УДК 519.83

ВИКОРИСТАННЯ ТЕОРІЇ ІГОР В ЕКОНОМІЦІ

Іє О. М., Онопченко С. В.

THE USE OF GAME THEORY IN ECONOMICS

Ie O. N., Onopchenko S. V.

У статті представлено повний опис основних понять і моделей теорії ігор. У тому числі коротко розглядаються: некооперативні ігри, кооперативні ігри та ієрархічні ігри.
Ключові слова: *теорія ігор, центр, агент, виграш, Рівновага Неша, стратегія, прийняття рішень.*

В даний час величезний інтерес привертає теорія ігор, яка, з одного боку, поряд з математичними моделями загальної рівноваги і теорією соціального вибору, зіграла ключову роль у створенні сучасної економічної теорії, а з іншого, є одним з найважливіших інструментів аналізу величезного різноманіття задач, що виникають не тільки в економіці, але і політиці, соціальних науках, військовій справі, біології та ін.

Суть теорії ігор (з економічної точки зору) в тому, щоб допомогти економістам розуміти і передбачати те, що може відбуватися в економічних ситуаціях, і зараз навряд чи можна знайти область економіки або дисципліни, пов'язаної з економікою, де основні концепції теорії ігор не були б просто необхідними для розуміння сучасної економічної літератури.

Актуальність цієї роботи зумовлена великим інтересом до теорії ігор в сучасній науці. Крім того, в сучасному економічному житті важливу роль відіграє використання теорії ігор, як засобу реального доходу. Використання теорії ігор дає можливість прорахувати можливі варіанти отримання прибутку та визначення найкращих економічних кроків, а також визначити дію опонентів по ринку.

На даний момент, якщо говорити про економічні додатки, мова йде вже не тільки про застосування теоретико-ігрових методів до проблем теорії організації промисловості, що стали досить традиційними, а й, по суті справи, до всього різноманіття економічної проблематики. Теорію ігор слід розуміти як інструмент економічного аналізу, який:

1) дає ясну і точну мову дослідження різних економічних ситуацій;
2) дає можливість піддавати інтуїтивні уявлення перевірці на логічну узгодженість;
3) допомагає простежити шлях від «спостережень» до основоположних припущень і виявити, які з припущень дійсно лежать в основі частинних висновків.

При цьому область застосування теорії ігор постійно розширюється.

Мета статті дати повний опис основних понять і моделей теорії ігор. У тому числі коротко розглядаються: некооперативні ігри, кооперативні ігри та ієрархічні ігри.

Некооперативні ігри

Розглянемо ігрову невизначеність, яка відображатиме спільне прийняття рішень декількома агентами (при заданих управліннях з боку центру), в рамках якої суттєвими є припущення агента про безліч можливих значень обстановки ігри (дій інших агентів, що обираються ними в рамках тих чи інших неточно відомих агенту, який розглядається, принципів їх поведінки).

Для опису колективної поведінки агентів недостатньо визначити їх переваги та правила індивідуального раціонального вибору окремо. У разі, коли в системі є єдиний агент, гіпотеза його раціональної (індивідуальної) поведінки передбачає, що агент веде себе таким чином, щоб вибором дії максимізувати значення своєї цільової функції. У разі, коли агентів декілька, необхідно враховувати їх взаємний вплив: в цьому випадку виникає гра – взаємодія, в якій виграш кожного агента залежить як від його власної дії, так і від дій інших агентів. Якщо в силу гіпотези раціональної поведінки кожен з агентів прагне вибором дії максимізувати свою цільову функцію, то зрозуміло, що у випадку декількох агентів індивідуально раціональна дія кожного з них залежить від дій інших агентів.

Розглянемо теоретико-ігрову модель некооперативної взаємодії між n агентами, припускаючи, що вони приймають рішення одночасно і незалежно, не маючи можливості домовлятися про обрані дії, перерозподіляти отримувану корисність (виграш) і т.д.

Кожен агент здійснює вибір дії x_i, що належить допустимої множині X_i, $i \in N = \{1, 2, ..., n\}$ – множині агентів. Вибір дій агентами здійснюється одноразово, одночасно і незалежно.

Виграш i-го агента залежить від його власної дії $x_i \in X_i$, від вектора дій

$$x_{-i} = (x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n) \in X_{-i} = \\ = \prod_{j \in N \setminus \{i\}} X_j \quad (1)$$

опонентів $N \setminus \{i\}$ і від стану природи $\theta \in \Omega$, і описується дійснозначною функцією виграшу $f_i = f_i(\theta, x)$, де $x = (x_i, x_{-i}) = (x_1, x_2, ..., x_n) \in X' = \prod_{j \in N} X_j$ – вектор дій всіх агентів. При фіксованому значенні стану природи сукупність $\Gamma = \left(N, \{X_i\}_{i \in N}, \{f_i(\cdot)\}_{i \in N}\right)$ множини агентів, множин їх допустимих дій і цільових функцій називається грою в нормальній формі. Рішенням ігри (рівновагою) називається множина стійких в тому чи іншому сенсі векторів дій агентів [1].

У силу гіпотези раціональної поведінки кожен агент буде прагнути вибрати найкращі для нього (з точки зору значення його цільової функції) дії при заданій обстановці. Обстановкою для нього буде сукупність стану природи $\theta \in \Omega$ і обстановки ігри (1).

Отже, принцип прийняття ним рішення про обрану дію (при фіксованих обстановці і стані природи) можна записати наступним чином (BR позначає найкращу відповідь - best response):

$$BR_i(\theta, x_{-i}) = \operatorname{Arg}\max_{x_i \in X_i} f_i(\theta, x_i, x_{-i}), \quad i \in N .$$

Розглянемо можливі принципи прийняття рішень агентами, кожен з яких породжує відповідну концепцію рівноваги, тобто визначає, в якому сенсі стійким повинен бути прогнозований результат гри.

Рівновага в домінантних стратегіях. Якщо для деякого агента при будь-якому стані природи множина його найкращих відповідей не залежить від обстановки, то вона становить множину його домінантних стратегій (сукупність домінантних стратегій агентів називається рівновагою в домінантних стратегіях – РДС) [1]. Якщо у кожного з агентів існує домінантна стратегія, то вони можуть приймати рішення незалежно, тобто вибирати дії, не маючи жодної інформації і не роблячи ніяких припущень про обстановку. На жаль, РДС існує далеко не у всіх іграх.

Для реалізації агентами РДС, якщо остання існує, досить знання кожним з них тільки своєї цільової функції і допустимих множин X' і Ω.

Рівновага, що гарантує. Тієї ж інформованістю повинні володіти агенти для реалізації рівноваги, що гарантує (максимінної), яка існує майже у всіх іграх:
$x_i^g \in \operatorname{Arg}\max_{x_i \in X_i} \min_{x_{-i} \in X_{-i}} \min_{\theta \in \Omega} f_i(\theta, x_i, x_{-i}), \quad i \in N$.

Рівновага Неша. Визначимо багатозначне відображення

$$BR(\theta, x) = \left(BR_1(\theta, x_{-1}), ..., BR_n(\theta, x_{-n})\right).$$

Рівновагою Неша [1] при стані природи θ (точніше – параметричною рівновагою Неша) називається точка $x^*(\theta) \in X'$, яка задовольняє наступній умові:
$x^*(\theta) \in BR\left(\theta, x^*(\theta)\right)$.

Останнє вкладення можна також записати у виді:

$$\forall i \in N, \ \forall y_i \in X_i \ \ f_i\left(\theta, x^*(\theta)\right) \geq f_i\left(\theta, y_i, x_{-i}^*(\theta)\right).$$

Множина $E_N(\theta)$ усіх точок виду $x^*(\theta)$ можна описати таким чином:

$$E_N(\theta) = \left\{x \in X' \mid x_i \in BR_i(\theta, x_{-i}), \ i \in N\right\}.$$

Для реалізації рівноваги Неша достатньо, щоб раціональність агентів і всі параметри гри, а також значення стану природи були загальним знанням [2], тобто кожен з агентів раціональний, знає множину учасників гри, цільові функції і допустимі множини всіх агентів, а також знає значення стану природи. Крім того, він знає, що інші агенти знають це, а також те, що вони знають, що він це знає і т.д. до нескінченності.

Суб'єктивна рівновага. Розглянуті види рівноваги є окремими випадками суб'єктивної рівноваги, яка визначається як вектор дій агентів, кожна компонента якого є найкращою відповіддю відповідного агента на ту обстановку гри, яка може реалізуватися з його суб'єктивної точки зору. Розглянемо можливі випадки.

Припустимо, що i-ий агент розраховує на реалізацію обстановки ігри $\hat{x}_{-i}^B$ («B» позначає beliefs; іноді використовуються терміни «припущення», «здогадка» – conjecture) і стану природи $\hat{\theta}_i$, тоді він вибере

$$x_i^B(\theta) \in BR_i\left(\hat{\theta}_i, \hat{x}_{-i}^B\right), \ i \in N .$$

Вектор x^B є точковою суб'єктивною рівновагою.

Зазначимо, що при такому визначенні "рівноваги" не потрібно обґрунтованості припущень агентів про дії її опонентів, тобто, може виявитися, що $\exists i \in N:\ \widehat{x}_{-i}^{B} \neq x_{-i}^{B}$. Обґрунтована суб'єктивна рівновага, тобто така, що $\widehat{x}_{-i}^{B} = x_{-i}^{B}$, $i \in N$, є рівновагою Неша (для цього, зокрема, досить, щоб всі параметри гри були загальним знанням, і щоб кожен агент при побудові $\widehat{x}_{-i}^{B}$ моделював раціональну поведінку опонентів). В окремому випадку, якщо найкраща відповідь кожного агента не залежить від припущень про обстановку, то суб'єктивна рівновага є рівновагою в домінантних стратегіях.

У більш загальному випадку i-ий агент може розраховувати на вибір опонентами дій з множини $X_{-i}^{B} \subseteq X_{-i}$ і реалізацію стану природи з множини $\widehat{\Omega}_i \subseteq \Omega,\ i \in N$. Тоді найкращою відповіддю буде суб'єктивна рівновага, яка гарантує:

$$x_i\left(X_{-i}^{B}, \widehat{\Omega}_i\right) \in \operatorname{Arg}\max_{x_i \in X_i} \min_{x_{-i} \in X_{-i}^{B}} \min_{\theta \in \widehat{\Omega}_i} f_i\left(\theta, x_i, x_{-i}\right),$$
$$i \in N.$$

Якщо $X_{-i}^{B} = X_{-i}$, $\widehat{\Omega}_i = \Omega,\ i \in N$, то $x_i\left(X_{-i}^{B}\right) = x_i^{г}$, $i \in N$, тобто суб'єктивна рівновага, яка гарантує, є «класичною» рівновагою, що гарантує.

У ще більш загальному випадку в якості найкращої відповіді i-го агента можна розглядати розподіл ймовірностей $p_i\left(x_i\right)$, де $p_i\left(\cdot\right) \in \Delta\left(X_i\right)$ – множині всіляких розподілів на X_i, який максимізує очікуваний виграш агента з урахуванням його уявлень про розподіл ймовірностей $\mu_i\left(x_{-i}\right) \in \Delta\left(X_{-i}\right)$ дій, обираних іншими агентами, і розподілі ймовірностей $q_i\left(\theta\right) \in \Delta\left(\Omega\right)$ стану природи (отримаємо Байєсов принцип прийняття рішень) [3]:

$$p_i\left(\mu_i\left(\cdot\right), q_i\left(\cdot\right), \cdot\right) \in x_i\left(X_{-i}^{B}, \widehat{\Omega}_i\right) \in$$
$$\in \operatorname{Arg}\max_{p_i \in \Delta\left(X_i\right)} \int_{X', \Omega} f_i\left(\theta, x_i, x_{-i}\right) p_i\left(x_i\right) q_i\left(\theta\right) \mu_i\left(x_{-i}\right) d\theta dx,$$
$$i \in N.$$

Таким чином, для реалізації суб'єктивної рівноваги потрібна мінімальна інформованість агентів – кожний з них повинен знати свою цільову функцію $f_i\left(\cdot\right)$ і допустимі множини Ω і X'. Однак при такій інформованості сукупність припущень агентів про стан природи і про поведінку опонентів можуть бути неузгодженими. Для досягнення узгодженості, тобто для того, щоб припущення виправдовувалися, необхідні додаткові припущення про взаємну інформованості агентів. Найбільш сильним є припущення про загальне знання, яке перетворює суб'єктивну точкову рівновагу в рівновагу Неша, а сукупність Баейсових принципів прийняття рішень – в рівновагу Байеса-Неша.

Рівновага Байеса-Неша. Якщо в грі є неповна інформація [3], то Байесова гра описується таким набором:

- множиною N агентів;
- множиною K' можливих типів агентів, де тип i-го агента $k_i \in K_i$, $i \in N$, вектор типів $k = \left(k_1, k_2, ..., k_n\right) \in K' = \prod_{i \in N} K_i$;
- множиною $X' = \prod_{i \in N} X_i$ допустимих векторів дій агентів;
- набором функцій корисності u_i: $K' \times X' \to \mathfrak{R}^1$;
- уявленнями $\mu_i\left(\cdot \mid k_i\right) \in \Delta\left(K_{-i}\right),\ i \in N$, агентів.

Рівновага Байеса-Неша у грі з неповною інформацією визначається як набір стратегій агентів виду σ_i: $K_i \to X_i$, $i \in N$, які максимізують відповідні очікувані корисності

$$U_i\left(k_i, \sigma_i\left(\cdot\right), \sigma_{-i}\left(\cdot\right)\right) =$$
$$= \int_{k_{-i} \in \prod_{j \neq i} K_j} u_i\left(k, \sigma_i\left(k_i\right), \sigma_{-i}\left(k_{-i}\right)\right) \mu_i\left(k_{-i} \mid k_i\right) dk_{-i},$$
$$i \in N.$$

У Байесових іграх, як правило, передбачається, що подання $\left\{\mu_i\left(\cdot \mid \cdot\right)\right\}_{i \in N}$ є загальним знанням. Для цього, зокрема, досить, щоб вони були узгоджені, тобто виводилися кожним з агентів за формулою Байєса з розподілу $\mu\left(k\right) \in \Delta\left(K'\right)$, яке є загальним знанням.

Вище розглянуто деякі концепції вирішення некооперативних ігор. Наведемо основні поняття кооперативних ігор, що моделюють взаємодію агентів, які мають можливість утворювати коаліції, і в рамках цих коаліцій домовлятися про дії, що обираються, перерозподіляти корисність і т.д.

Кооперативні ігри

Кооперативна гра задається множиною гравців $N \in \left\{1, ..., n\right\}$ і характеристичної функцією $\nu: 2^N \to R$, що ставить у відповідність кожній коаліції гравців $S \subseteq N$ її виграш.

Поділом гри $\left(N, \nu\right)$ називається вектор $x = \left(x_1, ..., x_n\right)$, для якого $\sum_{i \in N} x_i = \nu\left(N\right)$ (властивість ефективності), $x_i \geq \nu\left(\left\{i\right\}\right)$, $i \in N$ (властивість індивідуальної раціональності).

Рішенням кооперативної гри зазвичай вважається множина поділів, які реалізовуються при раціональної поведінці гравців. Різні концепції вирішення кооперативних ігор відрізняються припущеннями про раціональну поведінці гравців.

Кажуть, що поділ x домінує поділ y по коаліції S $\left(x \succ_S y\right)$, якщо $\forall i \in S$ $x_i > y_i$, $\sum_{i \in S} x_i \le \nu\left(S\right)$. Якщо існує така коаліція S, що $x \succ_S y$, кажуть, що поділ x домінує поділ y. Множина недомініруемих поділів гри називається її C-ядром.

Для заданої множини гравців N збалансованим покриттям називається таке відображення δ_S множини власних коаліцій $2^N \setminus \left\{N\right\}$ у відрізок [0, 1], що $\sum_{S: i \in S} \delta_S = 1$ для всіх гравців $i \in N$ (підсумовування ведеться за власними коаліціями, що містять гравця i).

Необхідні і достатні умови непустоти C-ядра даються теоремою О. М. Бондаревой: C-ядро гри $\left(N, \nu\right)$ не порожньо тоді і тільки тоді, коли для будь-якого збалансованого покриття δ_S

$$\sum_{S \subset N} \delta_S \nu\left(S\right) \le \nu\left(N\right).$$

Ігри з непустим C-ядром називаються збалансованими.

Кооперативна гра називається несуттєвою, якщо для довільної коаліції $S \subseteq N$ $\nu\left(S\right) = \sum_{i \in S} \nu\left(\left\{i\right\}\right)$, в іншому випадку гра називається істотною. Неістотність ігри означає нульовий ефект від кооперації гравців.

Ігрова ситуація є сильною рівновагою Неша, якщо жодна коаліція не може виграти, відхиляючись від рівноважної ситуації. Множина сильних рівноваг Неша може виявитися порожньою, однак якщо в деякій грі з трансферабельною корисністю гравців мається єдина сильна рівновага Неша, то відповідна кооперативна гра буде несуттєвою.

Концепція рішень в погрозах і контрпогрозах заснована на наступній ідеї. Нехай, наприклад, в процесі гри трьох осіб утворилася коаліційна структура $\{\{1, 2\}, \{3\}\}$, що містить коаліцію $T = \{1, 2\}$, в яку входять гравці з номерами 1 і 2. При розподілі доходу коаліції $\nu(\{1, 2\})$ гравці 1 і 2 отримують суми x_1 і x_2 відповідно. Тоді, якщо гравець 1 незадоволений таким розподілом, він може сказати своєму партнерові, що, якщо його частка доходу не буде збільшена, то він сформує коаліцію $S = \{1, 3\}$, де зможе розраховувати на більший виграш. Якщо така коаліція S може утворитися, тобто якщо гравцеві 3 вигідно змінити конфігурацію x на нову конфігурацію y, то така заява називається загрозою гравця 1 гравцю 2. У свою чергу, гравець 2 може заявити гравцеві 1, що у випадку подібних його дій він може запропонувати гравцеві 3 таку конфігурацію z коаліційної структури $\{\{1\}, \{2, 3\}\}$, що гравець 3 отримає більший дохід, ніж у конфігурації y, а сам гравець 2 отримає не менше, ніж у вихідній конфігурації x. Таким чином, гравець 2 висуває контрпогрозу, яка «захищає» його частку x_2.

Тоді розподіл виграшу коаліцій деякої коаліційної структури між своїми учасниками є рівновагою в погрозах і контрпогрозах, якщо на кожну загрозу довільної коаліції K проти будь-якої іншої коаліції L знайдеться контрпогроза коаліції L проти коаліції K.

Ієрархічні ігри

Якщо в розглянутих досі моделях ігровий невизначеності передбачалося, що гравці (агенти) вибирають свої стратегії одночасно і одноразово, то в ієрархічних іграх [4, 5,] існує фіксований порядок ходів – перший хід робить центр, потім свої стратегії вибирають агенти. З цієї точки зору ієрархічні ігри є найбільш адекватним апаратом опису задач управління організаційними системами.

Для ієрархічних ігор характерне використання максимального гарантованого результату (МГР) в якості базової концепції вирішення гри. При цьому «песимістичність» МГР (взяття мінімуму по множині невизначених параметрів) компенсується можливістю передачі інформації між гравцями, що, очевидно, знижує невизначеність при прийнятті рішення.

Критерії ефективності (цільові функції) першого і другого гравців позначимо $w_1 = f_1\left(x_1, x_2\right)$ і $w_2 = f_2\left(x_1, x_2\right)$ відповідно. Виграші гравців залежать від їхніх дій x_1 і x_2 з множин дій X_1^0, X_2^0.

У всіх моделях ієрархічних ігор вважається, що перший гравець (центр) має право першого ходу. Його хід полягає у виборі стратегії $\tilde{x}_1$. Поняття стратегії істотно відрізняється від поняття дії і тісно пов'язане з поінформованістю першого гравця про поведінку другого гравця – агента. Під стратегією гравця тут і далі розуміється правило його поведінки, тобто правило вибору конкретної дії в залежності від змісту і конкретного значення тієї інформації, яку він отримає в процесі гри. Вибирати ж власне дію центр може і після вибору дії агентом.

Найпростіша стратегія центру полягає у виборі безпосередньо дії x_1 (якщо надходження додаткової інформації про дію агента в процесі гри не очікується), більш складна – у виборі функції $\tilde{x}_1\left(x_2\right)$ (якщо в процесі гри очікується інформація про дію агента). Також стратегія центру може полягати в повідомленні агенту деякої інформації, наприклад, інформації про плани своєї поведінки в залежності від вибору агентом дії. При цьому агент повинен бути впевнений, що перший гравець може реалізувати цю стратегію, тобто що перший гравець буде точно знати реалізацію дії x_2 на момент вибору своєї дії x_1.

Наприклад, якщо агент (що вибирає стратегію другим) не очікує інформації про дію центру, то реалізація права першого ходу центру може полягати в повідомленні центром агенту функції $\tilde{x}_1(x_2)$. Таке повідомлення може розглядатися, як обіцянка вибрати дію $x_1 = \tilde{x}_1(x_2)$ при виборі агентом дії x_2. Тоді стратегія агента полягає у виборі дії залежно від повідомлення центру $x_2 = \tilde{\tilde{x}}_2(\tilde{x}_1(\cdot))$. Якщо при цьому агент довіряє повідомленням центру, він повинен вибрати дію x_2^*, що реалізує

$$\max_{x_2 \in X_2^0} f_2(\tilde{x}_1(x_2), x_2).$$

Гра з описаним вище порядком функціонування називається для стислості грою Γ_2 [6].

Якщо центр не очікує інформації про дію агента, і це відомо агенту, то стратегія центру полягає, як вже було сказано, просто з вибору деякого дії x_1^*. Стратегія агента полягає у виборі $x_2 = \tilde{x}_2(x_1^*)$ (він робить хід другим, вже знаючи дію центру). Така гра називається грою Γ_1 [6].

Розглянемо спочатку гру Γ_1. Пара дій (x_1^*, x_2^*) у грі Γ_1 називається рівновагою Штакельберга, якщо

$$x_1^* \in \operatorname{Arg}\max_{x_1 \in X_1^0,\, x_2 \in R_2(x_1)} f_1(x_1, x_2), \qquad (2)$$

$$x_2^* \in R_2(x_1^*) = \operatorname{Arg}\max_{x_2 \in X_2^0} f_2(x_1^*, x_2), \qquad (3)$$

тобто $R_2(x_1)$ – функція найкращої відповіді агента на дію центру.

Рівновага у грі Γ_1 відрізняється від рівноваги Штакельберга (2) тим, що при визначенні оптимальної стратегії першого гравця обчислюється мінімум по множині $R_2(x_1)$:

$$x_1^* \in \operatorname{Arg}\max_{x_1 \in X_1^0} \min_{x_2 \in R_2(x_1)} f_1(x_1, x_2).$$

У грі Γ_1 агент вибирає дію в умовах повної інформованості, вже знаючи дію центру. Максимізація виграшу вибором своєї дії є тут окремим випадком застосування принципу МГР. Рівноважна по Штакельбергу дія центру також дає йому гарантований результат, якщо центр впевнений в тому, що агент вибирає свою дію відповідно до (3) і принципом доброзичливості. Таким чином, рівноважні стратегії як центру, так і агента, є для них і такими, що гарантують.

Однак ситуація, коли перший хід дає перевагу, все ж таки більш типова. Тоді, якщо порядок ходів визначається самими гравцями, між ними виникає боротьба за лідерство. Грі двох осіб в нормальній формі можна поставити у відповідність дві гри Γ_1 (ігри першого порядку), що відрізняються послідовністю ходів. Тоді боротьба за лідерство (перший хід) визначається вигідністю переходу від вихідної гри до якої-небудь з ієрархічних ігор першого порядку. Відомо [1], що, якщо в грі двох осіб існують хоча б дві різних оптимальних за Парето рівноваги Неша, то в цій грі має місце боротьба за перший хід.

Тим не менш, у багатьох випадках відповідна грі Γ_1 поведінка центру не можна назвати ефективною. Тому, коли центр спостерігає дію агента, він зацікавлений повідомити агенту про свої плани щодо вибору дії залежно від дії агента, реалізуючі тим самим гру Γ_2.

Далі наводиться формулювання теореми про максимальний гарантований результат центру в грі типу Γ_2. До цієї гри зводяться багато моделей управління. Визначимо необхідні для формулювання теореми поняття.

Цільові функції гравців: $w_1 = f_1(x_1, x_2)$, $w_2 = f_2(x_1, x_2)$ неперервні на компактних множинах $x_1 \in X_1^0$, $x_2 \in X_2^0$ допустимих дій.

Стратегія центру – $\tilde{x}_1 = \tilde{x}_1(x_2)$, тобто передбачається наступний порядок функціонування: гравець 1, володіючи правом першого ходу, повідомляє гравцеві 2 план вибору своєї стратегії залежно від обраної гравцем 2 стратегії x_2. Після цього другий гравець вибирає дію x_2, максимізуючи свою цільову функцію з підставленої туди стратегією першого гравця, а потім перший гравець – дію $\tilde{x}_1(x_2)$.

Стратегія покарання $x_1^н = x_1^н(x_2)$ визначається з умови

$$f_2(x_1^н(x_2), x_2) = \min_{x_1 \in X_1^0} f_2(x_1, x_2).$$

Якщо стратегій покарання декілька, то оптимальною стратегією покарання називають ту з них, на якій досягається максимум виграшу першого гравця.

Гарантований результат другого гравця (при використанні першим гравцем стратегії покарання) дорівнює

$$L_2 = \max_{x_2 \in X_2^0} f_2(x_1^н(x_2), x_2) = \max_{x_2 \in X_2^0} \min_{x_1 \in X_1^0} f_2(x_1, x_2).$$

Множина дій другого гравця, що забезпечують йому максимальний виграш при використанні першим гравцем стратегії покарання:

$$E_2 = \left\{ x_2 \mid f_2\left(x_1^{н}\left(x_2\right), x_2 \right) = L_2 \right\}.$$

Множина досяжності $D = \left\{ \left(x_1, x_2 \right) : f_2\left(x_1, x_2 \right) > L_2 \right\}$ – це договірна множина гри, що розглядається, тобто множина поєднань стратегій першого і другого гравців, які гарантували б другому результат, суворо більший того, що той може отримати навіть при найгірших для нього діях першого гравця (тобто при використанні першим гравцем стратегії покарання).

Найкращий результат першого гравця на множині досяжності

$$K = \begin{cases} \sup\limits_{(x_1, x_2) \in D} f_1\left(x_1, x_2 \right), \ D \neq \varnothing, \\ \qquad\qquad -\infty, \ D \neq \varnothing. \end{cases}$$

Належність ситуації множині досяжності гарантує реалізованість цього результату шляхом використання стратегії покарання.

Дія першого гравця, що реалізує $K - \varepsilon$ при виборі другим гравцем рекомендованої дії з D:

$$f_1\left(x_1^{\varepsilon}, x_2^{\varepsilon} \right) \geq K - \varepsilon, \quad \left(x_1^{\varepsilon}, x_2^{\varepsilon} \right) \in D \neq \varnothing.$$

$M = \inf\limits_{x_2 \in E_2} \sup\limits_{x_1 \in X_1^0} f_1\left(x_1, x_2 \right)$ – гарантований результат центру при застосуванні ним стратегії покарання (так як стратегії другого гравця обмежені множиною E_2).

Стратегія $x_1^{a\varepsilon}\left(x_2 \right)$ реалізує (з точністю ε) найкращу відповідь центру на дію x_2 агента (ε-домінантна стратегія), тобто

$$f_1\left(x_1^{a\varepsilon}\left(x_2 \right) \right) \geq \sup\limits_{x_1 \in X_1^0} f_1\left(x_1, x_2 \right) - \varepsilon.$$

Теорема Ю. Б. Гермейера [2]. У зазначених умовах найбільший гарантований результат центру дорівнює $\max\left[K, M \right]$. При $K > M$ ε-оптимальна стратегія центру

$$\tilde{x}_1^{\varepsilon}\left(x_2 \right) = \begin{cases} x_1^{\varepsilon}, & \text{при } x_2 = x_2^{\varepsilon}, \\ x_1^{н}\left(x_2 \right), & \text{при } x_2 \neq x_2^{\varepsilon}. \end{cases}$$

При $K \leq M$ оптимальна стратегія центру полягає у застосуванні оптимальної стратегії покарання.

Якщо центр не планує самостійно отримати інформацію про дію агента, він може першим вибрати дію, реалізуючі гру Γ_1. Однак йому можна порекомендувати і більше складну поведінку. Центр може попросити агента повідомити йому свою стратегію $x_2 = \tilde{x}_2\left(x_1 \right)$, яка заснована на очікуваній агентом інформації про дію центру. Реалізація права першого ходу центром полягає в цьому випадку в повідомленні агенту стратегії $\tilde{\tilde{x}}_1\left(\tilde{x}_2\left(x_1 \right) \right)$. Цю стратегію можна інтерпретувати, як обіцянку центру вибрати дію $\tilde{\tilde{x}}_1\left(\tilde{x}_2\left(x_1 \right) \right)$ за умови, що агент обіцяє вибирати свою дію відповідно до $\tilde{x}_2\left(x_1 \right)$. Так утворюється гра Γ_3.

Якщо центр визначає порядок обміну інформацією, він може вибирати, грати йому Γ_1 чи Γ_3. В обох іграх центр змушений вибирати дію, не знаючи дії, обраної агентом. Можна вважати Γ_3, в деякому роді, ускладненням гри Γ_1.

Аналогічно тому, як, за допомогою утворення додаткової «петлі зворотного зв'язку», з Γ_1 була утворена Γ_3, можна ускладнити і гру Γ_2. Так утворюється гра Γ_4. У ній агент, очікуючи від центру, як і в Γ_2, інформацію виду $\tilde{x}_1\left(x_2 \right)$, формує і повідомляє центру свою стратегію $\tilde{\tilde{x}}_2\left(\tilde{x}_1 \right)$. Центр, який має право першого ходу, користується стратегіями $\tilde{\tilde{\tilde{x}}}_1\left(\tilde{\tilde{x}}_2 \right)$, які визначають, яку функцію $\tilde{x}_1\left(x_2 \right)$ вибере центр залежно від повідомлення агента $\tilde{\tilde{x}}_2$.

Таким же способом можна на основі Γ_3 побудувати гру Γ_5, і так далі. У кожній з побудованих парних ігор Γ_{2m}, $m = 1, 2, \ldots$, центр використовує в якості стратегій відображення множини стратегій агента в цій грі на множину стратегій центру в грі Γ_{2m-2}. Аналогічно, стратегіями агента є відображення множини стратегій центру в Γ_{2m} на множину стратегій агента в грі Γ_{2m-2}.

Таку рефлексію можна було б нарощувати нескінченно, переходячи до все більш складних схем обміну інформацією, якби розгляд цих ігор збільшувало виграш центру. Проте має місце наступний результат.

Теорема Н. С. Кукушкіна [6]. Максимальний гарантований результат центру в грі Γ_{2m} при $m > 1$ дорівнює максимальному гарантованому результату центру в грі Γ_2. В іграх ж Γ_{2m+1} при $m > 1$ максимальний гарантований результат центру дорівнює його максимальному гарантованому результату в грі Γ_3.

Таким чином, при дослідженні гарантованого результату центру можна обмежитися дослідженням тільки ігор Γ_1, Γ_2 і Γ_3. Крім того, відомо [6], що максимальний гарантований результат центру в грі Γ_2 не менше його гарантованого результату в грі Γ_3, а той, у свою чергу, не менше гарантованого виграшу в грі Γ_1. Цей результат показує, що Γ_2 є «ідеальної» грою для центру. Відповідно, якщо центр має можливість визначати порядок і зміст обміну інформацією, і, крім того, при виборі своєї дії знає дію, вибрану агентом, він повинен грати Γ_2. Якщо центр на момент вибору своєї дії не знає дії агента – йому найбільш вигідна гра Γ_3.

Висновки. На практиці часто доводиться стикатися з задачами, в яких необхідно приймати рішення в умовах невизначеності, тобто виникають ситуації, в яких дві (або більше) сторони переслідують різні цілі, а результати будь-якої дії кожної зі сторін залежать від заходів партнера. Такі ситуації відносяться до конфліктних: результат кожного ходу гравця залежить від відповідного ходу супротивника, мета гри – виграш одного з партнерів. В економіці конфліктні ситуації зустрічаються дуже часто і мають різноманітний характер. До них відносяться, наприклад, взаємини між постачальником і споживачем, покупцем і продавцем, банком і клієнтом. У всіх цих прикладах конфліктна ситуація породжується відмінністю інтересів партнерів і прагненням кожного з них приймати оптимальні рішення, які реалізують поставлені цілі найбільшою мірою. При цьому кожному доводиться рахуватися не тільки зі своїми цілями, але і з цілями партнера, і враховувати невідомі заздалегідь рішення, які ці партнери будуть приймати. В останні роки значення теорії ігор істотно зросло в багатьох областях економічних і соціальних наук. В економіці вона застосовна не тільки для вирішення загальногосподарських задач, але і для аналізу стратегічних проблем підприємств, розробок організаційних структур і систем стимулювання.

Л і т е р а т у р а

1. Губко М. В. Теория игр в управлении организационными системами / М. В. Губко, Д. А. Новиков. – М.: Синтег, 2002. – 148 с.
2. Новиков Д. А. Рефлексивные игры / Д. А. Новиков, А. Г. Чхартишвили. – М.: Синтег, 2003. – 160 с.
3. Myerson R. B. Game theory: analysis of conflict / R. B. Myerson. – London: Harvard Univ. Press, 1991. – 568 p.
4. Горелик В. А. Анализ конфликтных ситуаций в системах управления / В. А. Горелик, М. А. Горелов, А. Ф. Кононенко. – М.: Радио и связь, 1991. – 288 с.
5. Кононенко А. Ф. Принятие решений в условиях неопределенности / А. Ф. Кононенко, А. Д. Халезов, В. В. Чумаков. – М.: ВЦ АН СССР, 1991. – 211 с.
6. Гермейер Ю. Б. Игры с непротивоположными интересами / Ю. Б. Гермейер. – М.: Наука, 1976. – 327 с.

R e f e r e n c e s

1. Gubko M. V. Teorija igr v upravlenii organizacionnymi sistemami / M. V. Gubko, D. A. Novikov. – M.: Sinteg, 2002. – 148 s.
2. Novikov D. A. Refleksivnye igry / D. A. Novikov, A. G. Chhartishvili. – M.: Sinteg, 2003. – 160 s.
3. Myerson R. B. Game theory: analysis of conflict / R. B. Myerson. – London: Harvard Univ. Press, 1991. – 568 p.
4. Gorelik V. A. Analiz konfliktnyh situacij v sistemah upravlenija / V. A. Gorelik, M. A. Gorelov, A. F. Kononenko. – M.: Radio i svjaz', 1991. – 288 s.
5. Kononenko A. F. Prinjatie reshenij v uslovijah neopredelennosti / A. F. Kononenko, A. D. Halezov, V. V. Chumakov. – M.: VC AN SSSR, 1991. – 211 s.
6. Germejer Ju. B. Igry s neprotivopolozhnymi interesami / Ju. B. Germejer. – M.: Nauka, 1976. – 327 s.

Ие О. Н., Онопченко С. В. Использование теории игр в экономике.

В статье представлено полное описание основных понятий и моделей теории игр. В том числе кратко рассматриваются: некооперативные игры, кооперативные игры и иерархические игры.

Ключевые слова: *теория игр, центр, агент, выигрыш, Равновесие Нэша, стратегия, принятие решений.*

Ie O. N., Onopchenko S. V. The use of game theory in economics.

The article presents a complete description of the basic concepts and models of game theory. Including briefly considered: non-cooperative games, cooperative games and hierarchical games.

Key words: *game theory, the center, agent, prize, Nash equilibrium, the strategy, decision making.*

Іє Ольга Миколаївна, к.ф.м.н., доцент, кафедра математичного аналізу та алгебри Луганського національного університету імені Тараса Шевченка, olgaie@mail.ru

Онопченко Світлана Володимирівна, к.пед.н., доцент, кафедра інформаційних технологій та систем Луганського національного університету імені Тараса Шевченка

Рецензент: ***Рач В.А.,*** д.т.н., професор.

Стаття подана 15.03.2013