




original article | UDC 9.3.17 | doi: 10.31210/visnyk2020.01.32

GENERALIZED MATHEMATICAL MODEL OF MOVEMENT OF A COMBINED SOWING MACHINE-TRACTOR UNIT

P. M. Yaroshenko^{1*}

ORCID  [000-0003-0112-0963](https://orcid.org/000-0003-0112-0963)

V. M. Arendarenko²

ORCID  [0000-0003-0701-7983](https://orcid.org/0000-0003-0701-7983)

¹ Sumy National Agrarian University, 160, Gerasima Kondratieva str., Sumy, 40021, Ukraine

² Poltava State Agrarian Academy, 1/3, Skovorody str., Poltava, 36003, Ukraine

*Corresponding author

E-mail: pashajarosh@i.ua

The quality of technological operations depends on the character of machine movement and, above all, on how the stability of operated movement is ensured. Even at a slight external action that causes the machine with elastic wheels to deviate from the original trajectory, it is possible to return to it only through the efforts of farm machine operator to the functioning system. The deviation of a wheeled vehicle from predetermined direction of movement can be a result of the action of external forces on elastic wheels, turns of directed wheels within spacing and deformation of steering parts, as well as inaccuracies in the work of farm machine operator. In this regard, ensuring guided straight movement of serial models of 30 kN class wheeled tractors is of great importance. Increasing the operating speeds of power-intensive tractors requires considerable effort and energy of farm machine operator to drive it. Thus, increasing the stability of combined sowing units' movement is an important scientific-applied task. The main aims of this work are to develop and improve theoretically generalized mathematical movement model of the sowing combined machine-tractor unit in the technological sowing process on the basis of 30 kN tillage tractor with a frame structure, as well as to analyze the influence of the dynamics of combined sowing technology components in rear tractor seeder while conducting technological process. To develop a mathematical model of a combined sowing unit movement, we will present it in the form of a three-element model and it will be used to calculate the second-order Lagrange equation. In making the mathematical model, six assumptions were adopted, which made it possible to simplify the solution of the problem, as well as to reject the factors that complicated the development of the mathematical model and practically do not affect the course of calculations. As a result of the work, it has been found that studying the stability of the unit movement can be performed on the basis of a three-mass model, which has linear characteristics of external resistances, without taking into account the slipping of propellers on the support surface. On the basis of the conducted theoretical researches it has been established that the obtained mathematical model enables to determine the limits of stability of the combined unit movement during the sowing process.

Keywords: machine-tractor unit, mathematical model, combined sowing unit, stability and controllability of movement, generalized coordinates.

УЗАГАЛЬНЕНА МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ РУХУ КОМБІНОВАНОГО ПОСІВНОГО МАШИННО-ТРАКТОРНОГО АГРЕГАТУ**П. М. Ярошенко¹, В. М. Арендаренко²,**¹ Сумський національний аграрний університет, м. Суми, Україна² Полтавська державна аграрна академія, м. Полтава, Україна

Якість технологічних операцій залежить від характеру руху агрегату і, насамперед, від того, як забезпечується стійкість керованого руху. Навіть при незначній зовнішній дії, яка спричинила відхилення машини з еластичними колесами від початкової траєкторії, повернення до неї можливе тільки в результаті докладання зусиль механізатором до системи керування. Відхилення колісної машини від заданого напрямку руху може бути наслідком дії зовнішніх сил на еластичні колеса, поворотів керованих коліс у межах зазору і деформації деталей рульового керування, а також неточностями роботи механізатора. Через це актуального значення набуває забезпечення керованого прямолінійного руху серійними моделями колісних тракторів класу 30 кН. Підвищення робочих швидкостей руху енергонасичених тракторів потребує від механізатора значних зусиль і витрат енергії на керування. Отже, підвищення стійкості руху комбінованих посівних агрегатів є важливим науково-прикладним завданням. Метою роботи є розробка теоретичної узагальненої математичної моделі руху комбінованого посівного машинно-тракторного агрегату на базі орно-просапного трактора в технологічному процесі сівби. Основними завданнями цієї роботи є проведення теоретичних досліджень і удосконалення математичної моделі стійкості руху посівного комбінованого агрегату на базі орно-просапного трактора класу 30 кН з рамною конструкцією остова, а також проаналізувати вплив динаміки складових частин комбінованого посівного агрегату при виконанні технологічного процесу з навішеними спереду культиватором та позаду трактора сівалкою. Для розробки математичної моделі руху комбінованого посівного агрегату представимо його як трьохелементну модель і будемо використовувати для розрахунку рівняння Лагранжа другого роду. При складанні математичної моделі були прийняті шість допущень, що дали змогу спростити розв'язання поставленої задачі, а також відкинути фактори, які ускладнюють розробку математичної моделі та на хід розрахунків практично не впливають. У результаті проведеної роботи було з'ясовано, що дослідження стійкості руху агрегату можна виконати на основі трьохмасової моделі, яка має лінійні характеристики зовнішніх опорів, без урахування буксування рушіїв по опорній поверхні. На основі проведених теоретичних досліджень встановлено, що отримана математична модель дає можливість визначати межі стійкості руху комбінованого агрегату при проведенні технологічного процесу сівби.

Ключові слова: машинно-тракторний агрегат, математична модель, комбінований посівний агрегат, стійкість та керованість руху, узагальнені координати.

ОБОБЩЕННАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ КОМБИНИРОВАННОГО ПОСЕВНОГО МАШИННО-ТРАКТОРНОГО АГРЕГАТА**П. Н. Ярошенко¹, В. Н. Арендаренко²,**¹ Сумский национальный аграрный университет, г. Сумы, Украина² Полтавская государственная аграрная академия, г. Полтава, Украина

Качество технологических операций зависит от характера движения агрегата и, в первую очередь, от того, как обеспечивается устойчивость управляемого движения. Даже при незначительном внешнем воздействии, которое вызывало отклонение машины с эластичными колесами от начальной траектории, возвращение к ней возможно только в результате приложения усилий механизатором к системе управления. В этой связи, актуальное значение приобретает обеспечение управляемого прямолинейного движения серийными моделями колесных тракторов класса 30 кН. Целью работы является разработка теоретической обобщенной математической модели движения комбинированного посевного машинно-тракторного агрегата на базе пахотно-пропашного трактора в технологическом процессе посева. Основными заданиями данной работы являются проведение теоретических исследований и усовершенствование математической модели устойчивости движения по-

севного комбінированного агрегата на базе пахотно-пропашного трактора класу 30 кН з рамної конструкцією остова, а також проаналізувати вплив динаміки складових комбінированного посівного агрегата при виконанні технологічного процесу з навішеними спереди культиватором і ззаду трактора сеялкою. Для розробки математичної моделі руху комбінированного посівного агрегата представимо його в формі трьохелементної моделі і будемо використовувати для розрахунку рівняння Лагранжа другого роду. При складанні математичної моделі були прийняті шість допущень, які дозволили спростити рішення поставленої задачі. На основі проведених теоретичних досліджень встановлено, що отримана математична модель дає можливість визначати межі стійкості руху комбінированного агрегата при виконанні технологічного процесу посіва.

Ключевые слова: машинно-тракторний агрегат, математична модель, комбінирований посівний агрегат, стійкість і управляємість руху, обобщенные координаты.

Вступ

Машинно-тракторний агрегат (МТА) як механічна система є з'єднанням однієї або декількох сільськогосподарських машин, передавального механізму (зчипки, гідроака) і енергетичної частини (трактора). У цій роботі як енергетичну частину машинно-тракторного агрегату розглядаємо колісний орно-просапний сільськогосподарський трактор, що має озов (основу) у вигляді жорсткої рами з поперечними лонжеронами. На цій рамі змонтовані всі основні вузли трактора, зокрема й навісні системи (передня й задня).

При дослідженні стійкості та керованості руху різні за конструкціями та своїми функціональними призначеннями сільськогосподарські машинно-тракторні агрегати можна представити з'єднаними елементарними кінематичними ланками, що допускають можливість горизонтальних переміщень одна відносно іншої. Науковці (Авдєєв В. М., Антощенков Р. В., Артёмов М. П., Гячев Л. В., Лебедев А. Т., Рославцев А. В. та інші) [1–6, 18–20], що проводили дослідження щодо стійкості руху сільськогосподарських МТА, використовували, як правило, багатомасові моделі з багатьма ступенями вільності.

Метою роботи є розробка теоретичної узагальненої математичної моделі руху комбінованого посівного машинно-тракторного агрегату на базі орнопросапного трактора в технологічному процесі сівби.

Основними завданнями цієї роботи є проведення теоретичних досліджень і удосконалення математичної моделі стійкості руху посівного комбінованого агрегату на базі орнопросапного трактора класу 30 кН з рамною конструкцією остова, а також проаналізувати вплив динаміки складових частин комбінованого посівного агрегату при виконанні технологічного процесу з навішеними спереду культиватором та позаду трактора сівалкою.

Матеріали і методи досліджень

Для оцінки стійкості руху використовувалися моделі з кутами повороту агрегатів один щодо одного та до прийнятих осей узагальнених координат, або моделі зі змінними координатами руху агрегату [7].

У зазначених вище дослідженнях проводився аналіз руху сільськогосподарських агрегатів, динамічні моделі яких подавалися як двох, трьох, чотирьох і п'яти елементні моделі.

Для розробки математичної моделі руху комбінованого посівного агрегату представимо його як трьохелементну модель і будемо використовувати для розрахунку рівняння Лагранжа другого роду [8]:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i - \frac{\partial \Pi}{\partial q_i}, \quad (1)$$

де T – кінетична енергія системи; q_i – узагальнена координата; \dot{q}_i – узагальнена швидкість; Q_i – узагальнена сила; Π – потенційна енергія системи.

При складанні математичної моделі були прийняті допущення, описані в роботах Авдєєва В. М., Антощенкова Р. В., Артёмова М. П. та ін. [1, 3, 5–9].

Для зручності в розробці математичної моделі введемо позначення:

m_1 – маса сівалки;

m_2 – маса трактора;

m_3 – маса культиватора;

$m_1 + m_2 + m_3 = m$ – маса посівного комбінованого агрегату;

J_1 – момент інерції сівалки;

J_2 – момент інерції трактора;

J_3 – момент інерції культиватора;

$W_{лк}$ і $W_{пк}$ – сила опору коченню лівого і правого опорних коліс культиватора відповідно;

$W_{пл}$ і $W_{пр}$ – сила опору коченню лівого і правого передніх напрямних коліс трактора відповідно;

$W_{зл}$ і $W_{зп}$ – сила опору коченню лівого і правого задніх ведучих коліс трактора відповідно;

$W_{пс}$ і $W_{лс}$ – сила опору коченню лівого і правого опорно-приводних коліс сівалки відповідно;

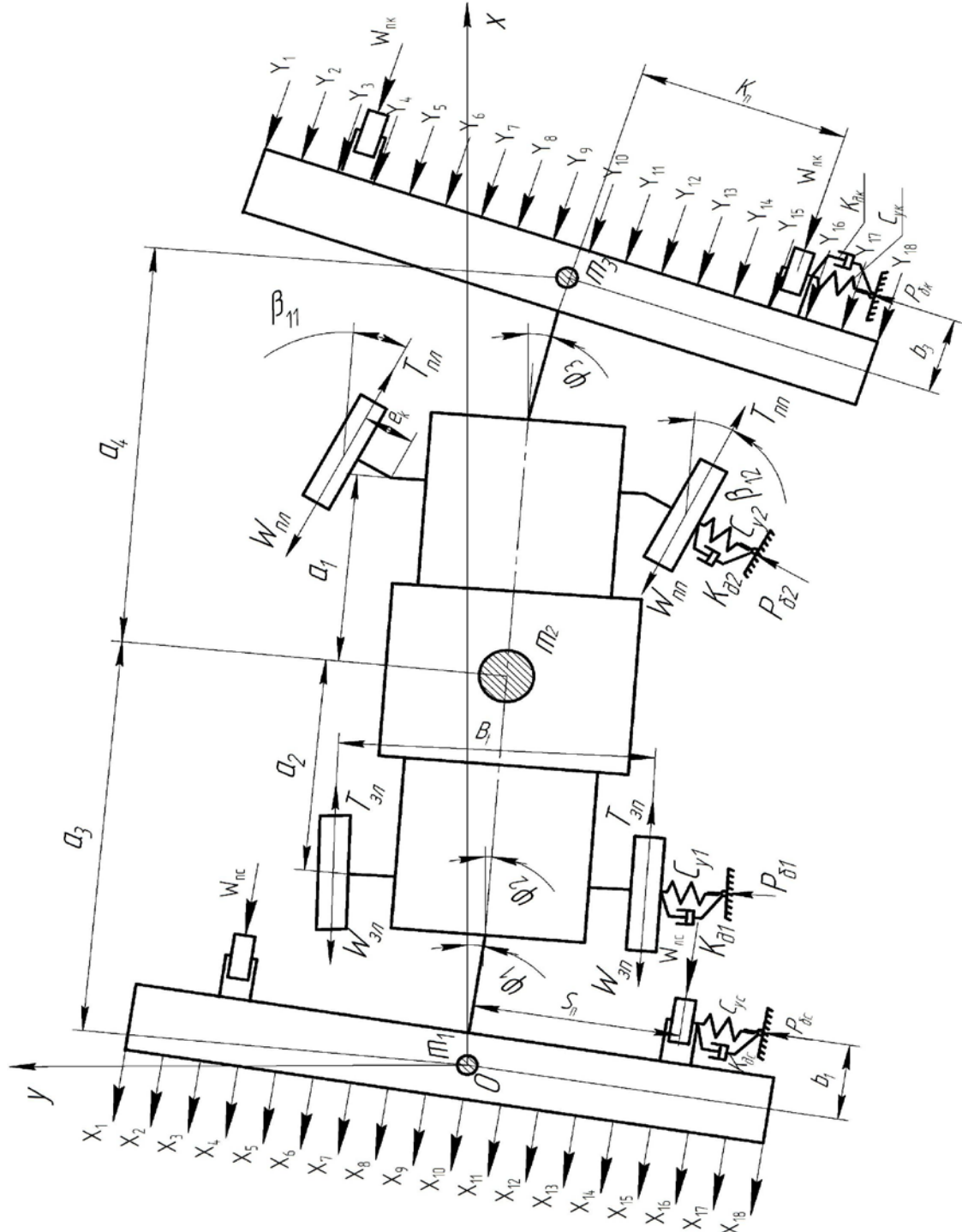


Рис. 1. Динамічна модель комбінованого посівного агрегату

$T_{пл}$ і $T_{пп}$ – сила тяги лівого і правого передніх коліс трактора відповідно;
 $T_{зл}$ і $T_{зп}$ – сила тяги лівого і правого задніх коліс трактора відповідно;
 $C_{ук}$ і $C_{ус}$ – коефіцієнти бічної жорсткості шин культиватора і сівалки відповідно;
 C_{y1} і C_{y2} – коефіцієнти бічної жорсткості шин задніх і передніх коліс трактора відповідно;
 $K_{ок}$, $K_{ос}$ – коефіцієнти демпфування шин культиватора й сівалки відповідно;
 $K_{ол}$, $K_{ол}$ – коефіцієнти демпфування шин задніх і передніх коліс трактора відповідно;
 $P_{ок}$ і $P_{ос}$ – зусилля бічному вводу коліс культиватора й сівалки відповідно;
 $P_{ол}$ і $P_{ол}$ – зусилля бічному вводу задніх і передніх коліс трактора відповідно;
 $Y_1 \dots Y_{18}$ – проекція сил опору секцій культиватора на вісь X ;
 $X_1 \dots X_{18}$ – проекція сил опору секцій сівалки на вісь X ;
 C_{12} – жорсткість зчипки між трактором і сівалкою при обертальному русі;
 C_{23} – жорсткість зчипки між трактором і культиватором при обертальному русі;
 $V_t, e_k, b_c, b_k, b_1, b_3, S_0, K_0, a_1, a_2, a_3, a_4$ – геометричні розміри агрегату.

Як узагальнені координати системи прийняті: лінійні координати центру мас сівалки $q_1 = x$ і $q_2 = y$; кут повороту сівалки φ_1 ; кут повороту рами трактора φ_2 ; кут повороту культиватора φ_3 .

Кінетична енергія системи (рис. 1) складається з кінетичної енергії поступального руху центру мас сівалки, кінетичної енергії обертального руху центру мас сівалки, кінетичних енергій поступального та обертального руху центру мас трактора і центру мас культиватора:

$$T = T_{1n_x} + T_{1n_y} + T_{1об} + T_{2_x} + T_{2_y} + T_{2об} + T_{3_x} + T_{3_y} + T_{3об}, \quad (2)$$

де T_{1n} і $T_{1об}$ – кінетичні енергії поступального та обертального руху сівалки;

$$T_{1_x} = \frac{m_1(\dot{x})^2}{2}, T_{1_y} = \frac{m_1(\dot{y})^2}{2} \text{ – кінетичні енергії поступального руху сівалки вздовж осей } OX \text{ та } OY \text{ відповідно;}$$

$$T_{2_x} = \frac{m_2(\dot{x})^2}{2}, T_{2_y} = \frac{m_2(\dot{y})^2}{2} \text{ – кінетичні енергії поступального руху трактора вздовж осей } OX \text{ та } OY \text{ відповідно;}$$

$$T_{3_x} = \frac{m_3(\dot{x})^2}{2}, T_{3_y} = \frac{m_3(\dot{y})^2}{2} \text{ – кінетичні енергії поступального руху культиватора вздовж осей } OX \text{ та } OY \text{ відповідно;}$$

$$T_{1об} = \frac{J_1(\dot{\varphi}_1)^2}{2}, T_{2об} = \frac{J_2(\dot{\varphi}_2)^2}{2}, T_{3об} = \frac{J_3(\dot{\varphi}_3)^2}{2} \text{ – кінетичні енергії обертального руху сівалки, трактора й культиватора відповідно.}$$

Для опису динамічних зв'язків між елементами агрегату та між агрегатом і ґрунтом, будемо представляти їх як пружні зв'язки. Виразимо лінійні переміщення центрів мас трактора й культиватора через переміщення центру мас сівалки:

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + a_1 \sin \varphi_1 + a_2 \sin \varphi_2, \\ y_2 &= y_1 + a_1 \cos \varphi_1 + a_2 \cos \varphi_2, \\ x_3 &= x_2 + a_3 \sin \varphi_2 + a_4 \sin \varphi_3, \\ y_3 &= y_2 + a_3 \cos \varphi_2 + a_4 \cos \varphi_3, \end{aligned} \quad (3)$$

де φ_1 – кут між центральною віссю сівалки та віссю OX ; φ_2 – кут між центральною віссю рами трактора та віссю OX ; φ_3 – кут між центральною віссю культиватора та віссю OX ; β – кут повороту керуючих коліс.

Після деяких перетворень отримаємо вираз кінетичної енергії комбінованого посівного машинно-тракторного агрегату загалом:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m_1 ((\dot{x})^2 + (\dot{y})^2) + \frac{1}{2} J_1 (\dot{\varphi}_1)^2 + \frac{1}{2} m_2 ((\dot{x} + a_1 \cos \varphi_1 \dot{\varphi}_1 + a_2 \cos \varphi_2 \dot{\varphi}_2)^2 + (\dot{y} - \\ &- a_1 \sin \varphi_1 \dot{\varphi}_1 - a_2 \sin \varphi_2 \dot{\varphi}_2)^2) + \frac{1}{2} J_2 (\dot{\varphi}_2)^2 + \frac{1}{2} m_3 ((\dot{x} + a_1 \cos \varphi_1 \dot{\varphi}_1 + a_2 \cos \varphi_2 \dot{\varphi}_2 + \\ &+ a_3 \cos \varphi_2 \dot{\varphi}_2 + a_4 \cos \varphi_3 \dot{\varphi}_3)^2 + (\dot{y} - a_1 \sin \varphi_1 \dot{\varphi}_1 - a_2 \sin \varphi_2 \dot{\varphi}_2 - a_3 \sin \varphi_3 \dot{\varphi}_3)^2) + \frac{1}{2} J_3 (\dot{\varphi}_3)^2. \end{aligned} \quad (4)$$

Підставивши значення кінетичних енергій (4) у рівняння (1), запишемо рівняння руху МТА таким чином:

$$\begin{aligned}
 & m_1 \ddot{x} + \frac{1}{2} m_2 (2\ddot{x} - 2a_1 \sin \varphi_1 (\dot{\varphi}_1)^2 + 2a_1 \cos \varphi_1 \ddot{\varphi}_1 - 2a_2 \sin \varphi_2 (\dot{\varphi}_2)^2 + 2a_2 \cos \varphi_2 \ddot{\varphi}_2) + \frac{1}{2} m_3 (2\ddot{x} - \\
 & - 2a_1 \sin \varphi_1 (\dot{\varphi}_1)^2 + 2a_1 \cos \varphi_1 \ddot{\varphi}_1 - 2a_2 \sin \varphi_2 (\dot{\varphi}_2)^2 + 2a_2 \cos \varphi_2 \ddot{\varphi}_2 - 2a_3 \sin \varphi_3 (\dot{\varphi}_3)^2 + 2a_3 \cos \varphi_3 \ddot{\varphi}_3) + \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x - \frac{\partial \Pi}{\partial x}; \\
 & m_1 \ddot{y} + \frac{1}{2} m_2 (2\ddot{y} - 2a_1 \cos \varphi_1 (\dot{\varphi}_1)^2 - 2a_1 \sin \varphi_1 \ddot{\varphi}_1 - 2a_2 \cos \varphi_2 (\dot{\varphi}_2)^2 - 2a_2 \sin \varphi_2 \ddot{\varphi}_2) + \frac{1}{2} m_3 (2\ddot{y} - \\
 & - 2a_1 \cos \varphi_1 (\dot{\varphi}_1)^2 - 2a_1 \sin \varphi_1 \ddot{\varphi}_1 - 2a_2 \cos \varphi_2 (\dot{\varphi}_2)^2 - 2a_2 \sin \varphi_2 \ddot{\varphi}_2 - 2a_3 \cos \varphi_3 (\dot{\varphi}_3)^2 - 2a_3 \sin \varphi_3 \ddot{\varphi}_3) + \frac{\partial T}{\partial y} = Q_y - \frac{\partial \Pi}{\partial y}; \\
 & J_1 \ddot{\varphi}_1 + \frac{1}{2} m_2 (2\ddot{x} - a_1 \sin \varphi_1 (\dot{\varphi}_1)^2 + a_1 \cos \varphi_1 \ddot{\varphi}_1 - a_2 \sin \varphi_2 + a_2 \cos \varphi_2 \ddot{\varphi}_2) a_1 \cos \varphi_1 - 2(\dot{x} + a_1 \times \\
 & \times \cos \varphi_1 \dot{\varphi}_1 + a_2 \cos \varphi_2 \dot{\varphi}_2) a_1 \sin \varphi_1 \dot{\varphi}_1 - 2(\dot{y} - a_1 \cos \varphi_1 (\dot{\varphi}_1)^2 - a_1 \sin \varphi_1 \ddot{\varphi}_1 - a_2 \cos \varphi_2 (\dot{\varphi}_2)^2 - \\
 & - a_2 \sin \varphi_2 \ddot{\varphi}_2) a_1 \sin \varphi_1 - 2(\dot{y} - a_1 \sin \varphi_1 \dot{\varphi}_1 - a_2 \sin \varphi_2 \dot{\varphi}_2) a_1 \cos \varphi_1 \dot{\varphi}_1 + \frac{1}{2} m_3 (2(\ddot{x} - a_1 \sin \varphi_1 \times \\
 & \times (\dot{\varphi}_1)^2 + a_1 \cos \varphi_1 \ddot{\varphi}_1 - a_2 \sin \varphi_2 (\dot{\varphi}_2)^2 + a_2 \cos \varphi_2 \ddot{\varphi}_2 - a_3 \sin \varphi_3 (\dot{\varphi}_3)^2 + a_3 \cos \varphi_3 \ddot{\varphi}_3 - a_4 \sin \varphi_3 \times \\
 & \times (\dot{\varphi}_3)^2 + a_4 \cos \varphi_3 \ddot{\varphi}_3) a_1 \cos \varphi_1 - 2(\dot{x} + a_1 \cos \varphi_1 \dot{\varphi}_1 + a_2 \cos \varphi_2 \dot{\varphi}_2 + a_3 \cos \varphi_3 \dot{\varphi}_3) \times \\
 & \times a_1 \sin \varphi_1 \dot{\varphi}_1 - 2(\dot{y} - a_1 \cos \varphi_1 (\dot{\varphi}_1)^2 - a_1 \sin \varphi_1 \ddot{\varphi}_1 - a_2 \cos \varphi_2 (\dot{\varphi}_2)^2 - a_2 \sin \varphi_2 \ddot{\varphi}_2 - a_3 \cos \varphi_3 \times \\
 & \times (\dot{\varphi}_3)^2 - a_3 \sin \varphi_3 \ddot{\varphi}_3 - a_2 \cos \varphi_3 (\dot{\varphi}_3)^2 - a_2 \sin \varphi_3 \ddot{\varphi}_3) a_1 \sin \varphi_1 - 2(\dot{y} - a_1 \sin \varphi_1 \dot{\varphi}_1 - a_2 \sin \varphi_2 \dot{\varphi}_2 - \\
 & - a_3 \sin \varphi_3 \dot{\varphi}_3) a_1 \cos \varphi_1 \dot{\varphi}_1) + \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = Q_{\varphi_1} - C_{12}(\varphi_2 - \varphi_1); \\
 & \frac{1}{2} m_2 (2(\ddot{x} - a_1 \sin \varphi_1 (\dot{\varphi}_1)^2 + a_1 \cos \varphi_1 \ddot{\varphi}_1 - a_2 \sin \varphi_2 (\dot{\varphi}_2)^2 + a_2 \cos \varphi_2 \ddot{\varphi}_2) a_2 \cos \varphi_2 - 2(\dot{x} + a_1 \times \\
 & \times \cos \varphi_1 \dot{\varphi}_1 + a_2 \cos \varphi_2 \dot{\varphi}_2) a_2 \sin \varphi_2 \dot{\varphi}_2 - 2(\dot{y} - a_1 \cos \varphi_1 (\dot{\varphi}_1)^2 - a_1 \sin \varphi_1 \ddot{\varphi}_1 - a_2 \cos \varphi_2 (\dot{\varphi}_2)^2 - \\
 & - a_2 \sin \varphi_2 \ddot{\varphi}_2) a_2 \sin \varphi_2 - 2(\dot{y} - a_1 \sin \varphi_1 \dot{\varphi}_1 - a_2 \sin \varphi_2 \dot{\varphi}_2) a_2 \cos \varphi_2 \dot{\varphi}_2) + J_2 \ddot{\varphi}_2 + \frac{1}{2} m_3 (2(\ddot{x} - \\
 & - a_1 \sin \varphi_1 (\dot{\varphi}_1)^2 + a_1 \cos \varphi_1 \ddot{\varphi}_1 - a_2 \sin \varphi_2 (\dot{\varphi}_2)^2 + a_2 \cos \varphi_2 \ddot{\varphi}_2 - a_3 \sin \varphi_3 (\dot{\varphi}_3)^2 + a_3 \cos \varphi_3 \times \\
 & \times \ddot{\varphi}_3 - a_4 \sin \varphi_3 (\dot{\varphi}_3)^2 + a_4 \cos \varphi_3 \ddot{\varphi}_3) (a_2 \cos \varphi_2 + a_3 \cos \varphi_3) + 2(\dot{x} + a_1 \cos \varphi_1 \dot{\varphi}_1 + a_2 \cos \varphi_2 \times \\
 & \times \dot{\varphi}_2 + a_3 \cos \varphi_3 \dot{\varphi}_3) (-a_2 \sin \varphi_2 \dot{\varphi}_2 - a_3 \sin \varphi_3 \dot{\varphi}_3) + 2(\dot{y} - a_1 \cos \varphi_1 (\dot{\varphi}_1)^2 - a_1 \times \\
 & \times \sin \varphi_1 \ddot{\varphi}_1 - a_2 \cos \varphi_2 (\dot{\varphi}_2)^2 - a_2 \sin \varphi_2 \ddot{\varphi}_2 - a_3 \cos \varphi_3 (\dot{\varphi}_3)^2 - a_3 \sin \varphi_3 \ddot{\varphi}_3 - a_2 \cos \varphi_3 (\dot{\varphi}_3)^2 - \\
 & - a_2 \sin \varphi_3 \ddot{\varphi}_3) (-a_2 \sin \varphi_2 - a_3 \sin \varphi_3) + 2(\dot{y} - a_1 \sin \varphi_1 \dot{\varphi}_1 - a_2 \sin \varphi_2 \dot{\varphi}_2 - a_3 \sin \varphi_3 \dot{\varphi}_3 - \\
 & - a_2 \sin \varphi_3 \dot{\varphi}_3) (-a_2 \cos \varphi_2 \dot{\varphi}_2 - a_3 \cos \varphi_3 \dot{\varphi}_3) + \frac{\partial T}{\partial \varphi_2} = Q_{\varphi_2} - C_{12}(\varphi_2 - \varphi_1); \\
 & \frac{1}{2} m_3 (2(\ddot{x} - a_1 \sin \varphi_1 (\dot{\varphi}_1)^2 + a_1 \cos \varphi_1 \ddot{\varphi}_1 - a_2 \sin \varphi_2 (\dot{\varphi}_2)^2 + a_2 \cos \varphi_2 \ddot{\varphi}_2 - a_3 \sin \varphi_3 (\dot{\varphi}_3)^2 + a_3 \times \\
 & \times \cos \varphi_3 \ddot{\varphi}_3 - a_4 \sin \varphi_3 (\dot{\varphi}_3)^2 + a_4 \cos \varphi_3 \ddot{\varphi}_3) a_4 \cos \varphi_3 - 2(\dot{x} + a_1 \cos \varphi_1 \dot{\varphi}_1 + a_2 \cos \varphi_2 \dot{\varphi}_2 + a_3 \times \\
 & \times \cos \varphi_3 \dot{\varphi}_3) a_4 \sin \varphi_3 \dot{\varphi}_3 - 2(\dot{y} - a_1 \cos \varphi_1 (\dot{\varphi}_1)^2 - a_1 \sin \varphi_1 \ddot{\varphi}_1 - a_2 \cos \varphi_2 (\dot{\varphi}_2)^2 - \\
 & - a_2 \sin \varphi_2 \ddot{\varphi}_2 - a_3 \cos \varphi_3 (\dot{\varphi}_3)^2 - a_3 \sin \varphi_3 \ddot{\varphi}_3 - a_2 \cos \varphi_3 (\dot{\varphi}_3)^2 - a_2 \sin \varphi_3 \ddot{\varphi}_3) a_2 \sin \varphi_3 - 2(\dot{y} - \\
 & - a_1 \sin \varphi_1 \dot{\varphi}_1 - a_2 \sin \varphi_2 \dot{\varphi}_2 - a_3 \sin \varphi_3 \dot{\varphi}_3) a_2 \cos \varphi_3 \dot{\varphi}_3) + J_3 \ddot{\varphi}_3 = Q_{\varphi_3} - C_{23}(\varphi_3 - \varphi_2),
 \end{aligned} \tag{5}$$

$$\text{де } \frac{\partial T}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0;$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} &= \frac{1}{2} m_2 (-2(\dot{x} + a_1 \cos \varphi_1 \dot{\varphi}_1 + a_2 \cos \varphi_2 \dot{\varphi}_2 a_1) \sin \varphi_1 \dot{\varphi}_1 - 2(\dot{y} - a_1 \sin \varphi_1 \dot{\varphi}_1 - a_2 \sin \varphi_2 \dot{\varphi}_2) \times \\ &\times a_1 \cos \varphi_1 \dot{\varphi}_1) + \frac{1}{2} m_3 (-2(\dot{x} + a_1 \cos \varphi_1 \dot{\varphi}_1 + a_2 \cos \varphi_2 \dot{\varphi}_2 + a_3 \cos \varphi_2 \dot{\varphi}_2 + a_4 \cos \varphi_3 \dot{\varphi}_3) \times \\ &\times a_1 \sin \varphi_1 \dot{\varphi}_1 - 2(\dot{y} - a_1 \sin \varphi_1 \dot{\varphi}_1 - a_2 \sin \varphi_2 \dot{\varphi}_2 - a_3 \sin \varphi_2 \dot{\varphi}_2 - a_2 \sin \varphi_3 \dot{\varphi}_3) a_1 \cos \varphi_1 \dot{\varphi}_1); \\ \frac{\partial T}{\partial \varphi_2} &= \frac{1}{2} m_2 (-2(\dot{x} + a_1 \cos \varphi_1 \dot{\varphi}_1 + a_2 \cos \varphi_2 \dot{\varphi}_2 a_1) \sin \varphi_1 \dot{\varphi}_1 - 2(\dot{y} - a_1 \sin \varphi_1 \dot{\varphi}_1 - a_2 \sin \varphi_2 \dot{\varphi}_2) \times \\ &\times a_2 \cos \varphi_2 \dot{\varphi}_2 + \frac{1}{2} m_3 (2(\dot{x} + a_1 \cos \varphi_1 \dot{\varphi}_1 + a_2 \cos \varphi_2 \dot{\varphi}_2 + a_3 \cos \varphi_2 \dot{\varphi}_2 + a_4 \cos \varphi_3 \dot{\varphi}_3) (-a_2 \sin \varphi_2 \dot{\varphi}_2 - \\ &- a_3 \sin \varphi_2 \dot{\varphi}_2) + 2(\dot{y} - a_1 \sin \varphi_1 \dot{\varphi}_1 - a_2 \sin \varphi_2 \dot{\varphi}_2 - a_3 \sin \varphi_2 \dot{\varphi}_2 - a_2 \sin \varphi_3 \dot{\varphi}_3 - a_2 \cos \varphi_2 \dot{\varphi}_2 - a_3 \cos \varphi_2 \dot{\varphi}_2)); \\ \frac{\partial T}{\partial \varphi_3} &= \frac{1}{2} m_3 (-2(\dot{x} + a_1 \cos \varphi_1 \dot{\varphi}_1 + a_2 \cos \varphi_2 \dot{\varphi}_2 + a_3 \cos \varphi_2 \dot{\varphi}_2 + a_4 \cos \varphi_3 \dot{\varphi}_3) a_4 \sin \varphi_3 \dot{\varphi}_3 - \\ &- 2(\dot{y} - a_1 \sin \varphi_1 \dot{\varphi}_1 - a_2 \sin \varphi_2 \dot{\varphi}_2 - a_3 \sin \varphi_2 \dot{\varphi}_2 - a_2 \sin \varphi_3 \dot{\varphi}_3) a_2 \cos \varphi_3 \dot{\varphi}_3). \end{aligned}$$

Для визначення узагальнених сил, які відповідають узагальненим координатам, будемо використовувати інші математичні залежності. Радіус-вектор кожного елемента системи буде відповідною функцією:

$$\bar{r}_i = \bar{r}_i(x, y, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3), \quad \bar{i} = 1, 2, 3, 4, 5. \quad (6)$$

Тоді можливе переміщення i -го елемента системи буде визначатись як диференціал складної функції декількох змінних:

$$\delta \bar{r}_i = \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial \varphi_1} \delta \varphi_1 + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial \varphi_2} \delta \varphi_2 + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial \varphi_3} \delta \varphi_3, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5. \quad (7)$$

Зважаючи на це, елементарні роботи всіх активних сил, прикладених до точок механічної системи, на можливому її переміщенні в цьому випадку будуть визначатись виразом:

$$\sum \delta A_i = \sum_{i=1}^5 \bar{F}_i \delta \bar{r}_i, \quad (8)$$

де \bar{F}_i , $i = 1, 2 \dots 5$ – зовнішні сили, що діють на систему ($T_{пл}$, $T_{пп}$, $T_{зл}$, $T_{зп}$, $W_{лк}$, $W_{пк}$, $W_{пл}$, $W_{пп}$, $W_{зл}$, $W_{зп}$, $W_{пс}$, $W_{лс}$, $X_1 \dots X_{18}$, $Y_1 \dots Y_{18}$).

Тоді:

$$Q_i = \sum_{i=1}^5 \bar{F}_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_i}. \quad (9)$$

$$\begin{aligned} Q_x &= [-(X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7 + X_8 + X_9 + X_{10} + X_{11} + X_{12} + \\ &X_{13} + X_{14} + X_{15} + X_{16} + X_{17} + X_{18} + W_{лс} + W_{пс}) \cos \varphi_1 - P_{бс} \sin \varphi_1 + (T_{лз} + T_{пз} + \\ &+ W_{лз} + W_{пз}) \cos \varphi_2 + (T_{лм} - W_{лм}) \cos(\varphi_2 + \beta) + (T_{лн} - W_{лн}) \cos(\varphi_2 + \beta) - P_{б1} \sin \varphi_2 - \\ &- P_{б2} \sin(\varphi_2 + \beta) - (Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 + Y_5 + Y_6 + Y_7 + Y_8 + Y_9 + Y_{10} + Y_{11} + Y_{12} + \\ &+ Y_{13} + Y_{14} + Y_{15} + Y_{16} + Y_{17} + Y_{18} + W_{лк} + W_{пк}) \cos \varphi_3 - P_{бк} \sin \varphi_3] x; \end{aligned} \quad (10)$$

$$Q_y = \left[- (X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7 + X_8 + X_9 + X_{10} + X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} + X_{15} + X_{16} + X_{17} + X_{18} + W_{\text{лс}} + W_{\text{нс}}) \sin \varphi_1 + P_{\delta c} \cos \varphi_1 + (T_{\text{лз}} + T_{\text{нз}} - W_{\text{лз}} - W_{\text{нз}}) \sin \varphi_2 + (T_{\text{лн}} - W_{\text{лн}}) \sin(\varphi_2 + \beta) + (T_{\text{нн}} - W_{\text{нн}}) \sin(\varphi_2 + \beta) + P_{\delta 1} \cos \varphi_2 - P_{\delta 2} \cos(\varphi_2 + \beta) - (Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 + Y_5 + Y_6 + Y_7 + Y_8 + Y_9 + Y_{10} + Y_{11} + Y_{12} + Y_{13} + Y_{14} + Y_{15} + Y_{16} + Y_{17} + Y_{18} + W_{\text{лк}} + W_{\text{нк}}) \times \sin \varphi_3 + P_{\delta \kappa} \cos \varphi_3 \right] y; \quad (11)$$

$$Q_{\varphi_1} = \left(\frac{1}{2} X_1 b_c + \frac{4}{9} X_2 b_c + \frac{7}{18} X_3 b_c + \frac{1}{3} X_4 b_c + \frac{5}{18} X_5 b_c + \frac{2}{9} X_6 b_c + \frac{1}{6} X_7 b_c + \frac{1}{9} X_8 b_c + \frac{1}{18} X_9 b_c - \frac{4}{9} X_{18} b_c - \frac{7}{18} X_{17} b_c - \frac{1}{3} X_{16} b_c - \frac{5}{18} X_{15} b_c - \frac{2}{9} X_{14} b_c - \frac{1}{6} X_{13} b_c - \frac{1}{9} X_{12} b_c - \frac{1}{18} X_{11} b_c + (W_{\text{нс}} - W_{\text{лс}}) S_o + P_{\delta 2} b_1 \right) \varphi_1; \quad (12)$$

$$Q_{\varphi_2} = \left[\frac{1}{2} (T_{\text{лз}} - W_{\text{лз}}) B_t - \frac{1}{2} (T_{\text{нз}} - W_{\text{нз}}) B_t + (T_{\text{лн}} - W_{\text{лн}}) \left(e_\kappa + \frac{1}{2} \sqrt{4a_1^2 + B_t^2 + 4B_t e_\kappa + 4e_\kappa^2} \times \cos \left(\beta - \arctg \left(\frac{a_1^2}{\frac{1}{2} B_t - e_\kappa} \right) \right) \right) - (T_{\text{нн}} - W_{\text{нн}}) \left(e_\kappa + \frac{1}{2} \sqrt{4a_1^2 + B_t^2 + 4B_t e_\kappa + 4e_\kappa^2} \times \cos \left(\beta + \arctg \left(\frac{a_1^2}{\frac{1}{2} B_t - e_\kappa} \right) \right) \right) - \left(\frac{1}{2} \sqrt{4a_1^2 + B_t^2 + 4B_t e_\kappa + 4e_\kappa^2} C_{y1} \right) a_2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \sqrt{4a_1^2 + B_t^2 + 4B_t e_\kappa + 4e_\kappa^2} \times \varphi_2 + e_\kappa \beta \right) C_{\delta 2} \sqrt{4a_1^2 + B_t^2 + 4B_t e_\kappa + 4e_\kappa^2} \sin \left(\beta + \arctg \left(\frac{a_1^2}{\frac{1}{2} B_t - e_\kappa} \right) \right) \right] \varphi_2; \quad (13)$$

$$Q_{\varphi_3} = \left(\frac{1}{2} Y_1 b_\kappa + \frac{4}{9} Y_2 b_\kappa + \frac{7}{18} Y_3 b_\kappa + \frac{1}{3} Y_4 b_\kappa + \frac{5}{18} Y_5 b_\kappa + \frac{2}{9} Y_6 b_\kappa + \frac{1}{6} Y_7 b_\kappa + \frac{1}{9} Y_8 b_\kappa + \frac{1}{18} Y_9 b_\kappa - \frac{4}{9} Y_{18} b_\kappa - \frac{7}{18} Y_{17} b_\kappa - \frac{1}{3} Y_{16} b_\kappa - \frac{5}{18} Y_{15} b_\kappa - \frac{2}{9} Y_{14} b_\kappa - \frac{1}{6} Y_{13} b_\kappa - \frac{1}{9} Y_{12} b_\kappa - \frac{1}{18} Y_{11} b_\kappa + (W_{\text{нк}} - W_{\text{лк}}) K_o + b_3 \varphi_3 C_{y\kappa} \right) \varphi_3. \quad (14)$$

Із рівнянь (5), розв'язуючи їх відносно старших похідних ($\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{\varphi}_1, \ddot{\varphi}_2, \ddot{\varphi}_3$), отримаємо форму Коши для системи диференціальних рівнянь 2-го порядку:

$$\begin{cases} a_{11} \ddot{x} + a_{12} \ddot{y} + a_{13} \ddot{\varphi}_1 + a_{14} \ddot{\varphi}_2 + a_{15} \ddot{\varphi}_3 + f_1(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2, \dot{\varphi}_3, x, y, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \beta, t) = 0 \\ a_{21} \ddot{x} + a_{22} \ddot{y} + a_{23} \ddot{\varphi}_1 + a_{24} \ddot{\varphi}_2 + a_{25} \ddot{\varphi}_3 + f_2(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2, \dot{\varphi}_3, x, y, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \beta, t) = 0 \\ a_{31} \ddot{x} + a_{32} \ddot{y} + a_{33} \ddot{\varphi}_1 + a_{34} \ddot{\varphi}_2 + a_{35} \ddot{\varphi}_3 + f_3(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2, \dot{\varphi}_3, x, y, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \beta, t) = 0 \\ a_{41} \ddot{x} + a_{42} \ddot{y} + a_{43} \ddot{\varphi}_1 + a_{44} \ddot{\varphi}_2 + a_{45} \ddot{\varphi}_3 + f_4(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2, \dot{\varphi}_3, x, y, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \beta, t) = 0 \\ a_{51} \ddot{x} + a_{52} \ddot{y} + a_{53} \ddot{\varphi}_1 + a_{54} \ddot{\varphi}_2 + a_{55} \ddot{\varphi}_3 + f_5(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2, \dot{\varphi}_3, x, y, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \beta, t) = 0 \end{cases} \quad (15)$$

$$\text{де } a_{11} = m_1 + m_2 + m_3;$$

$$a_{12} = 0;$$

$$a_{13} = m_2 a_1 \cos \varphi_1 + m_3 a_1 \cos \varphi_1;$$

$$a_{14} = m_2 a_2 \cos \varphi_2 + \frac{1}{2} m_3 (2a_2 \cos \varphi_2 + 2a_3 \cos \varphi_2);$$

$$a_{15} = m_3 a_4 \cos \varphi_3;$$

$$a_{21} = 0;$$

$$a_{22} = m_1 + m_2 + m_3;$$

$$a_{23} = -m_2 a_1 \sin \varphi_1 - m_3 a_1 \sin \varphi_1;$$

$$a_{24} = -m_2 a_2 \sin \varphi_2 + \frac{1}{2} m_3 (-2a_2 \sin \varphi_2 - 2a_3 \sin \varphi_2);$$

$$a_{25} = -m_3 a_2 \sin \varphi_3;$$

$$a_{31} = m_2 a_1 \cos \varphi_1 + m_3 a_1 \cos \varphi_1;$$

$$a_{32} = -m_2 a_1 \sin \varphi_1 - m_3 a_1 \sin \varphi_1;$$

$$a_{33} = \frac{1}{2} m_3 (2a_1^2 \cos^2 \varphi_1 + 2a_1^2 \sin^2 \varphi_1) + J_1 + \frac{1}{2} m_2 (2a_1^2 \cos^2 \varphi_1 + 2a_1^2 \sin^2 \varphi_1);$$

$$a_{34} = \frac{1}{2} m_3 (2(a_2 \cos \varphi_2 + a_3 \cos \varphi_2) a_1 \cos \varphi_1 - 2(-a_2 \sin \varphi_2 - a_3 \sin \varphi_2) a_1 \sin \varphi_1) +$$

$$+ \frac{1}{2} m_2 (2a_2 \cos \varphi_2 a_1 \cos \varphi_1 + 2a_2 \sin \varphi_2 a_1 \sin \varphi_1);$$

$$a_{35} = \frac{1}{2} m_3 (2a_4 \cos \varphi_3 a_1 \cos \varphi_1 + 2a_2 \sin \varphi_3 a_1 \sin \varphi_1);$$

$$a_{41} = m_2 a_2 \cos \varphi_2 + \frac{1}{2} m_3 (2a_2 \cos \varphi_2 + 2a_3 \cos \varphi_2);$$

$$a_{42} = -m_2 a_2 \sin \varphi_2 + \frac{1}{2} m_3 (-2a_2 \sin \varphi_2 - 2a_3 \sin \varphi_2);$$

$$a_{43} = \frac{1}{2} m_3 (2(a_2 \cos \varphi_2 + a_3 \cos \varphi_2) a_1 \cos \varphi_1 - 2(-a_2 \sin \varphi_2 - a_3 \sin \varphi_2) a_1 \sin \varphi_1 +$$

$$+ \frac{1}{2} m_2 (2a_2 \cos \varphi_2 a_1 \cos \varphi_1 + 2a_2 \sin \varphi_2 a_1 \sin \varphi_1);$$

$$a_{44} = \frac{1}{2} m_2 (2a_2^2 \cos^2 \varphi_2 + 2a_2^2 \sin^2 \varphi_2) + J_2 + \frac{1}{2} m_3 (2(a_2 \cos \varphi_2 + a_3 \cos \varphi_2)^2 +$$

$$+ 2(-a_2 \sin \varphi_2 - a_3 \sin \varphi_2)^2);$$

$$a_{45} = \frac{1}{2} m_3 (2a_4 \cos \varphi_3 (a_2 \cos \varphi_2 + a_3 \cos \varphi_2) - 2a_2 \sin \varphi_3 (-a_2 \sin \varphi_2 - a_3 \sin \varphi_2));$$

$$a_{51} = m_3 a_4 \cos \varphi_3;$$

$$a_{52} = -m_3 a_2 \sin \varphi_3;$$

$$\begin{aligned}
 a_{53} &= \frac{1}{2} m_3 (2a_4 \cos \varphi_3 a_1 \cos \varphi_1 + 2a_2 \sin \varphi_3 a_1 \sin \varphi_1); \\
 a_{54} &= \frac{1}{2} m_3 (2a_4 \cos \varphi_3 (a_2 \cos \varphi_2 + a_3 \cos \varphi_3) - 2a_2 \sin \varphi_3 (-a_2 \sin \varphi_2 - a_3 \sin \varphi_2)); \\
 a_{55} &= J_3 + \frac{1}{2} m_3 (2a_4^2 \cos^2 \varphi_3 + 2a_2^2 \sin^2 \varphi_3); \\
 f_1 &= \frac{1}{2} m_2 (-2a_1 \sin \varphi_1 (\dot{\varphi}_1)^2 - 2a_2 \sin \varphi_2 (\dot{\varphi}_2)^2) + \frac{1}{2} m_3 (-2a_1 \sin \varphi_1 (\dot{\varphi}_1)^2 - 2a_2 \times \\
 &\times \sin \varphi_2 (\dot{\varphi}_2)^2 - 2a_3 \sin \varphi_2 (\dot{\varphi}_2)^2 - 2a_4 \sin \varphi_3 (\dot{\varphi}_3)^2) - (X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + \\
 &+ X_6 + X_7 + X_8 + X_9 + X_{10} + X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} + X_{15} + X_{16} + X_{17} + X_{18} + \\
 &+ W_{лс} + W_{нк}) \cos \varphi_1 - (b_1 \varphi_1 C_{\delta c}) \sin \varphi_1 + (T_{л3} + T_{н3} - W_{л3} - W_{н3}) \cos \varphi_2 + (T_{лн} - W_{лн}) \times \\
 &\times \cos(\varphi_2 + \beta) + (T_{лн} - W_{лн}) \cos(\varphi_2 + \beta) - \left(\frac{1}{2} \sqrt{4a_2^2 + B_t^2} \varphi_2 C_{\delta 2} \right) \sin \varphi_2 - \\
 &- \left(\frac{1}{2} \sqrt{4a_1^2 + B_t^2 - 4B_t e_\kappa + 4e_\kappa^2 \varphi_2 + e_\kappa \beta} \right) C_{\delta 2} (\sin \varphi_2 + \beta) - (Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 + Y_5 + \\
 &+ Y_6 + Y_7 + Y_8 + Y_9 + Y_{10} + Y_{11} + Y_{12} + Y_{13} + Y_{14} + Y_{15} + Y_{16} + Y_{17} + Y_{18} + W_{лк} + W_{нк}) \times \\
 &\times \cos \varphi_3 - (b_3 \varphi_3 C_{\delta \kappa}) \sin \varphi_3; \\
 f_2 &= \frac{1}{2} m_2 (-2a_1 \cos \varphi_1 (\dot{\varphi}_1)^2 - 2a_2 \cos \varphi_2 (\dot{\varphi}_2)^2) + \frac{1}{2} m_3 (-2a_1 \cos \varphi_1 (\dot{\varphi}_1)^2 - 2a_2 \times \\
 &\times \cos \varphi_2 (\dot{\varphi}_2)^2 - 2a_3 \cos \varphi_2 (\dot{\varphi}_2)^2 - 2a_4 \cos \varphi_3 (\dot{\varphi}_3)^2) - (X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + \\
 &+ X_6 + X_7 + X_8 + X_9 + X_{10} + X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} + X_{15} + X_{16} + X_{17} + \\
 &+ X_{18} + W_{лс} + W_{нк}) \sin \varphi_1 + (b_1 \varphi_1 C_{\delta c}) \cos \varphi_1 + (T_{л3} + T_{н3} - W_{л3} - W_{н3}) \sin \varphi_2 + \\
 &+ (T_{лн} - W_{лн}) \sin(\varphi_2 + \beta) + (T_{лн} + W_{лн}) \sin(\varphi_2 + \beta) + \left(\frac{1}{2} \sqrt{4a_2^2 + B_t^2} \varphi_2 C_{\delta 1} \right) \times \\
 &\times \cos \varphi_2 - \left(\frac{1}{2} \sqrt{4a_1^2 + B_t^2 - 4B_t e_\kappa + 4e_\kappa^2 \varphi_2 + e_\kappa \beta} \right) C_{\delta 2} \cos(\varphi_2 + \beta) - (Y_1 + Y_2 + \\
 &+ Y_3 + Y_4 + Y_5 + Y_6 + Y_7 + Y_8 + Y_9 + Y_{10} + Y_{11} + Y_{12} + Y_{13} + Y_{14} + Y_{15} + Y_{16} + Y_{17} + \\
 &+ Y_{18} + W_{лк} + W_{нк}) \sin \varphi_3 + (b_3 \varphi_3 C_{\delta \kappa}) \cos \varphi_3;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_3 = & b_1^2 \varphi_1 C_{\bar{\sigma}c} - \frac{1}{9} X_{12} b_c + \frac{4}{9} X_2 b_c + \frac{1}{2} X_1 b_c - \frac{1}{6} X_{13} b_c + \frac{1}{2} m_2 \left(2(-a_1 \sin \varphi_1 (\dot{\varphi}_1)^2 - \right. \\
 & \left. - a_2 \sin \varphi_2 (\dot{\varphi}_2)^2 \right) a_1 \sin \varphi_1 - 2(\dot{x} + a_1 \cos \varphi_1 \dot{\varphi}_1 + a_2 \cos \varphi_2 \dot{\varphi}_2) a_1 \sin \varphi_1 \dot{\varphi}_1 - \\
 & - 2\left(-a_1 \cos \varphi_1 (\dot{\varphi}_1)^2 - a_2 \cos \varphi_2 (\dot{\varphi}_2)^2\right) a_1 \sin \varphi_1 - 2(\dot{y} - a_1 \sin \varphi_1 \dot{\varphi}_1 - a_2 \sin \varphi_2 \dot{\varphi}_2) \times \\
 & \times a_1 \cos \varphi_1 \dot{\varphi}_1 - \frac{2}{9} X_{14} b_c - \frac{1}{2} m_2 \left(-2(\dot{x} + a_1 \cos \varphi_1 \dot{\varphi}_1 + a_2 \cos \varphi_2 \dot{\varphi}_2) a_1 \sin \varphi_1 \dot{\varphi}_1 - \right. \\
 & \left. - 2(\dot{y} - a_1 \sin \varphi_1 \dot{\varphi}_1 - a_2 \sin \varphi_2 \dot{\varphi}_2) a_1 \cos \varphi_1 \dot{\varphi}_1\right) - \frac{1}{2} m_3 \left(-2(\dot{x} + a_1 \cos \varphi_1 \dot{\varphi}_1 + \right. \\
 & \left. + a_2 \cos \varphi_2 \dot{\varphi}_2 + a_3 \cos \varphi_2 \dot{\varphi}_2 + a_4 \cos \varphi_3 \dot{\varphi}_3) a_1 \sin \varphi_1 \dot{\varphi}_1 - 2(\dot{y} - a_1 \sin \varphi_1 \dot{\varphi}_1 - \right. \\
 & \left. - a_2 \sin \varphi_2 \dot{\varphi}_2 - a_3 \sin \varphi_2 \dot{\varphi}_2 - a_2 \sin \varphi_3 \dot{\varphi}_3) a_1 \cos \varphi_1 \dot{\varphi}_1\right) + ((X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + \\
 & + X_5 + X_6 + X_7 + X_8 + X_9 + X_{10} + X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} + X_{15} + X_{16} + X_{17} + \\
 & + X_{18} + W_{\pi c} + W_{nc}) \sin \varphi_1 - (b_1 C_{\bar{\sigma}c}) \sin \varphi_1 - (b_1 \varphi_1 C_{\bar{\sigma}c}) \cos \varphi_1) x + (- (X_1 + X_2 + \\
 & + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7 + X_8 + X_9 + X_{10} + X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} + X_{15} + \\
 & + X_{16} + X_{17} + X_{18} + W_{\pi c} + W_{nc}) \cos \varphi_1 + (b_1 C_{\bar{\sigma}c}) \cos \varphi_1 - (b_1 \varphi_1 C_{\bar{\sigma}c}) \sin \varphi_1) y + \\
 & + (b_1 C_{\bar{\sigma}c}) \varphi_1 - C_{12} (\varphi_2 - \varphi_1) - \frac{7}{18} X_{17} b_c + \frac{1}{18} X_9 b_c - \frac{5}{18} X_{15} b_c + \frac{1}{9} X_8 b_c + \\
 & + \frac{1}{2} m_3 \left(2(-a_1 \sin \varphi_1 (\dot{\varphi}_1)^2 - a_2 \sin \varphi_2 (\dot{\varphi}_2)^2 - a_3 \sin \varphi_2 (\dot{\varphi}_2)^2 - a_4 \sin \varphi_3 (\dot{\varphi}_3)^2 \right) \times \\
 & \times a_1 \cos \varphi_1 - 2(\dot{x} + a_1 \cos \varphi_1 \dot{\varphi}_1 + a_2 \cos \varphi_2 \dot{\varphi}_2 + a_3 \cos \varphi_2 \dot{\varphi}_2 + a_4 \cos \varphi_3 \dot{\varphi}_3) \times \\
 & \times a_1 \sin \varphi_1 \dot{\varphi}_1 - 2\left(-a_1 \cos \varphi_1 (\dot{\varphi}_1)^2 - a_2 \cos \varphi_2 (\dot{\varphi}_2)^2 - a_3 \cos \varphi_2 (\dot{\varphi}_2)^2 - \right. \\
 & \left. - a_2 \cos \varphi_3 (\dot{\varphi}_3)^2\right) a_1 \sin \varphi_1 - 2(\dot{y} - a_1 \sin \varphi_1 \dot{\varphi}_1 - a_2 \sin \varphi_2 \dot{\varphi}_2 - a_3 \sin \varphi_2 \dot{\varphi}_2 - \\
 & - a_2 \sin \varphi_3 \dot{\varphi}_3) a_1 \cos \varphi_1 \dot{\varphi}_1) + \frac{1}{6} X_7 b_c - \frac{1}{3} X_{16} b_c - \frac{4}{9} X_{18} b_c + \frac{2}{9} X_6 b_c + \frac{5}{18} X_5 b_c + \\
 & + W_{nc} S_n - W_{\pi c} S_{\pi} - \frac{1}{18} X_{11} b_c + \frac{1}{3} X_4 b_c + \frac{7}{18} X_3 b_c;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_4 = & \frac{1}{2} m_2 (2(-a_1 \sin \varphi_1 (\dot{\varphi}_1)^2 - a_2 \sin \varphi_2 (\dot{\varphi}_2)^2) a_2 \sin \varphi_2 - 2(\dot{x} + a_1 \sin \varphi_1 \dot{\varphi}_1 + a_2 \times \\
 & \times \cos \varphi_2 \dot{\varphi}_2) a_2 \sin \varphi_2 \dot{\varphi}_2) - 2(-a_1 \cos \varphi_1 (\dot{\varphi}_1)^2 - a_2 \cos \varphi_2 (\dot{\varphi}_2)^2) a_2 \sin \varphi_2 - 2(\dot{y} - a_1 \times \\
 & \times \sin \varphi_1 \dot{\varphi}_1 - a_2 \sin \varphi_2 \dot{\varphi}_2) a_2 \cos \varphi_2 \dot{\varphi}_2) + \frac{1}{2} m_3 (2(-a_1 \sin \varphi_1 (\dot{\varphi}_1)^2 - a_2 \sin \varphi_2 (\dot{\varphi}_2)^2 - \\
 & - a_3 \sin \varphi_3 (\dot{\varphi}_3)^2 - a_4 \sin \varphi_4 (\dot{\varphi}_4)^2) (a_2 \cos \varphi_2 + a_3 \cos \varphi_3) + 2(\dot{x} + a_1 \cos \varphi_1 \dot{\varphi}_1 + a_2 \times \\
 & \times \cos \varphi_2 \dot{\varphi}_2 + a_3 \cos \varphi_3 \dot{\varphi}_3 + a_4 \cos \varphi_4 \dot{\varphi}_4) (-a_2 \sin \varphi_2 \dot{\varphi}_2 - a_3 \sin \varphi_3 \dot{\varphi}_3) + 2(-a_1 \times \\
 & \times \cos \varphi_1 (\dot{\varphi}_1)^2 - a_2 \cos \varphi_2 (\dot{\varphi}_2)^2 - a_3 \cos \varphi_3 (\dot{\varphi}_3)^2 - a_4 \cos \varphi_4 (\dot{\varphi}_4)^2) (-a_2 \sin \varphi_2 - \\
 & - a_3 \sin \varphi_3 + 2(\dot{y} - a_1 \sin \varphi_1 \dot{\varphi}_1 - a_2 \sin \varphi_2 \dot{\varphi}_2 - a_3 \sin \varphi_3 \dot{\varphi}_3 - a_4 \sin \varphi_4 \dot{\varphi}_4) \times \\
 & \times (-a_2 \cos \varphi_2 \dot{\varphi}_2 - a_3 \cos \varphi_3 \dot{\varphi}_3)) - \frac{1}{2} m_2 (-2(\dot{x} + a_1 \cos \varphi_1 \dot{\varphi}_1 + a_2 \cos \varphi_2 \dot{\varphi}_2) \times \\
 & \times a_2 \sin \varphi_2 \dot{\varphi}_2 - 2(\dot{y} - a_1 \sin \varphi_1 \dot{\varphi}_1 - a_2 \sin \varphi_2 \dot{\varphi}_2) \times a_2 \cos \varphi_2 \dot{\varphi}_2) - \frac{1}{2} m_3 (2(\dot{x} + a_1 \times \\
 & \times \cos \varphi_1 \dot{\varphi}_1 + a_2 \cos \varphi_2 \dot{\varphi}_2 + a_3 \cos \varphi_3 \dot{\varphi}_3 + a_4 \cos \varphi_4 \dot{\varphi}_4) \times (-a_2 \sin \varphi_2 \dot{\varphi}_2 - a_3 \sin \varphi_3 \dot{\varphi}_3) + \\
 & + 2(\dot{y} - a_1 \sin \varphi_1 \dot{\varphi}_1 - a_2 \sin \varphi_2 \dot{\varphi}_2 - a_3 \sin \varphi_3 \dot{\varphi}_3 - a_4 \sin \varphi_4 \dot{\varphi}_4) (-a_2 \cos \varphi_2 \dot{\varphi}_2 - \\
 & - a_3 \cos \varphi_3 \dot{\varphi}_3)) + (- (T_{л3} + T_{н3} - W_{л3} - W_{н3}) \sin \varphi_2 - (T_{лн} - W_{лн}) \sin(\varphi_2 + \beta) - \\
 & - (T_{нн} - W_{нн}) \sin(\varphi_2 + \beta) - \left(\frac{1}{2} \sqrt{4a_2^2 + B_t^2} C_{\delta 1}\right) \sin \varphi_2 - \left(\frac{1}{2} \sqrt{4a_2^2 + B_t^2} C_{\delta 1}\right) \cos \varphi_2 - \\
 & - \left(\frac{1}{2} \sqrt{4a_1^2 + B_t^2 - 4B_t e_\kappa + 4e_\kappa^2} \varphi_2 + e_\kappa \beta\right) C_{\delta 2} \cos(\varphi_2 + \beta) - \left(\frac{1}{2} \sqrt{4a_1^2 + B_t^2 - 4B_t e_\kappa + 4e_\kappa^2} \times \right. \\
 & \times \varphi_2 + e_\kappa \beta) C_{\delta 2} \cos(\varphi_2 + \beta)) x + (- (T_{л3} + T_{н3} - W_{л3} - W_{н3}) \cos \varphi_2 + (T_{лн} - W_{лн}) \times \\
 & \times \cos(\varphi_2 + \beta) + (T_{нн} - W_{нн}) \cos(\varphi_2 + \beta) + \left(\frac{1}{2} \sqrt{4a_2^2 + B_t^2} C_{\delta 1}\right) \cos \varphi_2 - \\
 & - \left(\frac{1}{2} \sqrt{4a_2^2 + B_t^2} \varphi_2 C_{\delta 1}\right) \sin \varphi_2 + \left(\sqrt{4a_1^2 + B_t^2 - 4B_t e_\kappa + 4e_\kappa^2} \varphi_2 + e_\kappa \beta\right) C_{\delta 2} \sin(\varphi_2 + \beta)) \times \\
 & \times y + \left(- \left(\frac{1}{2} \sqrt{4a_2^2 + B_t^2} \times \varphi_2 C_{\delta 2}\right) + \frac{1}{4} (4a_1^2 + B_t^2 - 4B_t e_\kappa + 4e_\kappa^2) C_{\delta 2} \times \right. \\
 & \times \sin \left(\beta + \arctg \left(\frac{a_1^2}{\frac{1}{2} B_t - e_\kappa} \right) \right) \left. \right) \varphi_2 + \frac{1}{2} (T_{л3} - W_{л3}) B_t - \frac{1}{2} (T_{н3} - W_{н3}) B_t - (T_{лн} - W_{лн}) \times \\
 & \times \left(e_\kappa + \frac{1}{2} \sqrt{4a_1^2 + B_t^2 - 4B_t e_\kappa + 4e_\kappa^2} \cos \left(\beta + \arctg \left(\frac{a_1^2}{\frac{1}{2} B_t - e_\kappa} \right) \right) \right) - \left(\frac{1}{2} \sqrt{4a_2^2 + B_t^2} \varphi_2 C_{\delta 1} \right) a_2 + \\
 & + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \sqrt{4a_1^2 + B_t^2 - 4B_t e_\kappa + 4e_\kappa^2} \varphi_2 + e_\kappa \beta \right) C_{\delta 2} \sqrt{4a_1^2 + B_t^2 - 4B_t e_\kappa + 4e_\kappa^2} \times \\
 & \times \sin \left(\beta + \arctg \left(\frac{a_1^2}{\frac{1}{2} B_t - e_\kappa} \right) \right) + C_{12} (\varphi_2 - \varphi_1) - C_{23} (\varphi_3 - \varphi_2);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_5 = & \frac{5}{18} Y_5 b_{\kappa} + \frac{4}{9} Y_2 b_{\kappa} + \frac{1}{3} Y_4 b_{\kappa} - \frac{1}{3} Y_{16} b_{\kappa} - \frac{5}{18} Y_{15} b_{\kappa} - \frac{2}{9} Y_{14} b_{\kappa} - \frac{1}{6} Y_{13} b_{\kappa} - \frac{1}{9} Y_{12} b_{\kappa} - \\
 & \frac{1}{18} Y_{11} b_{\kappa} + W_{нк} K_n - W_{лк} K_l + \frac{7}{18} Y_3 b_{\kappa} + \frac{1}{2} Y_1 b_{\kappa} + ((Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 + Y_5 + Y_6 + \\
 & + Y_7 + Y_8 + Y_9 + Y_{10} + Y_{11} + Y_{12} + Y_{13} + Y_{14} + Y_{15} + Y_{16} + Y_{17} + Y_{18} + W_{лк} + W_{нк}) \sin \varphi_3 - \\
 & - (b_3 C_{\delta\kappa}) \sin \varphi_3 - (b_3 \varphi_3 C_{\delta\kappa}) \cos \varphi_3) x + (- (Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 + Y_5 + Y_6 + Y_7 + Y_8 + \\
 & + Y_9 + Y_{10} + Y_{11} + Y_{12} + Y_{13} + Y_{14} + Y_{15} + Y_{16} + Y_{17} + Y_{18} + W_{лк} + W_{нк}) \cos \varphi_3 + \\
 & + (b_3 C_{\delta\kappa}) \cos \varphi - (b_3 \varphi_3 C_{\delta\kappa}) \sin \varphi_3) y + b_{\kappa} C_{\delta\kappa} \varphi_3 + \frac{2}{9} Y_6 b_{\kappa} - \frac{1}{2} m_3 (-2(\dot{x} + a_1 \cos \varphi_1 \dot{\varphi}_1 + \\
 & - a_2 \cos \varphi_2 \dot{\varphi}_2 + a_3 \cos \varphi_2 \dot{\varphi}_2 + a_4 \cos \varphi_3 \dot{\varphi}_3) a_4 \sin \varphi_3 \dot{\varphi}_3 - 2(\dot{y} - a_1 \sin \varphi_1 \dot{\varphi}_1 - a_2 \sin \varphi_2 \dot{\varphi}_2 - \\
 & - a_3 \sin \varphi_2 \dot{\varphi}_2 - a_2 \sin \varphi_3 \dot{\varphi}_3) a_2 \cos \varphi_3 \dot{\varphi}_3) + C_{23} (\varphi_3 - \varphi_2) + \frac{1}{9} Y_8 b_{\kappa} + \frac{1}{18} Y_9 b_{\kappa} - \frac{4}{9} Y_{18} b_{\kappa} - \\
 & - \frac{7}{18} Y_{17} b_{\kappa} + \frac{1}{2} m_3 (2(- a_1 \sin \varphi_1 (\dot{\varphi}_1)^2 - a_2 \sin \varphi_2 (\dot{\varphi}_2)^2 - a_3 \sin \varphi_2 (\dot{\varphi}_2)^2 - a_4 \sin \varphi_3 (\dot{\varphi}_3)^2) \times \\
 & \times a_4 \cos \varphi_3 - 2(\dot{x} + a_1 \cos \varphi_1 \dot{\varphi}_1 + a_2 \cos \varphi_2 \dot{\varphi}_2 + a_3 \cos \varphi_2 \dot{\varphi}_2 + a_4 \cos \varphi_3 \dot{\varphi}_3) a_4 \sin \varphi_3 \dot{\varphi}_3 - \\
 & - 2(- a_1 \cos \varphi_1 (\dot{\varphi}_1)^2 - a_2 \cos \varphi_2 (\dot{\varphi}_2)^2 - a_3 \cos \varphi_2 (\dot{\varphi}_2)^2 - a_2 \cos \varphi_3 (\dot{\varphi}_3)^2) a_2 \sin \varphi_3 - \\
 & - 2(y - a_1 \sin \varphi_1 \dot{\varphi}_1 - a_2 \sin \varphi_2 \dot{\varphi}_2 - a_3 \sin \varphi_2 \dot{\varphi}_2 - a_2 \cos \varphi_3 \dot{\varphi}_3) a_2 \cos \varphi_3 \dot{\varphi}_3) + \frac{1}{6} Y_7 b_{\kappa} + b_3 \varphi_3 C_{\delta\kappa}.
 \end{aligned}$$

У незношеному рульовому керуванні витоки рідини в гідросистемі повороту керованих коліс відсутні. Це, своєю чергою, виключає поворот коліс без участі механізатора відносно остова трактора. Тоді причиною уводу агрегату від прямолінійної траєкторії можуть бути неоднорідність ґрунту, що обробляється, схил поля, різниця сил опору на колесах трактора [9].

Узагальнені сили Q_i , що входять у рівняння (1), визначені на основі принципу можливих переміщень. При прямолінійному русі МТА у процесі проведення сівби в ідеальному випадку кут повороту керованих коліс $\beta = 0$.

Результати досліджень та їх обговорення

Якість роботи більшості мобільних машинно-тракторних агрегатів безпосередньо залежить від ступеню стійкості їх руху. Непрямолінійність руху робочого органу, що виходить за допустимі межі, призводить до появи огривів і перекриття оброблюваної площі, а в разі обробітку просапних культур і до часткового зниження рослин у рядку. Більшість операцій мають обмеження на якість виконання роботи. Так, агротехнічні вимоги до смугової сівби передбачають, щоб відхилення ширини міжрядь складало не більше ± 2 см для сошників в агрегаті і ± 5 см у стикові двох суміжних його проходів.

Для реалізації новітніх технологій вирощування сільськогосподарських культур розробляються та впроваджуються відповідні машини нового покоління, що відрізняються від традиційних комбінованими та модульними принципами побудови, спроможністю виконувати технологічні операції на високих робочих швидкостях, надійністю в роботі, економічністю, автоматизованими системами керування та контролю за процесами.

Агротехнічною наукою доведено, що застосування комбінованих машин, виконуючих за один прохід агрегату декілька технологічних операцій, дає змогу зберегти вологу, зменшити кількість проходів агрегату, а також ущільнити ґрунт, підвищити врожайність вирощуваних культур [10].

За даними [11], продуктивність комбінованих агрегатів на базі колісного трактора з передньою і задньою навісними системами на передпосівному обробітку ґрунту та сівбі збільшується на 30 %, а витрати палива на одиницю площі майже вдвічі нижчі порівняно з агрегатами традиційної схеми. Найбільш перспективними також вважаються комбіновані машинно-тракторні агрегати, складені з кількох одноопераційних машин, навішених на відповідних навісних системах енергетичного засобу.

Відповідні переваги таких агрегатів полягають у тому, що маса й тяговий опір фронтально навішених машин чи знарядь збільшують вертикальне навантаження на передні колеса трактора, підвищують щеплення їх з ґрунтом і зменшують буксування [12–17].

Висновки

Дослідження стійкості руху агрегату можна виконати на основі трьохмасової моделі, яка має лінійні характеристики зовнішніх опорів, без урахування буксування рушіїв по опорній поверхні. На основі проведених теоретичних досліджень встановлено, що отримана математична модель дає можливість визначати межі стійкості руху комбінованого агрегату в разі проведення технологічного процесу сівби. Зважаючи на суттєву нелінійність диференціальних рівнянь, які описують процес руху агрегату, їх рішення можливе числовими методами за допомогою ЕОМ із застосуванням програмних пакетів MAPLE 12 і Matlab 6.5 Release 12. Використання в комбінованих агрегатах гідравлічних та електричних систем призведе до складання розрахункових схем і математичних моделей як блок-схем, які будуть розв'язуватись за допомогою інших програмних пакетів. Такі дослідження будуть перспективними тому, що зростає попит на складні й універсальні сільськогосподарські агрегати, а їх експлуатація вимагає теоретичного підґрунтя.

Перспективи подальших досліджень. Зважаючи на те, що створення різноманітних комбінованих машинно-тракторних агрегатів не припиняється в жодному разі, теоретичні дослідження їх руху будуть мати продовження. Агрегати стають все потужнішими і складнішими, у своїй роботі вони об'єднують все більше сільськогосподарських операцій, тому вивчення їх можливостей до застосування є складною теоретичною задачею, яка потребує нестандартних підходів і нестандартного мислення.

References

1. Avdeyev, V. M. (1985). Ustoychivost i upravlyayemost dvizheniya kolesnogo sharnirno-sochlenennogo traktora po gruntu v sostave selskokhozyaystvennogo agregata. *Extended abstract of doctor's thesis*. Kharkov [In Russian].
2. Antoshchenkov, R. V. (2010). Pidvyshchennya efektyvnoyi ekspluatatsiyi kombinovanykh hruntoobrobno-posivnykh ahrehativ. *Extended abstract of doctor's thesis*. Kharkiv [In Ukrainian].
3. Artomov, N. P. (2006). Povysheniye ustoychivosti dvizheniya pakhotnogo agregata pri izmenenii tekhnicheskikh parametrov sistemy upravleniya. *Extended abstract of doctor's thesis*. Kharkov [In Russian].
4. Gyachev, L. V. (1981). *Ustoychivost' dvizheniya sel'skokhozyaystvennykh mashin i agregatov*. Moskva: Mashinostroyeniye [In Russian].
5. Lebedev, A. T. (1982). *Gidropnevmaticheskiye privody traktornykh agregatov*. Moskva: Mashinostroyeniye [In Russian].
6. Roslavtsev, A. V. (1994). Eksperimental'nyye issledovaniya ustoychivosti dvizheniya i upravlyayemosti mnogozvennykh mashinno-traktornykh agregatov. *Traktory i Sel'skokhozyaystvennyye Mashiny*, 1, 10–11 [In Russian].
7. Antoshchenkov, V. N. (1991). Povysheniye tochnosti vozhdeniya mashinno-traktornogo agregata v tekhnologicheskoy protsesse mezhduyadnoy obrabotki sakharnoy svekly. *Extended abstract of doctor's thesis*. Kharkiv [In Ukrainian].
8. Pashchenko, V. F. & Kim, V. V. (2010). *Metodika postroyeniya matematicheskikh modeley ustoychivosti funkcionirovaniya mekhanicheskikh sistem: monografiya*. Kharkiv: KHNAU im. V.V. Dokuchayeva [In Ukrainian].
9. Yaroshenko, P. M. (2011). Pidvyshchennya stiykosti rukhu kombinovanykh posivnykh ahrehativ. *Extended abstract of doctor's thesis*. Kharkiv [In Ukrainian].
10. Kodenko, M. N. (1972). Dinamika i optimizatsiya upravleniya perekhodnymi protsessami traktorov. *Extended abstract of doctor's thesis*. Kharkov [In Russian].
11. Lachuga, YU. F. (2008). Perspektivnyye tekhnologii i tekhnika dlya effektivnogo sel'skokhozyaystvennogo proizvodstva. *Agrozurnal MGAU*, 12, 1–8 [In Russian].
12. Nadykto, V. T. (2008). Perspektivnoye napravleniye sozdaniya kombinirovanykh i shirokozakhatnykh MTA. *Traktory i Sel'skokhozyaystvennyye Mashiny*, 3, 26–30 [In Russian].

13. Nadykto, V. T., Kryzhachkivs'kyi, M. L., Kyurchev, V. M., & Abdula, S. L. (2006). *Novi mobil'ni enerhetychni zasoby Ukrainy. Teoretychni osnovy vykorystannya v zemlerobstvi: Navchal'nyy posibnyk*. Melitopol [In Ukrainian].
14. Lyubushko, N. I., & Zvolinskiy, V. N. (1997). Novyye tendentsii v sozdanii i ispol'zovanii kombinirovannykh agregatov *Traktory i Sel'skokhozyaystvennyye Mashiny*, 10, 14–16 [In Russian].
15. Koval, S., Pohorilyy, V., Sheychenko, V., Husar, V., & Lyubchenko, S. (2007). Otsinka rivnya tekhnichnoho zabezpechennya system obrobittu gruntu ta posivu. *Tekhnika APK*, 10, 10–11 [In Ukrainian].
16. Kutkov, G. M. (2007). Otsenka tekhnologicheskikh svoystv mobilnykh energeticheskikh sredstv. *Traktory i Sel'skokhozyaystvennyye Mashiny*, 1, 26–27 [In Russian].
17. Donnell, H. (2001). *Farm power and machinery management*. Wiley-Blackwell.
18. Fluck, R. C. (2004). Energy analysis for agricultural systems In Energy in Farm Production. *Energy in World Agriculture, Elsevier, Amst*, 6, 45–51.
19. Geradin, M., & Cardona, A. (1988). Kinematics and dynamics of rigid and flexible mechanisms using finite elements and quaternion algebra. *Computational Mechanics*, 4 (2), 115–135. doi: 10.1007/bf00282414.
20. Bayo, E., Garcia De Jalon, J., & Serna, M. A. (1988). A modified lagrangian formulation for the dynamic analysis of constrained mechanical systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 71 (2), 183–195. doi:10.1016/0045-7825(88)90085-0.

Стаття надійшла до редакції 22.02.2020 р.

Бібліографічний опис для цитування:

Ярошенко П. М., Арендаренко В. М. Узагальнена математична модель руху комбінованого посівного машинно-тракторного агрегату. *Вісник ПДАА*. 2020. № 1. С. 275–289.

© Ярошенко Павло Миколайович, Арендаренко Володимир Миколайович, 2020