УДК 681.142.32/621.3.037.37

ДВОИЧНЫЕ КВАЗИЭКВИДИСТАНТНЫЕ И ОТРАЖЕННЫЕ КОДЫ В СМЕШАННЫХ СИСТЕМАХ СЧИСЛЕНИЯ

А. Я. Белецкий, *д-р техн. наук, профессор;*
Е. А. Белецкий, *мл. научн. сотрудник;*
Р. Ю. Кандыба, *студент;*
Д. А. Навроцкий, *аспирант,*
Национальный авиационный университет, г. Киев

Рассмотрена проблема построения квазиэквидистантных и отраженных двоичных кодовых последовательностей Грея и кодов в смешанных факториальных, фибоначчиевых и биномиальных системах счисления. Предложены некоторые комбинаторные конструкции, а также машинные алгоритмы синтеза последовательностей, основанные на методе направленного перебора. Для выбранных параметров последовательностей найдены все квазиэквидистантные (и для отдельных случаев – отраженные) коды с расстоянием Хэмминга, равным 1.

ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАНИЯ

Теория кодирования является одним из наиболее важных разделов современной прикладной математики. Начало становления математической теории кодирования относят к 1948 г., когда была опубликована знаменитая статья Клода Шеннона [1]. Развитие кодов первоначально стимулировалось задачами связи. Позднее построенные коды нашли много других приложений. Коды применяются для защиты данных в памяти ЭВМ, криптографии, при сжатии данных и т. д.

Работа посвящена изложению достаточно узкого, но чрезвычайно важного для приложений подмножества так называемых квазиэквидистантных и отраженных кодов. Класс *квазиэквидистантных* кодов составляют такие последовательности равномерных (т.е. содержащих одинаковое число разрядов) двоичных кодовых комбинаций, в которых *любые смежные* (соседние) кодовые наборы (слова) находятся на одинаковом расстоянии Хэмминга d, равном фиксированному числу натурального ряда (т. е. $d = 1, 2, ...$) [2]. К *эквидистантным* относят такие множества кодов, в которых *любые два его слова* (кодовые комбинации) находятся на одном и том же расстоянии d [3].

И, наконец, к *отраженным* будем относить подмножества квазиэквидистантных кодов с расстоянием $d = 1$, формирование которых основано на принципе зеркального отражения [4]. Но если ограничиться одним лишь зеркальным отражением, то последовательность кодов будет содержать исходную последовательность, после которой располагается та же самая последовательность, только переписанная в обратном порядке, что недопустимо, так как приводит к повторам кодов. Устранение повторов можно обеспечить расширением числа разрядов исходных кодовых комбинаций. Суть «зеркального» отражения с расширением поясняется ниже на примере канонических отраженных кодов Грея и в других разделах статьи.

История развития дискретной математики и вычислительной техники непосредственно связана с разработкой и внедрением все более новых принципов представления и кодирования цифровой информации, основу которых составляют *системы счисления чисел*. Под системой счисления понимают такой способ изображения множества чисел с помощью ограниченного набора символов, образующих ее алфавит, при котором эти символы (элементы алфавита) располагаются в установленном порядке, занимая определенные места (позиции) [5]. Любая система счисления должна иметь в своем составе конечное множество неотрицательных чисел – *диапазон*, который она кодирует. В него обязательно входит число 0 и дальше следуют числа натурального ряда, начиная с 1 [6].

Существуют разнообразные системы счисления (а также способы их классификации), количество которых непрерывно растет. Все системы можно разделить на такие основные классы: позиционные, непозиционные и смешанные.

В *позиционных* системах счисления один и тот же числовой знак (цифра) в записи числа имеет различные значения в зависимости от того места (разряда), где он расположен. Под позиционной системой счисления обычно понимается p-ичная система счисления, которая определяется целым числом $p > 1$, называемым *основанием* системы счисления. Целое десятичное число N в p-ичной системе счисления представляется в виде конечной линейной комбинации степеней числа p:

$$N = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k p^k , \qquad (1)$$

где α_k — целые числа, удовлетворяющие неравенству $0 \le \alpha_k \le (p-1)$; n – число разрядов числа. Простейшими примерами позиционных систем могут служить двоичная, десятичная и другие системы счисления.

В *непозиционных* системах счисления величина, которую обозначает цифра, не зависит от положения в числе. При этом система может накладывать ограничения на положение цифр, например, чтобы они были расположены в порядке убывания. К непозиционным системам относят римскую и ряд других систем.

Смешанная система счисления является обобщением p-ичной системы и зачастую относится к позиционным системам счисления. Основанием смешанной системы счисления является возрастающая последовательность чисел p_k, $k = 1, 2, \ldots$, и каждое число x представляется как линейная комбинация:

$$N = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k p_k ,$$

где на коэффициенты α_k накладываются некоторые ограничения.

Одним из известных примеров смешанной системы является *факториальная* система счисления, в которой основаниями являются последовательность факториалов $p_k = k!$. Другой часто применяемой системой счисления является *фибоначчиева* система, которая основывается на числах Фибоначчи. *Биномиальную* систему в той форме, в которой она представлена в соответствующем разделе статьи, также будем относить к смешанной системе счисления.

В произвольной системе счисления целое положительное число N изображается последовательностью символов $\left[N\right] = \alpha_n \alpha_{n-1} \ldots \alpha_k \ldots \alpha_2 \alpha_1$, где $\left[N\right]$ – представление числа в этой системе счисления, причем каждый символ α_k в общем случае занимает r_k бит (если используется двоичный алфавит).

Основная задача настоящего исследования состоит в разработке алгоритмов построения квазиэквидистантных и отраженных двоичных кодов Грея, а также кодовых последовательностей в смешанных факториальных, фибоначчиевых и биномиальных системах счисления. В основу алгоритмов машинного синтеза эквидистантных последовательностей положен метод направленного перебора.

Отметим следующие общие особенности квазиэквидистантных кодов с расстоянием Хэмминга $d = 1$. Примем за основу, что каждая последовательность кодов начинается с нулевого кода. И, как следствие принятого соглашения, следующими после нулевого кода должны располагаться коды с весами 1 и 2, а далее веса кодов должны чередоваться чет (Ч) - нечет (Н) по схеме

$$012НЧНЧ\text{---}Ч(Н). \tag{2}$$

Схему (2) назовем символической формой *дерева* последовательности кодовых комбинаций. Пусть $n_ч$ и $n_н$ - количество четных и нечетных кодовых слов в последовательности (2). Если последовательность (2) оканчивается нечетной кодовой комбинацией, то это означает, что $n_ч = n_н$, а если четной, то $n_ч = n_н + 1$. Вполне очевидным становится следующее.

Утверждение 1. *Неравенство*

$$0 \le (n_ч - n_н) \le 1 \tag{3}$$

является необходимым (но не всегда достаточным) условием построения квазиэквидистантных кодов.

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ КОДОВ ГРЕЯ

Классические коды Грея [7] можно назвать *каноническими*, поскольку для произвольной разрядности $n \ge 2$ последовательности кодовых комбинаций являются не только квазиэквидистантными, но и отраженными.

Пусть $G(n)$ – последовательность n-битных классических кодов Грея. Для формирования $(n+1)$- битных отраженных кодов Грея, которые обозначим $G_{от}(n+1)$-кодами, достаточно приписать слева каждого исходного кода $G(n)$ цифру 0 и 1 слева группы кодов $G^R(n)$, образуемых зеркальным (рефлексным или реверсным) отражением последовательности $G(n)$, т.е.

$$G_{от}(n+1) = 0G(n) \,\|\, 1G^R(n)\,, \tag{4}$$

где $\|$ – знак конкатенации (сцепления последовательностей).

Согласно (4), $G_{\text{от}}(n+1) \equiv G(n+1)$ и, как следствие, последовательности кодов Грея $G(n)$ разрядности $n \geq 2$ являются как квазиэквидистантными, так и отраженными кодами, причем линия отражения проходит между 2^{n-1}-й и $(2^{n-1}+1)$-й кодовыми комбинациями.

На основании канонических кодов $G(n)$, $n \geq 2$, могут быть построены $2n!$ квазиэквидистантных кодов Грея. Для примера в табл. 1 приведены 12 трехбитных кодовых квазиэквидистантных последовательностей, из которых вариант 1 соответствует каноническим кодам Грея.

Таблица 1 – Трехбитные квазиэквидистантные коды Грея

Вариант последовательности											
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000	000
001	100	100	001	010	010	100	001	010	010	001	100
011	110	101	101	110	011	101	101	110	011	011	110
010	010	001	100	100	001	111	111	111	111	111	111
110	011	011	110	101	101	110	011	011	110	101	101
111	111	111	111	111	111	010	010	001	100	100	001
101	101	110	011	011	110	011	110	101	101	110	011
100	001	010	010	001	100	001	100	100	001	010	010

Первые шесть вариантов последовательностей в табл. 1 образованы из канонического варианта 1 в результате всевозможных перестановок его столбцов, сохраняющих расстояние Хэмминга $d = 1$ смежных кодовых комбинаций. Варианты 7-12 формируются в результате инверсной перестановки ненулевых кодовых комбинаций из соответствующих вариантов 1-6.

Как следует из табл. 1, только варианты 1 (канонический) и 6 кодов Грея принадлежат множеству трехбитных отраженных кодов. Вместе с тем, каждая трехбитная последовательность соотношением (4) порождает подмножество четырехбитных отраженных кодов Грея. Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Утверждение 2. *Общее число $L_{\text{от}}^{(G)}(n)$ отраженных кодов Грея разрядности n определяется соотношением*

$$L_{\text{от}}^{(G)}(n+1) = \begin{cases} n, & n \leq \\ 2n!, & n \geq \ . \end{cases}.$$

ФАКТОРИАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Целое положительное число N в факториальной системе счисления можно представить выражением

$$N = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k k!, \quad 0 \leq \alpha_k \leq k, \tag{5}$$

где $k = 1, 2, \ldots, n$; $0 \leq \alpha_k \leq k$. Развернутая форма ряда (5) имеет вид

$$N = \alpha_n \cdot n! + \alpha_{n-1} \cdot (n-1)! + \ldots + \alpha_k \cdot k! + \ldots + \alpha_2 \cdot 2! + \alpha_1 \cdot 1! \tag{6}$$

Соотношение (6) носит название *нумерационной*, или *числовой*, функции [8] факториальной системы.

В табл. 2 сведены (в качестве примера) первые 120 десятичных чисел, заданных своими коэффициентами α_k в факториальной системе счисления.

Таблица 2 – Двоичное представление десятичных чисел факториальной системе счисления

N	$[N_k]_{Fakt}$	N	$[N_k]_{Fakt}$	N	$[N_k]_{Fakt}$	N	$[N_k]_{Fakt}$	N	$[N_k]_{Fakt}$
0	0	24	100000	48	1000000	72	1100000	96	10000000
1	1	25	100001	49	1000001	73	1100001	97	10000001
2	10	26	100010	50	1000010	74	1100010	98	10000010
3	11	27	100011	51	1000011	75	1100011	99	10000011
4	100	28	100100	52	1000100	76	1100100	100	10000100
5	101	29	100101	53	1000101	77	1100101	101	10000101
6	1000	30	101000	54	1001000	78	1101000	102	10001000
7	1001	31	101001	55	1001001	79	1101001	103	10001001
8	1010	32	101010	56	1001010	80	1101010	104	10001010
9	1011	33	101011	57	1001011	81	1101011	105	10001011
10	1100	34	101100	58	1001100	82	1101100	106	10001100
11	1101	35	101101	59	1001101	83	1101101	107	10001101
12	10000	36	110000	60	1010000	84	1110000	108	10010000
13	10001	37	110001	61	1010001	85	1110001	109	10010001
14	10010	38	110010	62	1010010	86	1110010	110	10010010
15	10011	39	110011	63	1010011	87	1110011	111	10010011
16	10100	40	110100	64	1010100	88	1110100	112	10010100
17	10101	41	110101	65	1010101	89	1110101	113	10010101
18	11000	42	111000	66	1011000	90	1111000	114	10011000
19	11001	43	111001	67	1011001	91	1111001	115	10011001
20	11010	44	111010	68	1011010	92	1111010	116	10011010
21	11011	45	111011	69	1011011	93	1111011	117	10011011
22	11100	46	111100	70	1011100	94	1111100	118	10011100
23	11101	47	111101	71	1011101	95	1111101	119	10011101

Обозначим $\Phi(k)$ – последовательность n-битных факториальных кодов. В том случае, когда разрядность кодовой комбинации из множества кодов $\Phi(k)$ меньше k, то она дополняется в $\Phi(k)$ слева необходимым числом нулей. Пусть $\Phi_d(k)$ – последовательность квазиэквидистантных k-битных факториальных кодов с расстоянием Хэмминга между смежными комбинациями, равным d. На основании данных табл. 2 легко составить (табл. 3) последовательности $\Phi_1(k)$ для $k = 1$ (вырожденный случай), а также $k = 2$ и $k = 3$, образованных перестановками столбцов базовых (вариант 1) последовательностей.

Табл. 3 иллюстрирует один из возможных способов синтеза квазиэквидистантных кодов. Суть его состоит в следующем. На первом этапе тем или иным способом (например, по методу направленного перебора, более подробно рассматриваемого ниже) составляется базовая последовательность квазиэквидистантных кодов разрядности n. На втором этапе осуществляются всевозможные перестановки столбцов базовых последовательностей (в табл. 3 им соответствуют последовательности под номером 1), что приводит к формированию $n!$ различных квазиэквидистантных кодов. И, наконец, на третьем этапе из $n!$ последовательностей исключаются те, которые содержат запрещенные кодовые комбинации. Такими комбинациями в табл. 3 являются коды

110, выделенные затенением. Следовательно, из шести трехбитных последовательностей лишь две образуют квазиэквидистантные факториальные последовательности.

Таблица 3 – Последовательности квазиэквидистантных факториальных кодов

$\Phi_1(k)$								
$k=1$	$k=2$		$k=3$					
1	1	2	1	2	3	4	5	6
0	00	00	000	000	000	000	000	000
1	01	10	010	010	100	100	001	001
	11	11	011	110	101	110	011	101
	10	01	001	100	001	010	010	100
			101	101	011	011	110	110
			100	001	010	001	100	010

Начиная с $k = 4$ кроме квазиэквидистантных можно строить также отраженные факториальные коды $\Phi_{\text{от}}(n)$. Алгоритм формирования отраженных кодов зависит от их разрядности. В частности, имеет место следующее, легко доказуемое непосредственной проверкой

Утверждение 3. *Множество равномерных отраженных факториальных кодов определяется рекуррентным соотношением*

$$\Phi_{\text{от}}(k) = 0\Phi_1(k-1) \parallel 1\Phi_1^R(k-1),$$

где $\Phi_1^R(k)$ – *последовательность, инверсная последовательности* $\Phi_1(k)$.

Обсудим проблему синтеза квазиэквидистантных факториальных кодов разрядности $n = \overline{4, 7}$. С этой целью, воспользовавшись данными табл. 3, составим предварительно распределение весов n-битных кодовых комбинаций, сведя их в табл. 4. Число кодов с четными и нечетными весами в данной таблице для всех значений n удовлетворяют неравенству (3), а это означает, что необходимые условия для формирования квазиэквидистантных факториальных кодов соблюдены.

Таблица 4 – Распределение весов кодовых слов $\Phi(n)$

Вес кода	Разрядность кодовых комбинаций			
	n=4	n=5	n=6	n=7
0	1	1	1	1
1	4	5	6	7
2	5	9	14	20
3	2	7	16	30
4		2	9	25
5			2	11
6				2
$n_{\text{ч}}$	6	12	24	48
$n_{\text{н}}$	6	12	24	48
Всего	12	24	48	96

Схема (2) чередования весов равномерных кодов $\Phi(4)$ согласно табл. 4 имеет вид

$$012Н2Н2Н2Н2Н, \qquad (7)$$

причем из пяти нечетных элементов (Н) последовательности (7) два элемента равны 3, а остальные – 1. Следовательно, существует десять возможных вариантов деревьев квазиэквидистантных факториальных кодов разрядности $n = 4$, один из которых, для иллюстрации, показан на рис. 1.

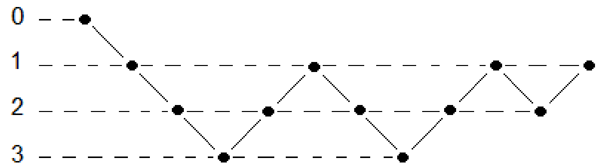

Рисунок 1 – Дерево $\Phi_1(4)$ последовательности 012321232121

Символическую форму *дерева* последовательности кодовых комбинаций $\Phi_1(5)$ можно представить схемой

$$012НЧНЧНЧНЧНЧНЧНЧНЧНЧН, \qquad (8)$$

один из вариантов которой отображен на рис. 2.

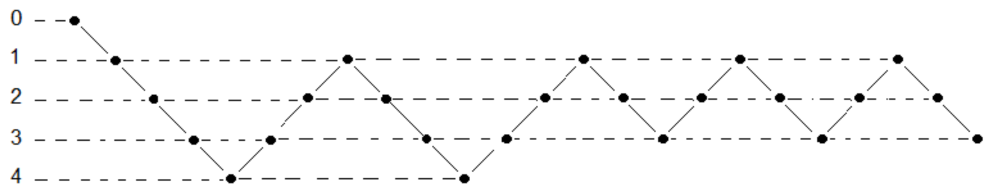

Рисунок 2 – Вариант дерева последовательности $\Phi_1(5)$

Перейдем к оценке общего числа вариантов деревьев $\Phi_1(5)$. Обратим, прежде всего, внимание на то (рис. 2), что кодовые комбинации с весом 4 обязательно должны располагаться между кодами с весом 3. Это необходимо для того, чтобы обеспечить расстояние между смежными комбинациями, равное 1. «Склеим» пары кодов с весом 3, между которыми находятся коды с весом 4. Тем самым мы можем избавиться в колонке $n = 5$ табл. 4 от двух пар кодов с весом 3 и 4 соответственно, а схему (8) записать в виде

$$012Н2Н2Н2Н2Н2Н2Н2Н2Н. \qquad (9)$$

В схеме (9) группа из девяти нечетных (Н) кодовых комбинаций содержит четыре кода с весом 1 и пять – с весом 3. Очевидно, существует 126 вариантов неполных деревьев последовательностей $\Phi_1(5)$, равное числу сочетаний из девяти по четыре. А теперь примем во внимание, что в каждом из 126 вариантов символической формы (9) за счет операции, обратной выше упомянутой операции «склеивания», можно восстановить полные схемы деревьев (8). Поскольку возможны 10 способов выполнения обратной операции, то общее число вариантов построения деревьев $\Phi_1(5)$ оказывается равным 1260. Выполнив аналогичным образом оценку числа деревьев $L_\Phi(6)$ последовательностей $\Phi_1(6)$, получим $L_Ф(6) = 1513512$. При дальнейшем увеличении разрядности n резко возрастает как сложность комбинаторной оценки $L_Ф(n)$, так и число вариантов деревьев $Ф_1(n)$. Для примера, все 10 вариантов деревьев $Ф_1(4)$ приведены в табл. 5.

Таблица 5 – Деревья $Ф_1(4)$

№	Вариант дерева
1	012323212121
2	012321232121
3	012321212321
4	012321212123
5	012123232121
6	012123212321
7	012123212123
8	012121232321
9	012121232123
10	012121212323

Синтез квазиэквидистантных последовательностей кодов (веток), отвечающих тому или иному дереву, осуществляется, как мы уже отмечали выше, по методу направленного перебора (МНП). Идею метода поясним на примере синтеза веток $Ф_1(4)$ для шестого варианта дерева, выделенного в табл. 5 затенением. Составим, прежде всего, ранжированную по весу v последовательность равномерных кодов $Ф$ (4) (табл. 6).

Таблица 6 – Ранжированные $Ф(4)$ коды

№ п/п	Вес кода v			
	0	1	2	3
1	0000	0001	0011	0111
2		0010	0101	1011
3		0100	0110	
4		1000	1001	
5			1010	

В соответствии со схемой шестого варианта дерева (табл. 5) первыми двумя кодами последовательности, которые будем называть *ярусами* ветки дерева, выберем коды 0000 и 0001. Альтернативным ярусу 0001 можно было выбрать код 0010. В качестве третьего яруса следует выбрать код с весом 2 такой, который отстоит от кода 0001 на расстоянии Хэмминга 1. Подходящими являются коды колонки 2 табл. 6 под номерами 1, 2 и 4. Код с младшим номером будем считать основным, а остальные – альтернативными. Продолжая аналогичным образом подбор кодов формируемой последовательности $Ф_1(4)$, придерживаясь схемы выбранного дерева, приходим к табл. 7.

Девятым ярусом синтезируемой ветки должен быть код с весом 2, причем он должен отстоять от предыдущего кода на расстоянии 1. Но такового кода, ранее не использованного, в табл. 6 не оказалось. С целью преодоления сложившейся тупиковой ситуации предпримем следующие действия. Поднимемся вверх по колонкам альтернативных кодов до первой непустой строчки и произведем замену в этой строчке основного кода ближайшим справа альтернативным кодом. В данном случае основной код 0011 следует заменить альтернативным кодом 0101, а затем продолжить процедуру синтеза $\Phi_1(4)$. Пример квазиэквидистантных коды $\Phi_1(4)$, синтезированных по МНП, приведен в табл. 8.

Таблица 7 – Синтез ветки $\Phi_1(4)$

№ п/п	Вес кода		Основной код	Альтернативные коды	
1	0		0000		
2	1		0001	0010	
3	2		0011	0101	1001
4	1		0010		
5	2		0110		
6	3		0111		
7	2		0101		
8	1		0100		
9	2		X		

Таблица 8 – Последовательности $\Phi_1(4)$, отвечающие дереву 012321212321

№	Дерево	Ветка 1	Ветка 2	Ветка 3	Ветка 4	Ветка 5	Ветка 6	Ветка 7	Ветка 8	Ветка 9	Ветка 10	Ветка 11	Ветка 12
0	0	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000
1	1	0001	0001	0010	0010	0010	0010	0100	0100	0100	0100	1000	1000
2	2	1001	1001	0011	0011	1010	1010	0101	0101	1100	1100	1001	1001
3	3	1011	1101	1011	1011	1011	1011	1101	1101	1101	1101	1011	1101
4	2	0011	0101	1010	1010	0011	0011	1100	1100	0101	0101	1010	1100
5	1	0010	0100	1000	1000	0001	0001	1000	1000	0001	0001	0010	0100
6	2	1010	1100	1001	1100	0101	1001	1001	1010	0011	1001	0011	0101
7	1	1000	1000	0001	0100	0100	1000	0001	0010	0010	1000	0001	0001
8	2	1100	1010	0101	0101	1100	1100	0011	0011	1010	1010	0101	0011
9	3	1101	1011	1101	1101	1101	1101	1011	1011	1011	1011	1101	1011
10	2	0101	0011	1100	1001	1001	0101	1010	1001	1001	0011	1100	1010
11	1	0100	0010	0100	0001	1000	0100	0010	0001	1000	0010	0100	0010

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ФИБОНАЧЧИ

Коды Фибоначчи являются обобщением понятия классического двоичного кода [9]. Любое неотрицательное целое число $N = 0, 1, 2, \ldots$ можно единственным образом представить числовой фибоначчиевой функцией

$$N = \alpha_n F_n + \alpha_{n-1} F_{n-1} + \ldots + \alpha_k F_k + \ldots \alpha_2 F_2 + \alpha_1 F_1 , \qquad (10)$$

причём последовательность $\{\alpha_k\}$ в (10) не содержит пар соседних единиц, что обеспечивается эквивалентным преобразованием, называемой операцией «свертки»: $011 \to 100$. Данная операция создает возможность представить фибоначчиевое число в так называемой «минимальной» форме, кодовая комбинация которой будет обладать минимальным весом.

Приведем иллюстрирующий пример:

$$\underline{011}11\underline{011}001 \to 10\underline{011}100001 \to 10100100001. \qquad (11)$$

Подчеркиванием в примере (11) выделены коды, над которыми выполнены операции «свертки». Как следует из этого примера, операции «свертки» привели к понижению веса эквивалентной кодовой комбинации. А именно, число единиц в конечном коде оказалось меньше, чем в исходном коде.

На основе операции «свертки» легко приходим к алгоритму представления многоразрядных двоичных чисел Фибоначчи. Рассмотрим в качестве примера способ записи натуральной последовательности десятичных чисел (включая 0) четырехразрядными двоичными кодами Фибоначчи. Условимся нумеровать разряды кода справа налево, полагая, что младшему (самому правому) разряду соответствует номер 1, затем 2 и т.д. Выберем такой способ кодирования первых трех десятичных чисел 0, 1 и 2:

$$\begin{aligned} &0_{10} \to 0000; \\ &1_{10} \to 0001; \\ &2_{10} \to 0010. \end{aligned} \qquad (12)$$

Переход от десятичного числа k_{10} к числу $(k+1)_{10}$ в кодах Фибоначчи (обозначив их F_k и F_{k+1} соответственно) будем выполнять по правилу: если в младшем разряде F_k стоит 0, то в коде F_{k+1} он заменяется на 1. В том случае, когда в младшем разряде F_k стоит 1, то в F_{k+1} эта единица перемещается во второй разряд, а в младшем записывается 0. Это правило как раз и выдержано в системе (12) при переходе от F_1 к F_2.

Представим далее кодом Фибоначчи (КФ) число 3_{10}. Предварительно, следуя изложенному выше правилу, получим код $3_{10} \to 00011$, который сверткой приводится к минимальной форме

$$3_{10} \to 0100. \qquad (13)$$

Согласно выражениям (12) и (13) младшие три разряда КФ служат для представления десятичных чисел 1, 2 и 3 соответственно. Приведенные значения обобщаются следующим рекуррентным блочным алгоритмом синтеза двоичных фибоначчиевых последовательностей. Пусть $F(k)$ – множество равномерных длины k чисел Фибоначчи, включая 0. Тогда имеет место следующее утверждение.

Утверждение 4. *Множество равномерных k-битных чисел Фибоначчи определяется рекуррентным соотношением*

$$F(k) = 10 \parallel F(k-2)\,. \qquad (14)$$

Доказательство сформулированного утверждения легко выполнить методом непосредственной проверки. В правой части (14) множество $F(k-2)$ составляется из $(k-2)$-разрядных чисел. Из этого следует, что если какая-либо подгруппа чисел Фибоначчи, входящих в $F(k-2)$, содержит числа, разрядность которых меньше $k-2$, то эти числа дополняются слева необходимым количеством нулей. Алгоритм (14) справедлив для любого значения $k \ge 2$. В самом деле, если $k = 2$, то

$$F(2) = 10 \parallel F(0)\,.$$

И поскольку множество $F(0)$ пусто, то $F(2)$ содержит единственное число Фибоначчи 10, соответствующее десятичному числу 2_{10}.

В табл. 9 представлены коды Фибоначчи для ограниченной последовательности десятичных чисел, рассчитанные по рекуррентной формуле (14) с учетом начальных условий (12). Нули, стоящие слева от старшей единицы в КФ, отброшены.

Таблица 9 – Числа Фибоначчи

k_{10}	F_k	F		k_{10}	F_k	F		k_{10}	F_k	F
0	0			13	100000			21	1000000	
1	1	1		14	100001			22	1000001	
2	10	1		15	100010			23	1000010	
3	100	2		16	100100			24	1000100	
4	101			17	100101			25	1000101	
5	1000			18	101000			26	1001000	
6	1001	3		19	101001	8		27	1001001	13
7	1010			20	101010			28	1001010	
8	10000							29	1010000	
9	10001							30	1010001	
10	10010	5						31	1010010	
11	10100							32	1010100	
12	10101							33	1010101	

В колонке F табл. 9 указаны значения n, равные числу кодов, которые могут быть образованы фиксированным числом двоичных разрядов. Например, $F = 3$ означает, что четырехбитной комбинацией, в старшем разряде которых стоит 1, можно составить три кода Фибоначчи. Выписав числа колонки F, получим последовательность 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13,..., являющейся классической последовательностью чисел Фибоначчи.

Перейдем к оценке числа вариантов деревьев квазиэквидистантных кодов Фибоначчи. С этой целью на основании табл. 9 составим предварительно таблицу распределения весов кодовых комбинаций, входящих в $F(k)$, $k = \overline{4, 7}$ (табл. 10).

Таблица 10 – Распределение весов кодовых комбинаций $F(k)$

Вес КК	Разрядность кодов (k)			
	4	5	6	7
0	1	1	1	1
1	4	5	6	7
2	3	6	10	15
3		1	4	10
4				1
$n_ч$	4	7	11	17
$n_н$	4	6	10	17
Всего	8	13	21	34

Анализируя данные табл. 10, приходим к следующему заключению. Квазиэквидистантные последовательности четырехразрядных чисел Фибоначчи заканчиваются кодовой комбинацией с весом 1, пяти- и шестиразрядных – с весом 2 и семиразрядных – с нечетным весом 1 или 3. Не составляет большого труда выполнить также оценку $L_F(k)$ числа вариантов деревьев квазиэквидистантных последовательностей Фибоначчи $F_1(k)$. Эти оценки для выбранных параметров k приведены в табл. 11.

Таблица 11 – Мощность множества деревьев $F_1(k)$

	Число вариантов деревьев $F_1(k)$			
k	4	5	6	7
$L_F(k)$	1	5	126	205920

В качестве примера в табл. 12 приведены рассчитанные на компьютере ветки одного дерева $F_1(6)$.

Таблица 12 – Последовательности $F_1(6)$ дерева 0123212321232321212 12

Дерево	Ветка 1	Ветка 2	Ветка 3	Ветка 4	Ветка 5	Ветка 6	Ветка 7	Ветка 8	Ветка 9	Ветка 10
0	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000
1	000001	000001	000010	000100	000100	001000	001000	010000	100000	100000
2	000101	010001	100010	000101	010100	001010	101000	010001	100010	101000
3	010101	010101	101010	010101	010101	101010	101010	010101	101010	101010
2	010100	000101	001010	010001	000101	101000	100010	010100	101000	001010
1	000100	000100	001000	000001	000001	100000	100000	000100	001000	001000
2	100100	100100	101000	100001	100001	100001	100001	000101	001001	001001
3	100101	100101	101001	100101	100101	101001	101001	100101	101001	101001
2	100001	100001	001001	100100	100100	001001	001001	100100	100001	100001
1	100000	100000	000001	100000	100000	000001	000001	100000	000001	000001
2	100010	100010	010001	100010	100010	010001	010001	100010	010001	010001
3	101010	101010	010101	101010	101010	010101	010101	101010	010101	010101
2	101000	101000	000101	101000	101000	000101	000101	101000	000101	000101
3	101001	101001	100101	101001	101001	100101	100101	101001	100101	100101
2	001001	001001	100001	001001	001001	100100	100100	100001	100100	100100
1	001000	001000	100000	001000	001000	000100	000100	000001	000100	000100
2	001010	001010	100100	001010	001010	010100	010100	001001	010100	010100
1	000010	000010	000100	000010	000010	010000	010000	001000	010000	010000
2	010010	010010	010100	010010	010010	010010	010010	001010	010010	010010
1	010000	010000	010000	010000	010000	000010	000010	000010	000010	000010
2	010001	010100	010010	010100	010001	100010	001010	010010	001010	100010

Для отраженных кодов Фибоначчи имеет место следующее утверждение.

Утверждение 5. *Множество равномерных k-битных отраженных кодов Фибоначчи определяется рекуррентным соотношением*

$$\Phi_{\text{от}}(k) = 00F_1(k-2) + 10F_1^R(k-2)\,, \tag{15}$$

где $F_1^R(k)$ – последовательность, инверсная $F_1(k)$, т. е. последовательность квазиэквидистантных кодов $F_1(k)$, записанная в обратном порядке следования.

БИНОМИАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Известно большое число способов построения биномиальных кодов и на их основе – двоичных биномиальных последовательностей [11]. В данном разделе работы мы рассмотрим два подхода к синтезу алгоритмов равномерных биномиальных кодов. Первый из них назовем «алгоритмом А. А. Борисенко», а второй – «алгоритмом А. Я. Белецкого», названный ниже *альтернативным* алгоритмом.

Основная идея первого алгоритма синтеза неравномерных двоичных биномиальных кодов, отвечающая алгоритму полного суммирующего биномиального счета, изложена в [12] на с. 124. Естественно, что любой неравномерный двоичный код может быть преобразован в равномерный код порядка (длины) n. С этой целью достаточно приписать справа кодовой комбинации столько нулей, чтобы общее число разрядов кода оказалось равным n.

Для построения алгоритмов биномиального счета по Борисенко достаточно указать два параметра k и n, первый из которых задает максимальное число единиц в кодах, а второй значением $r = n-1$ определяет максимальную длину неравномерного биномиального числа. Десятичный нуль в биномиальном коде Борисенко записывается $l = n-k$ нулями, диапазон P биномиальных чисел определяется выражением $P = \binom{n}{k}$, т. е. числом сочетаний из n по k, а максимальная величина числа вычисляется по формуле $F_{\max} = P - 1$.

В табл. 13 приведен ряд примеров формирования биномиальных чисел B_x, отвечающих десятичному значению x.

Таблица 13 – Варианты последовательностей биномиальных чисел (алгоритм Борисенко)

$n = 6$, $k = 4$				$n = 6$, $k = 2$				$n = 6$, $k = 3$			
x	B_x	x	B_x	x	B_x	x	B_x	x	B_x	x	B_x
0	00	10	11010	0	0000	10	10000	0	000	10	1000
1	010	11	11011	1	00010	11	10001	1	0010	11	10010
2	0110	12	11100	2	00011	12	1001	2	00110	12	10011
3	01110	13	11101	3	00100	13	101	3	00111	13	10100
4	01111	14	1111	4	00101	14	11	4	0100	14	10101
5	100			5	0011			5	01010	15	1011
6	1010			6	01000			6	01011	16	11000
7	10110			7	01001			7	01100	17	11001
8	10111			8	0101			8	01101	18	1101
9	1100			9	011			9	0111	19	111

Обозначим $B(n, k)$ – последовательность биномиальных чисел, формируемых по алгоритму Борисенко. Из анализа данных табл. 4 непосредственно приходим к такому выводу.

Утверждение 6. *Прямые и инверсные биномиальные последовательности связаны соотношением*

$$B(n, k) \equiv \overline{B}^R(n, n-k),$$

где $\overline{B}^R(n, n-k)$ – *последовательность биномиальных кодов, которая, во-первых, записана в порядке, обратном порядку следования кодов в*

$B(n, k)$, и, во-вторых, каждый разряд $\overline{B}^{R}(n, n-k)$ образуется в результате инверсии (т. е. замены 0 на 1, и наоборот) соответствующих разрядов $B(n, k)$.

Выясним возможность построения квазиэквидистантных кодов $B_1(n, k)$ на основе множества биномиальных чисел $B(n, k)$. С этой целью составим на основании данных табл. 13 таблицу распределения весов кодовых комбинаций (табл. 14), входящих во множество $B(n, k)$.

Таблица 14 – Распределение весов кодовых комбинаций $B(n, k)$

Вес КК	$B(6, 4)$	$B(6, 2)$	$B(6, 3)$
0	1	1	1
1	2	4	3
2	3	10	6
3	4		10
4	5		
$n_ч$	9	11	7
$n_н$	6	4	13
Всего	15	15	20

Согласно данным табл. 14, а также сопоставления значений $n_ч$ и $n_н$, полученных для множества других параметров n и k, приходим к заключению о том, что неравенство (3) для кодов $B(n, k)$ не выполняется и, как следствие, справедливо следующее утверждение.

Утверждение 7. *Биномиальные коды $B(n, k)$ не образуют квазиэквидистантных последовательностей.*

Переходим к построению альтернативных биномиальных кодов. Введем числовую функцию

$$B = \alpha_n C_n^{\alpha_n} + \alpha_{n-1} C_{n-1}^{\alpha_{n-1}} + \cdots + \alpha_k C_k^{\alpha_k} + \cdots + \alpha_1 C_1^{\alpha_1}, \tag{16}$$

где $C_k^l = \binom{k}{l}$ – биномиальный коэффициент, равный числу сочетаний из k по l:

$$\binom{k}{l} = \frac{k\cdot(k-1)\cdots(k+1-l)}{l!},$$

а коэффициенты α_k определяются соотношением $\alpha_k = \overline{0, \lceil k/2 \rceil}$, в котором $\lceil x \rceil$ означает округление числа x до ближайшего целого сверху.

Ряд (16) представляется в виде двоичных коэффициентов α_k, каждому из которых отводится фиксированное число разрядов, равное числу разрядов, необходимое для бинарной записи значения $\lceil k/2 \rceil$. Коэффициент α_k однозначно определяет значение монома $\alpha_k C_k^{\alpha_k}$, как это показано в табл. 15, в которой в качестве примера выбрано значение $k = 7$.

Таблица 15 – Пример вычисление монома ряда (16)

α_7	0	1	2	3	4
$C_7^{\alpha_7}$	1	7	21	35	35
$\alpha_7 C_7^{\alpha_7}$	0	7	42	105	140

Для последовательности биномиальных кодов, формируемых числовой функцией (16), введем обозначение $B(n,r)$, в котором параметр n назовем *степенью* функции, а r – *порядком* функции, равным значению коэффициента α_n. Фрагмент биномиальных кодов приведен в табл. 16.

Таблица 16 – Последовательность биномиальных чисел $B(4,2)$

N		α_3		α_2	α_1		N		α_4		α_3		α_2	α_1
0					0		10			1	0	1	1	1
1					1		11			1	1	0	0	1
							12			1	1	0	1	0
2				1	0		13			1	1	0	1	1
3				1	1									
							14		1	0	0	0	1	0
4			1	0	1		15		1	0	0	0	1	1
5			1	1	0		16		1	0	0	1	0	1
6			1	1	1		17		1	0	0	1	1	0
							18		1	0	0	1	1	1
7		1	0	0	1		19		1	0	1	0	0	1
8		1	0	1	0		20		1	0	1	0	1	0
9		1	0	1	1		21		1	0	1	0	1	1

Для решения вопроса относительно возможности построения квазиэквидистантных биномиальных последовательностей $B_1(n,r)$ составим таблицу весов множества кодовых комбинаций (табл. 17).

Таблица 17 – Распределение весов кодовых комбинаций $B_1(n, r)$

Вес		Число разрядов биномиальной последовательности							
		3	4	5	6	7	8	9	10
0		1	1	1	1	1	1	1	1
1		2	2	2	2	2	2	2	2
2		3	5	5	6	6	6	6	6
3		1	2	4	9	9	12	12	12
4				2	4	7	15	15	17
5						2	12	12	23
6							4	8	29
7								2	18
8									4
Чет.		4	6	8	11	14	26	30	57
Нечет		3	4	6	11	13	26	28	55
Всего		7	10	14	22	27	52	58	112
Признак		+	–	–	+	+	+	–	–

В нижней строке табл. 17 знаком плюс отмечены варианты весов кодов $B(n,r)$, для которых неравенство (3) соблюдается, и знаком минус, когда неравенство не соблюдается. В первом случае существование квазиэквидистантных кодов гипотетически возможно, во втором – исключено. И, тем не менее, выполнение неравенства (3), как мы отмечали выше, является необходимым, но совсем не обязательным условием возможности построения квазиэквидистантных последовательностей для кодов $B(n,r)$, отмеченных в табл. 17 знаком +. В качестве примера в табл. 18 приведены результаты построения квазиэквидистантных кодов по методу направленного перебора на основании одного из деревьев для $B(4,2)$.

Таблица 18 – Результаты машинного синтеза кодов $B_1(4,2)$

Дерево	Ветка 1	Ветка 2	Ветка 3	Ветка 4	Ветка 5	Ветка 6	Ветка 7	Ветка 8	Ветка 9	Ветка 10
0	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000	000000
1	000001	000001	000001	000001	000001	000001	000001	000001	000001	000010
2	000101	000101	000101	000101	000101	000101	000101	000101	000101	000110
3	100101	100101	100101	100101	100101	100101	100101	100101	100101	100110
4	100111	100111	100111	100111	100111	100111	100111	100111	100111	100111
3	100011	100011	100110	100110	100110	100110	100110	100110	100110	100011
2	000011	100010	100010	100010	100010	100010	100010	100010	100010	100010
3	001011	101010	100011	100011	101010	101010	101010	101010	101010	101010
2	001010	001010	000011	000011	001010	001010	001010	001010	001010	001010
3	011010	011010	001011	001011	001011	011010	011010	011010	011010	011010
4	011011	011011	011011	101011	011011	011011	011011	011011	011011	011011
3	011001	011001	011001	101001	011001	001011	011001	011001	011001	011001
2	001001	001001	001001	001001	001001	001001	001001	001001	001001	001001
3	101001	101001	101001	011001	101001	101001	001011	101001	101001	101001
4	101011	101011	101011	011011	101011	101011	101011	101011	101011	101011
3	101010	001011	101010	011010	100011	100011	100011	001011	100011	001011
2	100010	000011	001010	001010	000011	000011	000011	000011	000011	000011
1	000010	000010	000010	000010	000010	000010	000010	000010	000010	000001
2	000110	000110	000110	000110	000110	000110	000110	000110	000110	000101
3	000111	000111	000111	000111	000111	000111	000111	000111	000111	000111
4	010111	010111	010111	010111	010111	010111	010111	010111	010111	010111
3	100110	100110	011010	101010	011010	011001	101001	100011	001011	100101

Особенность альтернативных биномиальных кодов состоит в том, и это наглядно можно проследить по табл. 18, что они не в полной мере обеспечивают возможность построения квазиэквидистантных кодов. В частности, во всех последовательностях, приведенных в табл. 18, последние коды (выделенные затенением) отстоят от предыдущих кодов на расстоянии по Хэммингу, равном 3, а не 1, как того требуют последовательности $B_1(4,2)$. Отмеченная особенность альтернативных биномиальных кодов прослеживается во всех возможных вариантах $B_1(n,r)$.

ВЫВОДЫ

Основным результатом данного исследования является получение достаточно общих условий существования квазиэквидистантных и отраженных кодов, порождаемых последовательностями равномерных двоичных кодовых комбинаций в смешанных системах счисления. В число таких кодов, кроме канонических кодов Грея, вошли факториальные, фибоначчиевые и биномиальные коды с расстоянием Хэмминга между смежными кодовыми комбинациями, равном 1. Основным методом синтеза квазиэквидистантных кодов являлся метод машинного направленного перебора. Результаты исследований легко могут быть обобщены на случаq расстояния Хэмминга, превышающего 1.

SUMMARY

BINARY REFLECTION AND QUASI- EQUIDISTANT CODES IN THE MIXED RADIX

A. Ja. Beletsky, E. A. Beletsky, R. Ju. Kandyba, D. A. Navrotsky,
National Aviation University, Kiev

The problem of constructing quasi-equidistant and reflected binary Grey code sequences in mixed factorial, Fibonacci and binomial number systems is under consideration. We propose some combinatorial structures, as well as machine algorithms of synthesis of the sequences based on the method of directed search. For the chosen sequences there were found all k quasi-equidistant (for individual cases – reflected) codes with Hamming distance equal to 1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Shannon C. T. A mathematical theory of communication // Bell. Syst. Tech. J. - 1948, Vol. 27. – P. 379 – 423, 623 – 656.
2. Ефименко В. В. Об одном алгоритме синтеза квазиэквидистантных двоичных кодов / В. В. Ефименко, Б. В. Карпюк, Ю. А. Стукалин // Автометрия. СО АН СССР. – 1968. – № 5. – С. 109-115.
3. Богданов Г. Т. О построении *q*-ичных эквидистантных кодов / Г. Т. Богданов, В. А. Зиновьев, Т. Й. Тодоров // Проблемы передачи информации. – 2007. – Вып. 4, Т. 43. – С. 13–36.
4. Белецкий А. Я. Квазиэквидистантные коды / А. Я. Белецкий, Е. А. Белецкий – К.: НАУ-друк, 2008. – 460 с.
5. Баня Е. Н. Об особенностях построения систем счисления разных классов / Е. Н. Баня, В. Л. Селиванов // Вісник НТУУ «КПІ». Інформатика, управління та обчислювальна техніка. – 2008. – № 49. – С. 68–73.
6. Борисенко А. А. Системы счисления в вычислительной технике / А. А. Борисенко, В. Б. Чередниченко // Вісник СумДУ. Серія Технічні науки. – 2009. – № 4. – С. 162–177.
7. Grey F. Pulse code communication. – Pat. USA, № 2632058, 1953.
8. Борисенко О. А. Дискретна математика: підручник / О. А. Борисенко – Суми: ВТД «Університетска книга», 2007. – 255 с.
9. Стахов А. П. Коды золотой пропорции. / А. П. Стахов – М.: Радио и связь, 1984. – 151 с.
10. Стахов А. П. Коды Фибоначчи / – www.goldenmuseum.com/1010FibCodes_rus.html
11. Зантен А. Я. Биномиальные системы счисления и нумерации комбинаторных объектов / А. Я. Зантен //Дискретный анализ и исследование операций.–1999. – Серия 1, Том 6. – С. 12–18.
12. Борисенко А. А. Биномиальный счет. Теория и практика. / А. А. Борисенко. – Сумы: СумДУ, ИТД «Университетская книга», 2004. – 170 с.

Поступила в редакцию 1 февраля 2012 г.