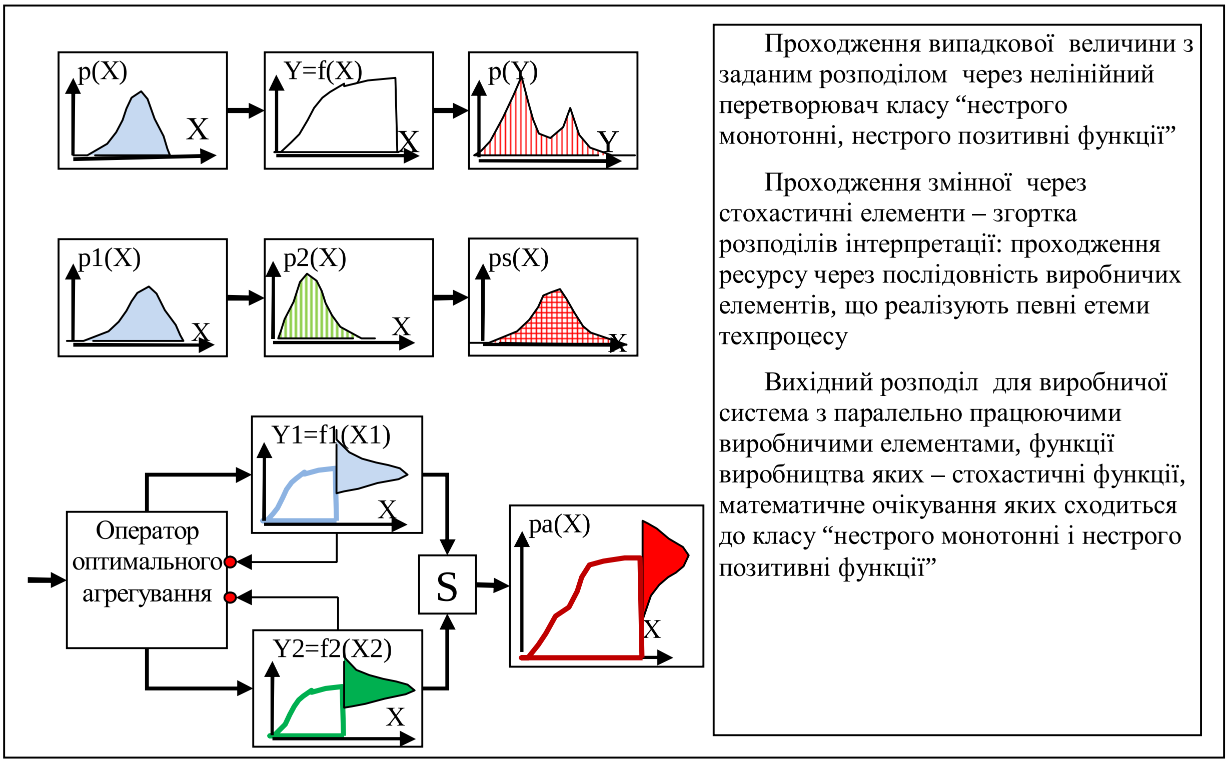


*Рис. 3. Схеми типових перетворень розподілів ймовірностей*

**Аналіз систем розподілів ймовірностей виходу функцій виробництва елементів та оптимально агрегованих систем**

Для більшості виробничих систем розподіл імовірностей виходу залежить від рівня завантаження: одні “породжуючі механізми діють за малих навантажень, інші за оптимального *Ynom* і максимального *Ymax* навантажень. Через очевидні обмеження вважаємо ці розподіли обмеженими кінцевими інтервалами (0, Ymax). Це повинно бути відображено в моделі. Нарешті, не намагаємось без вичерпних обґрунтувань відобразити реальні розподіли пуассонівськими чи гауссівськими розподілами. Обґрунтуванням вибору є доступна статистика реальних систем (сьогодні у США хочуть для інтенсифікації інноваційного розвитку зробити загальнодоступною статистику фірм і корпорацій) і віртуальна статистика отримана на імітаційних моделях функціонування і розвитку виробничих систем [1, 2]. На рис. 4 показано приклад результату моделювання процесу функціонування і розвитку системи виробників: ліворуч – функції “витрати – випуск” та розподіли ймовірностей випуску для двох підсистем.

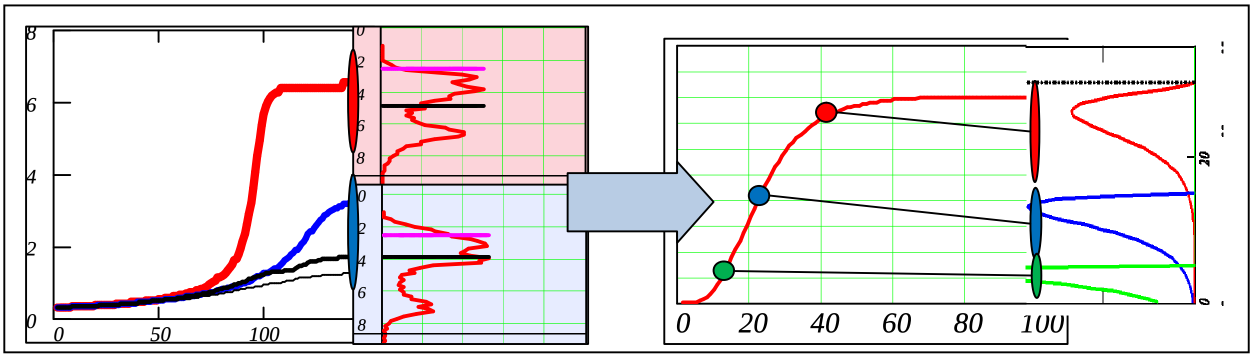


*Рис. 4. Відображення результатів імітаційного моделювання у робочу стохастичну модель*

Ці розподіли є не тільки багатомодовими, але і фрактальними та нестаціонарними. За збільшення обсягу вибірки вони не згладжуються (подібні ефекти спостерігаються для коливань біржових індексів, для яких Б. Мандельброт запропонував фрактальну модель. Праворуч подано відображення віртуальної реальності у формалізовану робочу модель розподілів невизначеностей виробництва. Це задовільна модель першого наближення. Випробувано також моделі з рівномірним та обмеженим нормальним розподілом.

У робочій моделі на рис. 4 за зміни рівня навантаження змінюються тільки параметри розподілу певного класу. За оптимального агрегування може змінюватись клас розподілу ймовірностей. На рис. 5 показано тестовий приклад результатів імітаційного моделювання двоелементної оптимально агрегованої системи. Це інтерактивна система для потенційних користувачів. Подано два “кадри” – функціонування системи за обмежень ресурсу 200 і 250 о.в. У нижній частині кадрів – вхідні дані для імітаційного моделювання, у верхній – результати для вибірки у 200.000 прогонів (реально таку статистику неможливо зібрати). Виконані дослідження зумовлюють постановку задачі вибору структур стохастичних ФВ і вибору ефективних методів згортки довільних розподілів ймовірностей.

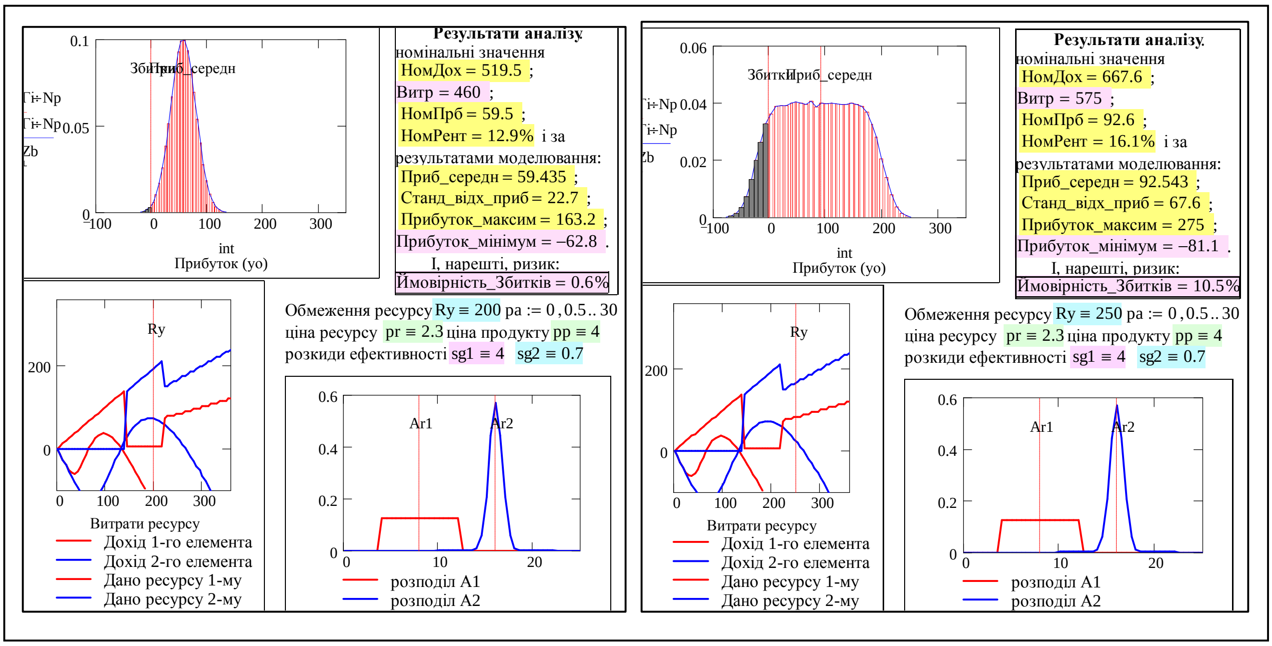


*Рис. 5. Імітаційне моделювання оптимально агрегованої системи з двох стохастичних виробничих елементів*

**Реалізація бінарного оператора оптимального агрегування стохастичних ФВ**

Було виконано пошук, реалізацію і дослідження альтернатив:

– структур оператора і операндів оптимального агрегування стохастичних ФВ;

– альтернатив згортки довільних розподілів ймовірностей для ФВ.

Збираємо розроблені функціональні модулі і реалізуємо оператор $fs2o(f1, f2, dr1, dr2)$, що бере дві дискретизовані детерміновані функції виробництва та дві дискретизовані системи розподілів ймовірностей для двох виробничих елементів. Оператор повертає об’єкт того самого класу – оптимальну еквівалентну ФВ системи у комплексі з вектор-функцією оптимального розподілу ресурсу і вектор-функцією розподілів ймовірностей. Це об’єкт, що належить до множини носіїв алгебри оптимального агрегування стохастичних ФВ. Одне з головних досягнень розробки – за переходу від детермінованих ФВ до стохастичних ми зберігаємо алгебру, створену для детермінованих систем [1]. Розроблення є новим теоретичним результатом, але її головне призначення – бути інструментом аналізу і синтезу реальних виробничих систем у конкретних галузях – від рослинництва і тваринництва до металургії, хімії, виробництва засобів електроніки, зв’язку та обчислювальних систем.

Тому не перевантажуємо оператор параметрами, які виносимо в сервісні модулі введення і виведення даних. Ці модулі дозволяють налаштувати програмну систему на специфіку техпроцесів конкретної галузі. Розроблені оператори дозволяють виконати зворотні операції дезагрегування – визначити оптимальне управління для кожного елемента, побудувати функції чутливості кінцевих показників системи від параметрів певного елемента ВС.

На рис. 6 показано схему процесу оптимального агрегування стохастичних ФВ. Схема складається з трьох етапів: оптимального агрегування, формування стохастичних функцій виробництва (у разі нечітких моделей – це фазифікація), і згортка розподілів для кожної точки дискретизованої оптимальної еквівалентної ФВ. Зупинимось на графіках пункту "оптимальне агрегування", де подано два графіки ФВ елементів: увігнуто-випуклих, гладких; графік оптимальної еквівалентної ФВ системи – увігнуто-випуклої, негладкої, два графіки, де подані оптимальні частки розподілу ресурсу – бачимо: спочатку весь ресурс виділяється одному елементу (до рівня сумарного ресурсу 100 о.в., потім другому (в діапазоні 100–120) і далі – у певній пропорції. Це банальні закономірності для систем з увігнуто-випуклими ФВ.

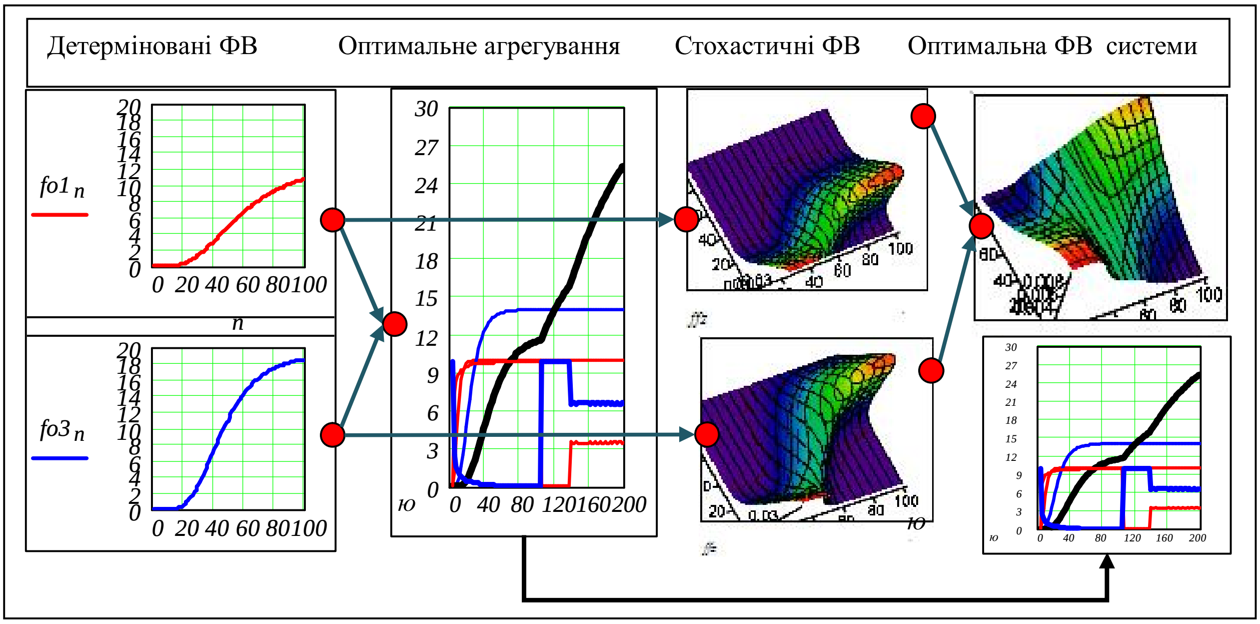


*Рис. 6. Схема процесу оптимального агрегування стохастичних ФВ*

Після того, як усі теоретичні і практичні проблеми агрегування і згортки вирішені, підсумкова програма $fs2o(f1, f2, xik)$ реалізує бінарний оператор оптимального агрегування стохастичних функцій виробництва. Вона бере дві детерміновані ФВ і систему розподілів ймовірностей, і повертає еквівалентну оптимальну (для математичних очікувань або мод) стохастичну ФВ системи з двох паралельно працюючих виробничих елементів. Для системи з $N$ елементів треба застосувати бінарний оператор $N-1$ разів.

До модуля входять такі функціональні модулі (підпрограми):

$f2o(mf1, mf2)$ – модуль оптимального агрегування бере дві дискретизовані ФВ (матриці) і повертає дискретизовану оптимальну еквівалентну ФВ та вектор-функцію оптимального розподілу ресурсу;

$Stog(fp1, xik)$ – модуль формування стохастичних ФВ елементів, що бере дискретизовану ФВ і базову функцію розподілу (щільності) імовірностей за заданого рівня сумарного ресурсу виробництва. Повертає модуль у двовимірний масив розподілів ймовірностей як функцію витрат ресурсу;

$sGoKla(Dry1, Dry2)$ – модуль згортки розподілів ймовірностей, бере два дискретизовані розподіли (нормовані вектори) певних випадкових величин і повертає розподіл ймовірностей для суми цих випадкових величин. Для нестаціонарних систем розроблено альтернативний варіант – на основі імітації випадкових процесів $sGogen(Dry1, Dry2)$.

На рис. 7 подано текст базової версії модуля оптимального агрегування стохастичних ФВ. Цикл можливо замінити векторизованим виразом, але тоді головна програма матиме занадто примітивний вигляд. Рошифрування назви модуля згортки: згортка класична (для подальших розробок використана імітаційна згортка).

```
fs2o(f1, f2, xik) := | par1 ← 3
                     | par2 ← 4
                     | Op2 ← f2o(f1, f2)
                     | koT ← rows(Op2⟨1⟩)
                     | DR1 ← Stog(f1, xik)₁
                     | DR2 ← Stog(f2, xik)₁
                     | for n ∈ 1 .. koT
                     |    | dr1 ← DR1⟨n⟩
                     |    | dr2 ← DR2⟨n⟩
                     |    | Sgdr⟨n⟩ ← sGoKla(dr1, dr2)
                     | Sgdr
```

Підпрограма (оператор) оптимального агрегування

Підпрограма (оператор) формування стохастичних ФВ

Підпрограма (оператор) згортки двох довільних розподілів ймовірностей виходу виробничих елементів

*Рис. 7. Модуль згортки розподілів імовірностей оптимально агрегованої виробничої системи*

Програма синтаксично і семантично коректна – видає результати. Ці результати є справді згортками. Однак в прагматичному аспекті вона має недоліки, зумовлені проблемами подання розподілів для малих навантажень (занадто великі або занадто малі значення). Поки вибрано “обрізати високі піки” розподілів.

На рис. 8 показано тривимірні графіки операндів – стохастичних ФВ і графік стохастичної ФВ оптимально агрегованої системи. Тобто в результаті розробки **отримано розширений оператор оптимального агрегування**, що, крім оптимальної еквівалентної ФВ, видає також спряжену з нею систему розподілів ймовірностей – стохастичну ФВ системи.

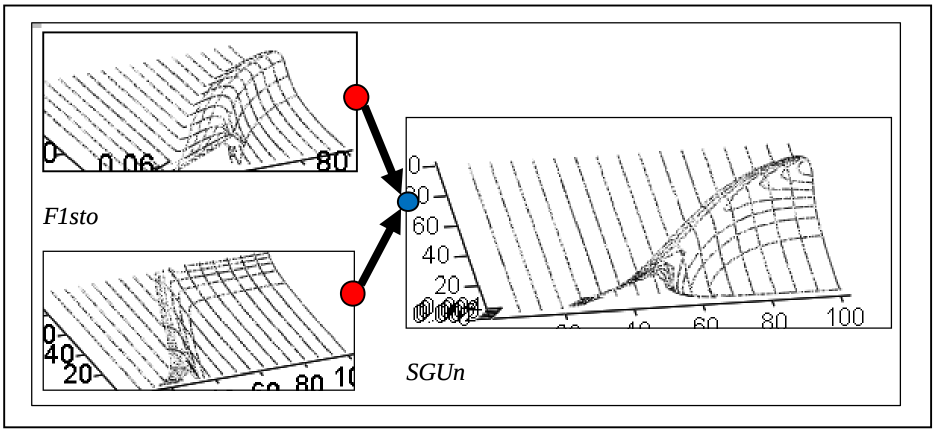


*Рис. 8. Згортка двох стохастичних функцій виробництва (приклад)*

Тривимірні графіки призначені для отримання цілісної картини для складного об’єкта.

Будуємо графіки згортки для двох вибраних значень сумарних витрат ресурсу. На рис. 9 для тестової двоелементної ВС (показаної на рис. 6) за сумарних навантажень 60 і 75 о.в. показано:

– розподіли ймовірностей виходів елементів за умови оптимального розподілу ресурсу;
– згортки цих розподілів;
– розподіли ресурсу та рівні ризиків (потрапляння у певний заданий стан (рис. 9))

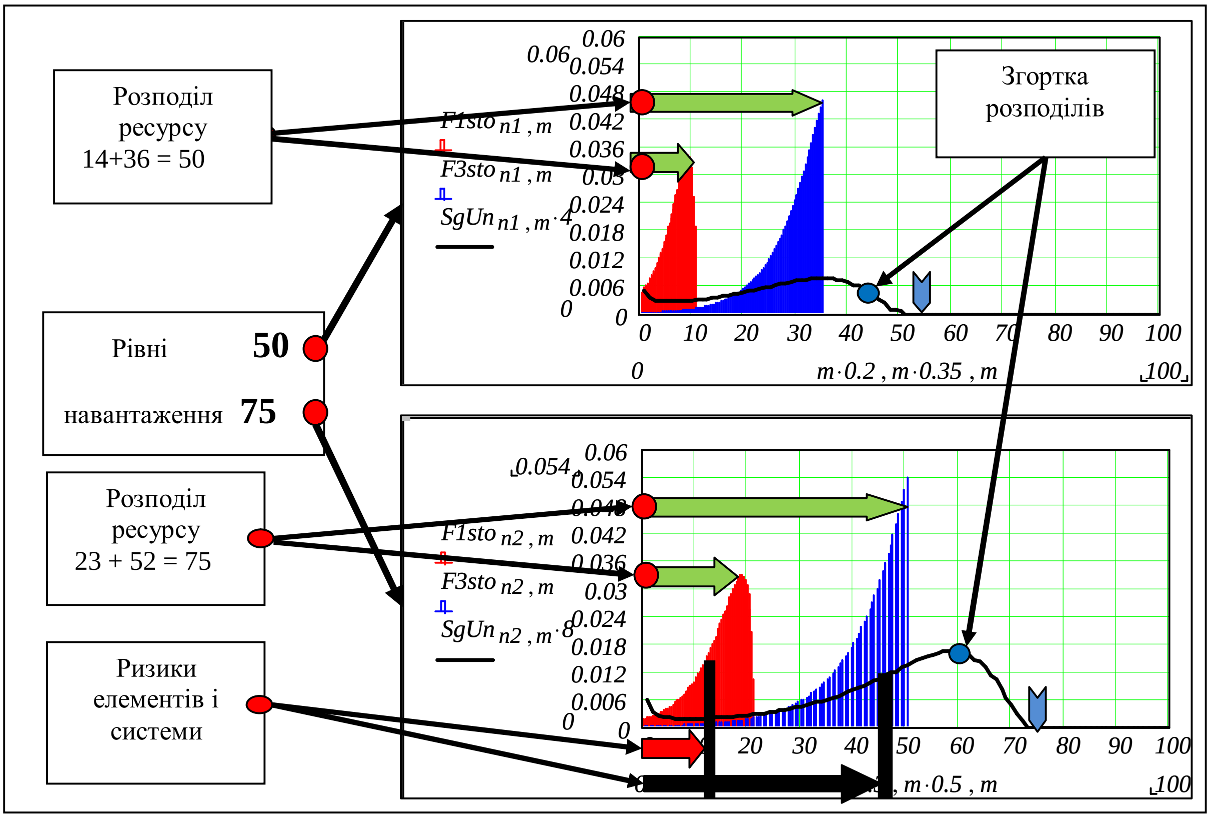


*Рис. 9. Аналіз ризиків для двох значень навантаження виробничої системи*

**Висновки**

Виконано аналіз сучасного стану моделей у методі аналізу і мінімізації ризиків – в розподілених виробничих системах і виявлено неадекватність моделей сучасним технологічним і виробничим системам. За результатами аналізу існуючих нових результатів в області аналізу стохастичних виробничих систем вибрано алгебраїчний підхід до розв'язання задач оптимального розподілу ресурсів виробництва і розвитку між підсистемами методом оптимального агрегування.

Під час переходу до стохастичних систем об'єкти – рівні виробництва, рівні потоків ресурсів не числа, а розподіли імовірностей. Ці розподіли наведено векторами кінцевої розмірності на заданій сітці можливих значень стохастичної величини і на цій основі побудовані альтернативні алгоритми згорток розподілів.

Розроблено комплекс моделей і програмних модулів для оптимізації і аналізу ефективності і ризиків виробничих систем як технологічних перетворювачів ресурсів.

Математична суть розробки – напрацювання теоретичних і прикладних результатів стосовно нових алгебраїчних об'єктів – стохастичних і розмитих ФВ.

Методологічна суть розробки – інтеграція задач прикладного системного аналізу: оптимізації та аналізу ризиків для технічних систем (розглянуто ризики технологічного характеру).

Практичне застосування – проведені дослідження і розробки – частина комплексних досліджень. Ця розробка розглядає важливий аспект – екологічну модернізацію виробництва на основі біопереробки відходів. Саме у цій галузі необхідні обґрунтовані розрахунки ефективності і ризиків.


*1. Боровська Т. М. Метод оптимального агрегування в оптимізаційних задачах: монографія / Т.М. Боровська, І.С. Колесник, В.А. Северілов. – Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2009. – 229 с.*

*2. Моделювання і оптимізація процесів розвитку виробничих систем з урахуванням використання зовнішніх ресурсів та ефектів освоєння: монографія / [Т.М. Боровська, С.П. Бадьора, В.А. Северілов, П.В. Северілов]; за заг. ред. Т.М. Боровської. – Вінниця: ВНТУ, 2009. – 255 с. 3. Saltelli A., Ratto M., Andres T., Campolongo F., Cariboni J., Gatelli D. Saisana M. and Tarantola S., 2008, Global Sensitivity Analysis. The Primer, John Wiley & Sons. 4. Saltelli A., Annoni P., 2010, How to avoid a perfunctory sensitivity analysis, Environmental Modeling and Software 25, 1508-1517. 5. Berenguel M. Adaptive control strategies for greenhouse temperature control / Berenguel M., Yebra L., Rodríguez F. // ECC '03, cambridge,* uk*, september, 2003. Duncan McFarlane. Institute For Manufacturing. Cambridge University Engineering Department. 6. Boubaker O. Variable structure estimation and control of nonlinear distributed parameter bioreactors / Boubaker O., Babary J., Ksouri M. // Systems, Man, and Cybernetics, 1998. IEEE International Conference on Volume: 4, Page(s): 3770 – 3774. 7. Igreja J. Adaptive Receding Horizon Control of Tubular Bioreactors / Igreja J., Lemos J., Silva R. // Decision and Control, 2005. European Control Conference. CDC-ECC '05. Page(s): 5168 – 5173. 8. Diedericks E. Radical Innovation and End-User Involvement: The Ambilight Case / Diedericks E., Hoonhout H. // Know Techn Pol, 2007, Volume: 20, Page(s): 31-38. 9. Fagin R., Halpern J.Y., Moses Y., and Vardi M.Y. Knowledge-based programs. DistributedComputing, 10(4): 199–225, 1997. 10. Coad A. Innovation and Firm Growth in 'Complex Technology' Sectors: A. Quantile Regression Approach. / Coad A., Rao R. // Cahiers de la Maison des Sciences Economiques No. 2006.50, Universit´e Paris 1 Panth´eon-Sorbonne, France, 2006. – P. 633–648.*