

УДК 535.2

## ТОПОЛОГІЯ ДИФРАКЦІЙНОГО ПОЛЯ ДЛЯ КЕРУВАННЯ ТРАЄКТОРІЯМИ РУХУ МІКРО- І НАНОЧАСТИНОК

Хорошун Г.М., Рязанцев А.О.

## TOPOLOGY OF THE DIFFRACTION FIELD FOR GUIDING OF MICRO- AND NANOPARTICLES

Khoroshun G.M., Ryazantsev A.O.

*Чисельно досліджено задачу проходження плоскої хвилі через круглий отвір без параксіального наближення і з його використанням. Проведено порівняльний аналіз отриманих розподілів і показано відмінність у топології оптичного поля. Описана структурованість світла і його перспективність при управлінні мікро- і наночастинами.*  
**Ключові слова:** дифракція, топологічні об'єкти, мікро- і наночастинок, кубіт

### Вступ

У сучасній оптиці [1-3] активно досліджуються такі топологічні об'єкти, як максимуми, мінімуми, сідла і оптичні вихори в розподілах інтенсивності, фази і поляризації. Найбільш дивними властивостями володіє оптичний вихор, - лінія нульовий амплітуди і невизначеною (сингулярної) фази, навколо якої циркулює енергія аналогічно руху повітряних мас в смерчі. Унікальні властивості топологічних об'єктів знайшли широке застосування в різних напрямках: від прецезіонного метрологічних вимірювань менше довжини хвилі світла, а також оптичних пінцетів і багатоканальних маніпуляторів мікрочастинок до їх використання в квантових комп'ютерах.

Зупинимося на останньому застосуванні більш детально. Квантовий комп'ютер [4] концептуально схожий на цифровий класичний комп'ютер, в якому біти замінюються кубітами. Кубіти можуть перебувати в суперпозиції станів і можуть бути взаємно заплутаними - залежними (mutually entangled). Квантовий комп'ютер шукає рішення численних завдань, використовуючи послідовність логічних вентилів (logic gates) – базових елементів цифрової схеми, що виконують елементарні логічні операції, такі як додавання, множення, заперечення, виключення та інші, перетворюючи безліч вхідних логічних сигналів у вихідний логічний сигнал.

В результаті багаторічних досліджень виявлено, що в якості кубітів ефективніше використовувати нейтральні атоми внаслідок того, що:

- вони ідентичні і легко переводяться в потрібний стан за допомогою оптичного накачування;
- мають достатній час когерентності стану, що забезпечується можливістю ізолювати атоми від навколишнього середовища;
- безліч атомів може утримуватися разом без взаємодії один з одним, їх координати можуть бути точно виміряні за допомогою методів флуоресценції.

Нещодавно було показано, що метод захоплення атома світлом, краще, ніж магнітним полем. Це пояснюється тим, що внаслідок осциляції електричного поля світлової хвилі в атомі наводиться осцилюючий електричний дипольний момент із середньою затримкою в один період, що легко контролювати. Більш того, за допомогою певних розподілів світла можна управляти як кожним атомом окремо, так і групою атомів. Успішні експерименти в проведених квантових обчислень з використанням атомів цезію, методи їх розвитку та перспективи наведені в [4].

Підкреслимо, що для успішного управління частками необхідно знати точні координати (x,y,z) топологічних об'єктів у збудженому світловому полі. Круглий отвір є базовим елементом в якості власників елементів будь-яких оптичних приладів і пристосувань, а також важливим дифракційним елементом, дифрагованим поле якого становить значний інтерес для управління мікрочастинами. Тому, першочерговим завданням є обчислення точних характеристик обуреного поля. Метою даної роботи є виявити труднощі розрахунку дифракційного інтеграла з швидко осцилюючим підінтегральним виразом і запропонувати методи їх вирішення.

**Математична модель**

Вектор електричного поля світлової хвилі  $E(r,t)$  задовольняє хвильовому рівнянню, яке для завдання, що володіє осью симетрії, зручно записати в циліндричних координатах  $\rho, \varphi, z$ :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 E}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial E}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} \quad (1)$$

Шукаємо рішення рівняння (1) у вигляді

$$E(\rho, z, t) = A(\rho, z) \exp(i\omega t),$$

де  $\omega$  – циклічна частота  $\omega = k/c = 2\pi/\lambda$ ,  $\lambda$  – довжина хвилі світла. Оскільки ми розглядаємо усталене розподіл поля після проходження отвору, то комплексна амплітуда  $A(\rho, z)$  від часу не залежить. Підставляючи цей вид рішення в (1), отримаємо рівняння для амплітуди

$$\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + \Delta_\rho A + \frac{\omega^2}{c^2} A = 0, \quad (2)$$

де  $\Delta_\rho$  – радіальна частина лапласіана

$$\Delta_\rho = \frac{\partial^2 A(\rho, z)}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A(\rho, z)}{\partial \rho}.$$

Гранична умова Кірхгофа в площині розташування екрану з круглим отвором одиничного радіуса має вигляд:

$$A(\rho, 0) = \begin{cases} A_0, \text{Im}(A) = 0 & \text{при } \rho \leq 1, \\ 0 & \text{при } \rho > 1 \end{cases}$$

Для радіально симетричних завдань було запропоновано використовувати перетворення Ханкеля, що дозволяє висловити кінцевий результат в ряді завдань у вигляді простих математичних виразів:

$$H \left[ \frac{\partial^2 f(\rho)}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f(\rho)}{\partial \rho} \right] = -s^2 H[f(\rho)] = -s^2 F(s).$$

Застосувавши перетворення Ханкеля відповідним чином отримаємо вираз, яке представляє собою точне рішення задачі дифракції плоскої хвилі на круглому отворі з граничними умовами Кірхгофа:

$$\begin{aligned} A(\rho, z) &= \int_0^\infty A(s, z) J_0(s\rho) s ds = \\ &= \int_0^\infty J_1(s) \exp\left(i \frac{ka}{2} \sqrt{(ka)^2 - s^2} z\right) J_0(s\rho) ds \end{aligned} \quad (3)$$

Для поля дифракції плоскої хвилі на круглому отворі Зоммерфельд [5] отримав розподіл амплітуди світла  $A(z)$  в параксіальній наближенні позаду екрану на осі у вигляді:

$$E(z) = -2i E_0 \exp\left(ikz + i \frac{\pi a^2}{2\lambda z}\right) \sin\left(\frac{\pi a^2}{2\lambda z}\right). \quad (4)$$

формули (4) впливає, що на осі максимуми інтенсивності чергуються з мінімумами, що є точними нулями поля амплітуди. Кількість відкритих зон Френеля на відстані спостереження  $z$  визначається за формулою:

$$z_N = \frac{a^2}{N\lambda}, \quad (5)$$

де  $N$  – цілі числа, для парних  $N$  на осі спостерігається мінімум, а для непарних - максимум інтенсивності.

Нулі амплітуди повинні привести до сингулярності фази і появи в дифракційному полі таких топологічних об'єктів, як оптичні вихори. Щоб переконатися, чи так це потрібно розглянути рішення даної задачі без параксіального наближення, що і розглянута в статті [6]. Завдання вирішується в безрозмірних координатах, що відповідає виразу радіальних значень в розмірі радіуса отвору, а поздовжніх - в довжинах Релея  $L_R$ :

$$\tilde{\rho} = \frac{\rho}{a}, \quad \tilde{z} = \frac{z}{L_R} = \frac{z}{\pi a^2/\lambda}$$

Точне рішення на осі, має вид:

$$A = A_0 \exp\left(-i \frac{k^2 a^2 \tilde{z}}{2}\right).$$

$$\left[ 1 - \frac{ka\tilde{z}}{2\sqrt{\left(\frac{ka\tilde{z}}{2}\right)^2 + 1}} \exp\left(-ika\sqrt{\left(\frac{ka\tilde{z}}{2}\right)^2 + 1 + i \frac{k^2 a^2 \tilde{z}}{2}}\right) \right] \quad (6)$$

Мінімум поля на осі досягається в точках:

$$z_N = \frac{a^2}{N \cdot \lambda} - N \frac{\lambda}{2} \quad (7)$$

Таким чином, точки мінімуму інтенсивності в точній вирішенні (7) зрушені щодо «класичних», обчислених за формулою (5) з використанням параксіального наближення, на відстань  $N \frac{\lambda}{2}$ .

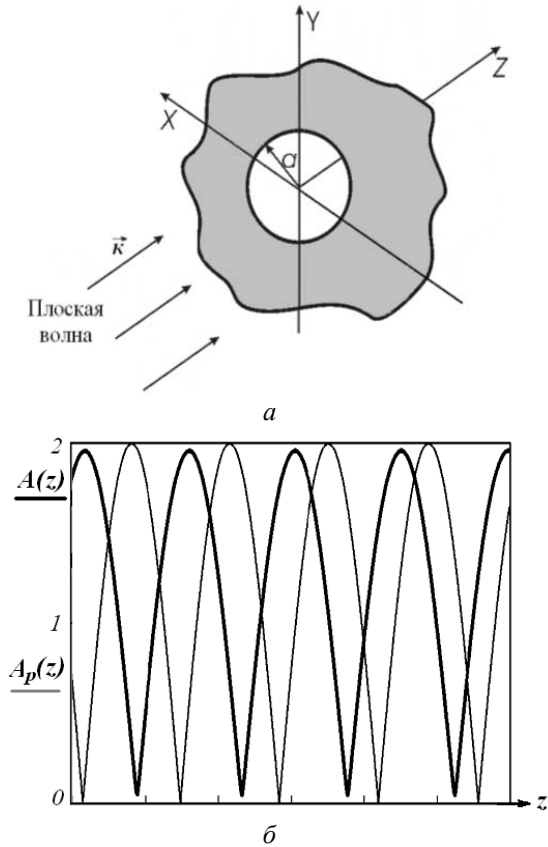


Рис.1. Дифракція плоскої хвилі на круглому отворі радіуса  $a$ . Хвиля падає нормально і поширюється вздовж осі  $Z$  (а). Залежність амплітуди дифрагрованої хвилі на осі пучка в параксильній наближенні  $A_p(z)$  і для точного рішення  $A(z)$ . (б)

На графіку рис. 1б представлені залежності амплітуди дифрагрованої хвилі на осі пучка в параксильній наближенні  $A_p(z)$  і для точного рішення  $A(z)$ . Видно, що для точного рішення відбувається зсув області знаходження топологічних об'єктів - мінімумів і максимумів, а також показано, що в разі точного рішення на осі немає нульового значення, а значить і фазових сингулярностей, а спостерігаються лише мінімуми амплітуди.

#### Чисельне моделювання дифракції плоскої хвилі на круглому отворі

Розглянемо більш повне рішення даного завдання не тільки на осі, а у всьому просторі дифрагovanого поля. Завдання має радіальну симетрію, тому зручно використовувати циліндричні координати  $(\rho, \varphi, z)$ . Інтеграл (3) дає розподіл дифрагovanого поля з урахуванням радіальної симетрії, тому кутова координата  $\varphi$  відсутня.

Підінтегральний вираз в (3) являє собою швидкоосцилюючу функцію, представлену на рис.2а. Даний інтеграл обчислювався з використанням двох програмування Fortran у сфері Visual Studio двома методами: трапецій та четвертої формули Ньютона-Котеса. Точність другого метода вище першого. Період функції не постійний, тому число точок для знаходження площі під інтегралом на один період відрізняється. Рішення інтеграла на осі в залежності

від знаходження верхньої межі в верхньому  $up_1$  або нижньому положенні  $up_2$  матиме на осі локальний максимум чи мінімум відповідно (рис. 2б). Такий розкид в значення не оптимальний при вирішенні завдань управління частками, тому дану ситуацію необхідно прояснити.

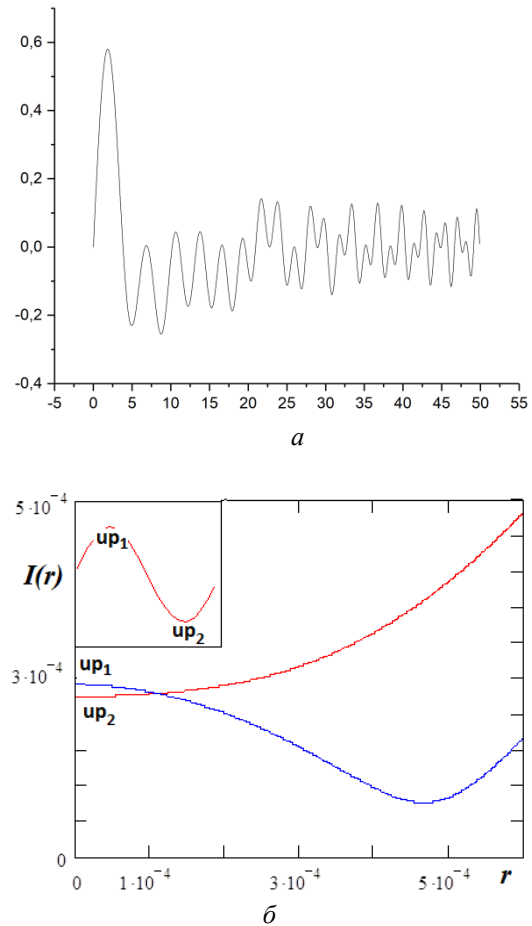


Рис. 2. Вид підінтегрального виразу - це швидкоосцилююча функція із змінним періодом (а). Залежності інтенсивності на осі пучка від вибору верхньої межі інтегрування

За більших  $s > ka$  під коренем стоїть негативна величина і показник експоненти стає дійсним і негативним, тобто інтеграл повинен швидко сходиться. Тому при чисельному рахунку інтеграла можна верхній нескінченну границю замінити на кінцевий, для нашого випадку рівний  $k \cdot a = 10^7$ . Розподілу інтенсивності (рис.3 а, б, в) в поперечному перерізі пучка демонструє чергування темних і світлих кілець на відстанях 5,6 і 7 зон Френеля відповідно. Поля з періодичним чергуванням топологічних об'єктів називають структурованими. Цікаво відзначити конусоподібний тип чергування темних і світлих областей, спостережуваний в поздовжньому перетині пучка. Такі унікальні структурні особливості поля дифракції плоскої хвилі на круглому отворі можуть служити одним з варіантів упаковки нейтральних атомів, мікро- і наночастинок, що утворюють тривимірний кубіт, подібний такому, як показано на рис. 4б

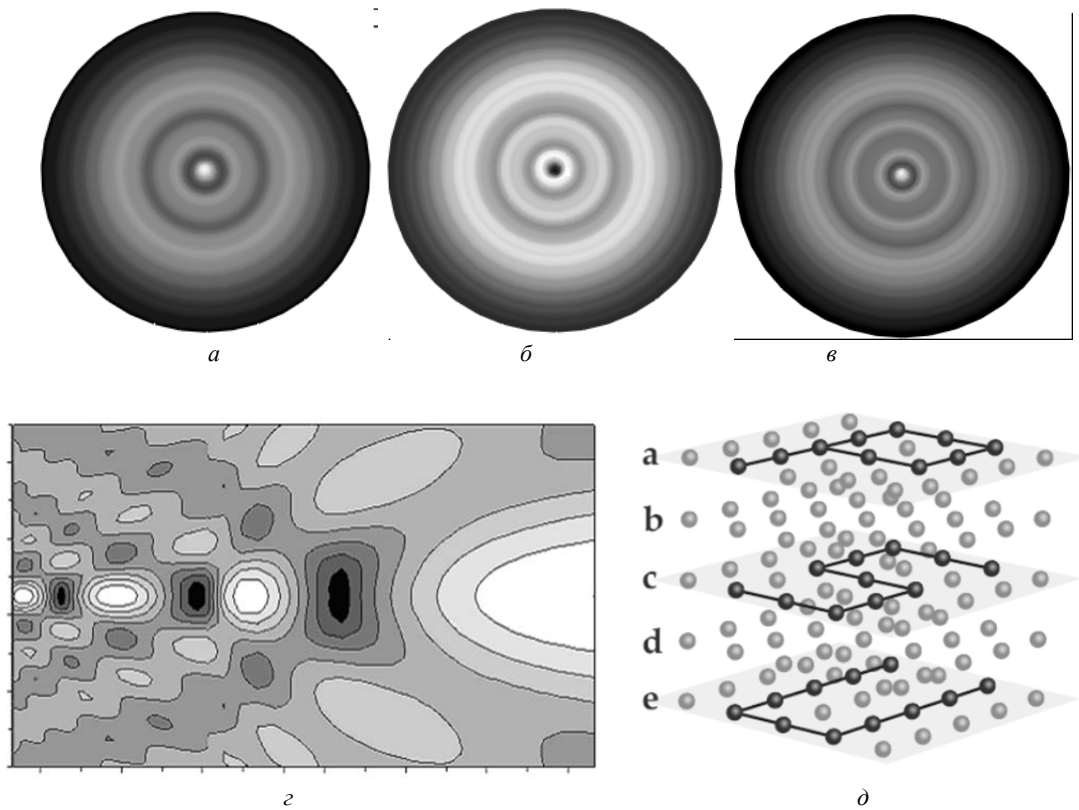


Рис. 3. Розподілу інтенсивності (а,б,в) поля дифракції плоскої хвилі на круглому отворі в поперечному перерізі пучка на відстанях 5,6 і 7 зон Френеля відповідно. Конфігурація інтенсивності поля дифракції плоскої хвилі на круглому отворі в поздовжньому перетині пучка на відстанях від 7 до 1 зони Френеля (г). Відтворення букв Р, S і U в площинах тривимірної оптичної решітки (д)

### Висновки

Показано особливості структури поля дифракції плоскої хвилі на круглому отворі з використанням чисельних методів без параксiального наближення і з його використанням. Проведено порівняльний аналіз отриманих розподілів інтенсивності. Вид топологічних об'єктів кардинально відрізняється: в параксiальній вирішенні має вигляд фазових сингулярностей, а в точному вирішенні - мінімумів амплітуди. Для опису дифракційних задач з радіальною симетрією використовувалося пряме і зворотне перетворення Ханкеля, яке дозволяє визначати аналітичне точне рішення поля на осі. Показані труднощі при взятті інтеграла від швидко осцилюючої функції та запропоновано методи їх вирішення з використанням калібрування аналітичного виразу на осі і заміною нескінченного межі на кінцевий, враховую графічне поведінку підінтегральної функції. Для здійснення чисельного інтегрування використовувалися методи трапецій і четвертої формули Ньютона-Котеса.

Розглянута задача має важливе практичне застосування. Розподіл інтенсивності в поперечному і поздовжньому перетинах пучка мають структуровані топологічні об'єкти у вигляді максимумів і мінімумів амплітуди з конусоподібним поділом світлих і темних зон, а отже, і світлового тиску. Що до-

зволяє використовувати даний пучок в якості пасток для захоплення мікрочастинок. Дана пастка Френеля на відміну від сингулярного пучка має гладкий хвильовий фронт, і, отже, захоплена частка обертається не буде. Це важливо при використанні пучків світла в якості оптичних пінцетів, багатоканальних маніпуляторів частинками, а також в квантових кубітах.

### Література

1. M. S. Soskin and M.V. Vasnetsov, "Singular optics," *Prog. Opt.* 42, 219–276 (2001).
2. M. R. Dennis, Y. S. Kivshar, M. S. Soskin, G. A. Swartzlander Jr., "Singular optics: More ado about nothing," *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.* 11, 090201–090203 (2009).
3. P. Senthilkumaran, Sh. Sato, J. Masajada, "Singular Optics," *International Journal of Optics*, 1-106 (2012).
4. Quantum computing with neutral atoms David S. Weiss and Mark Saffman, *Physics Today* 70, 7, 44 (2017); doi: 10.1063/PT.3.3626
5. Зоммерфельд А. Оптика. М.: Иностранная Литература, 1953. – 486 с.
6. Khoroshun A. N., Vasnetsov M. V., Pas'ko V. A. and Soskin M. S.: Structure of the axial intensity minima in the Fresnel diffraction on a circular opening and superluminescent effects // *Opt. Comm.* – 2007. – V. 271, N2. – P. 316-322.

**Хорошун А.Н., Рязанцев А.А. Топология дифракционного поля для управления микро- и наночастицами**

*Численно исследована задача прохождения плоской волны через круглое отверстие без параксиального приближения и с его использованием. Проведен сравнительный анализ полученных распределений и показано отличие в топологии оптического поля. Описана структурированность света и его перспективность при управлении микро- и наночастицами.*

**Ключевые слова:** дифракция, топологические объекты, микро- и наночастицы, кубит

**Khoroshun G.M., Ryazantsev A.O. Topology of the diffraction field for guiding of micro- and nanoparticles.**

*The problem of passing a plane wave through a circular hole is numerically investigated for two cases: exact solution and solution with the paraxial approach. A comparative analysis of the intensity distributions is provided and distinctions*

*in the optical field topology are represented. The structure of diffracted light field and its prospects in guiding of micro- and nanoparticles are described.*

**Keywords:** diffraction, topological objects, micro- and nanoparticles, qubit

**Хорошун Ганна Миколаївна** – к.ф.-м. н., доцент кафедри «Міське будівництво та господарство» Східноукраїнського національного університету імені Володимира Даля. an\_khor@i.ua

**Рязанцев Андрій Олександрович** – студент-магістр кафедри «Міське будівництво та господарство» Східноукраїнського національного університету імені Володимира Даля. drew.ryazancev@gmail.com

*Рецензент:* д.т.н., проф. **Суворін О.В.**

Стаття подана 13.11.2017.