УДК 37.016:514.112

Гокова Т.В., Кобко Л.М.

УЗАГАЛЬНЕННЯ І СИСТЕМАТИЗАЦІЯ ЗНАНЬ УЧНІВ ПРО ПЛОЩУ ТРИКУТНИКА ЧЕРЕЗ ПОШУК РІЗНИХ РОЗВ'ЯЗАНЬ ГЕОМЕТРИЧНОЇ ЗАДАЧІ

Розглянуто різні розв'язання однієї геометричної задачі методом площ в контексті удосконалення процесу навчання з питань тематичного контролю знань, засвоєння та систематизації матеріалу.

У розв'язаннях задачі використано теоретичні відомості з планіметрії: поняття площі та її властивості, рівновеликість і рівноскладеність многокутників, різні формули обчислення площі трикутника, відношення площ подібних трикутників, властивість відношення площ трикутників зі спільною основою(зі спільною висотою), гомотетія і її властивості, скалярне множення векторів. Також використано метод площ, метод гомотетії, векторно-координатний метод.

Ключові слова: *поняття площі та її властивості, різні формули площі трикутника і чотирикутника, метод площ.*

Постановка проблеми: Розв'язування задач займає особливе місце в математичній освіті і є видом творчої діяльності, а пошук розв'язку – процесом винахідництва [11]. Розв'язування однієї задачі різними способами ефективніше ніж розв'язування кількох задач одним способом, оскільки сприяє більш глибокому розумінню і засвоєнню матеріалу. Розробки цієї тематики знаходимо в працях вчених, методистів та вчителів-практиків [1;5;6;8;9;11]. "Два доведення краще, ніж одно", – Д. Пойа [10].

Аналіз досліджень і публікацій. Основна мета навчання математики в загальноосвітній школі перш за все полягає у розвитку здатності учнів аналізувати, класифікувати, організовувати та моделювати ситуації, що виникають в оточуючому світі. Разом з тим потрібно навчити учнів логічно мислити, чітко висловлювати свої думки, як усно так і письмово. Сучасний ринок праці вимагає від випускників середньої школи здатності користуватися сучасними інформаційними технологіями та практично застосовувати здобуті знання і досвід у багатьох освітніх галузях. Важливим у сучасному житті є не лише здатність оперувати уже існуючими знаннями, а й готовність змінюватися до нових потреб ринку праці, користуватися інформацією, активно діяти, швидко приймати рішення, навчатись упродовж життя [3].

На даний час увагу вчених, спеціалістів в області математичної освіти все більше уваги звертає на себе *елементарна геометрія* [8].

В процесі розв'язування геометричних задач формуються навички розумової праці, логічного мислення, а також важливі риси характеру: наполегливість, уважність, зосередженість [1; 2; 3; 7; 8].

Майже кожну геометричну задачу можна розв'язати кількома способами. Щоб не витрачати час на ознайомлення з умовами кількох задач, іноді досить розглянути розв'язання тільки однієї, цікавої за змістом, багатої на ідеї, що має різні способи розв'язування. Особливо актуальним це є в умовах скорочення часу на вивчення математики в школі, зокрема, геометрії. Постає проблема раціонального використання навчального часу та наукової організації пізнавальної діяльності учнів як на уроках, так і вдома [5; 6; 8-11].

Мета статті – на прикладі однієї задачі проілюструвати різномаїття застосування методу площ і відомих супутніх положень планіметрії в процесі пошуку різних способів розв'язування її.

Виклад матеріалу. Одним з основних методів розв'язування задач (на обчислення, доведення, побудову) і доведення теорем в геометрії є *метод площ*.

Метод площ застосовується у працях вчених-методистів і вчителів-практиків (Г.П. Бевз, М.І. Бурда, І.А. Кушнір, Я.М. Клейман, В.П. Полонский, Е.М. Рабинович, З.А. Скопець, Г.Б. Філіповський, І.Ф. Шаригін, М.С. Якир та ін.).

Суть цього методу полягає в тому, що площу фігури виражають різними способами, порівнюючи які знаходять шукані величини.

Найчастіше площу фігури визначають "двічі": спочатку площу деякої фігури виражають через дані і шукані величини двома різними способами, потім порівнюють знайдені вирази. Дістають рівняння, з якого можна знайти шукану величину або залежність між шуканими величинами [2].

Висновок. Розв'язування геометричних задач різними способами – це пошуковий, евристичний процес, який не повторює і не копіює того, що було раніше, а спонукає до *самостійної творчості*, створює великі можливості для удосконалення навчання математики.

Задача. На сторонах *AB* і *AC* трикутника *ABC* вибрані точки *M* і *N* так, що $AB = 3AM$, $AC = 3AN$, $D = BN \cap CM$. Знайдіть площу чотирикутника *AMDN*, якщо площа трикутника *ABC* дорівнює s [4, с. 149].

Розв'язання 1. Трикутники *ABC* і *ABN* мають спільну висоту, проведену з вершини *B*, і $AC = 3AN$ (за умовою), тому $S_{ABC} : S_{ABN} = 3:1$ (рис. 1). Отже, $S_{ABN} = \frac{1}{3}S_{ABC} = \frac{1}{3}s$. Аналогічно $S_{ACM} = \frac{1}{3}s$.

Таким чином, $S_{ABN} = S_{ACM} = \frac{1}{3}s$. (1)

Побудуємо $AK \perp BN$, $CL \perp BN$ (рис. 1). За умовою $AC = 3AN$, тоді $CN = 2AN$. Оскільки $\Delta CLN \sim \Delta AKN$, то $CL : AK = CN : AN = 2$.

Трикутники *CBD* і *ABD* мають спільну основу *AD*, тому їх площі відносяться як висоти, проведені до цієї основи, тобто $S_{CBD} : S_{ABD} = CL : AK = 2$. Звідси $S_{CBD} = 2S_{ABD}$ (2). Аналогічно одержимо $S_{CBD} = 2S_{ACD}$. (3)

(2), (3) $\rightarrow$ $S_{ABD} + S_{ACD} = S_{CBD}$ (4). Маємо $S_{ABD} + S_{ACD} + S_{CBD} = S_{ABC}$. (5)

(4), (5) $\rightarrow$ $2S_{CBD} = S_{ABC}$ або $S_{CBD} = \frac{1}{2}S_{ABC} = \frac{1}{2}s$.

Тоді $S_{AMDN} = S_{ABN} + S_{ACM} + S_{CBD} - S_{ABC} = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 1\right)s = \frac{1}{6}s$.

Розв'язання 2. За умовою $AB = 3AM$, $AC = 3AN$, звідси $MB = 2AM$, $NC = 2AN$. Нехай $S_{ADM} = x$, $S_{ADN} = y$, тоді $S_{AMDN} = x + y$ (рис. 2). Оскільки $S_{ADM} : S_{BDM} = AM : MB = 1:2$ або $x : S_{BDM} = AM : MB = 1:2$, то одержимо $S_{BDM} = 2x$, аналогічно $S_{CDN} = 2y$. Крім цього $S_{ABN} = S_{ACM} = \frac{s}{3}$ (розв. 1). Маємо $S_{ABN} = x + y + 2x = 3x + y = \frac{1}{3}s$; $S_{ACM} = x + y + 2y = x + 3y = \frac{1}{3}s$.

Розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 3x + y = \frac{s}{3}, \\ x + 3y = \frac{s}{3}. \end{cases} \quad 4x + 4y = \frac{2s}{3}, \quad x + y = \frac{s}{6}. \quad \text{Отже, } S_{AMDN} = x + y = \frac{s}{6}.$$

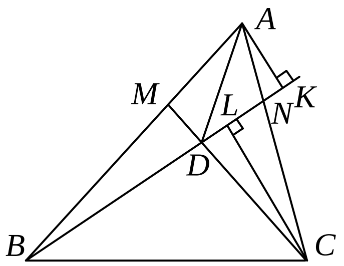

Рис. 1

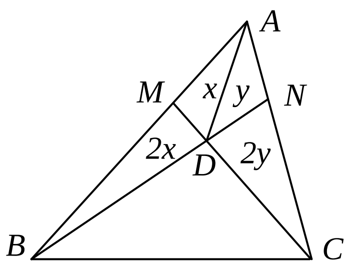

Рис. 2

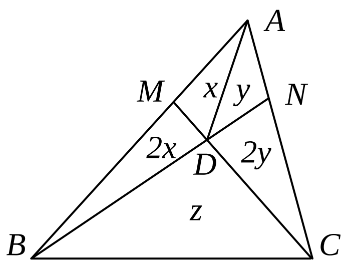

Рис. 3

Розв'язання 3. Нехай $S_{ADM} = x$, $S_{ADN} = y$, $S_{BDC} = z$ (рис. 3). Маємо $S_{AMC} = \frac{1}{3}s$ (розв. 1), тоді $S_{BMC} = \frac{2}{3}s$. Таким чином: $S_{BMC} = 2x + z = \frac{2}{3}s$, $S_{BNC} = z + 2y = \frac{2}{3}s$, $S_{ABN} = 2x + x + y = 3x + y = \frac{1}{3}s$.
Розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x + z = \frac{2}{3}s, & 2x - 2y = 0, & x = y, \\ z + 2y = \frac{2}{3}s, & 3x + x = \frac{1}{3}s, & x = \frac{s}{12}, \\ 3x + y = \frac{1}{3}s. & 2 \cdot \frac{s}{12} + z = \frac{2s}{3}, & z = \frac{s}{2}. \end{cases}$$

Отже, $S_{ADM} = \frac{s}{12}$, $S_{ADN} = \frac{s}{12}$, $S_{BDC} = \frac{s}{2}$. $S_{AMDN} = S_{ADM} + S_{ADN} = \frac{s}{12} + \frac{s}{12} = \frac{s}{6}$.

Розв'язання 4. Побудуємо відрізок *MN* (рис. 4). Оскільки $AB : AM = AC : AN = 3$ і $\angle A$ – спільний, то $\Delta ABC = \text{H}_A^3(\Delta AMN)$. Звідси $MN \parallel BC$, $BC = 3MN$. Тоді $\Delta BCD \sim \Delta NMD$ з коефіцієнтом подібності 3. Звідки $CB : MN = CD : MD = 3$.

Позначимо $S_{NMD}=x$. Відношення площ подібних трикутників дорівнює квадрату коефіцієнта подібності: $S_{BCD}:S_{NMD}=3^2$ або $S_{BCD}:x=9$, $S_{BCD}=9x$. Аналогічно одержимо $S_{ABC}:S_{AMN}=3^2$ або $s:S_{AMN}=9$, $S_{AMN}=\frac{s}{9}$.

Оскільки $CD:MD=3$ і трикутники *MND*, *CND* мають спільну висоту, проведену з вершини *N*, то $S_{MND}:S_{CND}=MD:CD=1:3$ або $x:S_{CND}=1:3$, $S_{CND}=3x$. Аналогічно одержимо $S_{BMD}=3x$. Тоді $S_{ABC}=x+9x+3x+3x+\frac{s}{9}=s$, звідки $x=\frac{s}{18}$, тобто $S_{NMD}=\frac{s}{18}$. Отже, $S_{AMDN}=\frac{s}{9}+\frac{s}{18}=\frac{s}{6}$.

Розв'язання 5. Позначимо $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$ (рис. 4). $\Delta ABC=\mathrm{H}_A^3(\Delta AMN)$

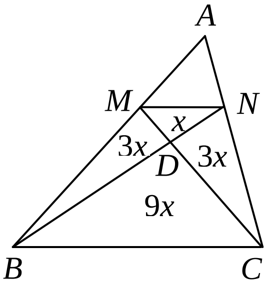

Рис. 4

Оскільки (розв. 4), то $AM=\frac{c}{3}$, $AN=\frac{b}{3}$, $MN=\frac{a}{3}$.

Обчислимо площу ΔAMN за формулою Герона $S_{ABC}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, де $p=\frac{a+b+c}{2}$. Маємо $p_1=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{3}+\frac{b}{3}+\frac{c}{3}\right)=\frac{p}{6}$,

тоді $p_1-\frac{a}{3}=\frac{a+b+c}{6}-\frac{a}{3}=\frac{p-a}{3}$, $p_1-\frac{b}{3}=\frac{p-b}{3}$, $p_1-\frac{c}{3}=\frac{p-c}{3}$,

$$S_{AMN}=\sqrt{p_1\left(p_1-\frac{a}{3}\right)\left(p_1-\frac{b}{3}\right)\left(p_1-\frac{c}{3}\right)}=$$

$$=\sqrt{\frac{p}{3}\cdot\frac{p-a}{3}\cdot\frac{p-b}{3}\cdot\frac{p-c}{3}}=\frac{1}{9}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\frac{s}{9}.$$

Крім цього $\Delta DCB=\mathrm{H}_D^{-3}(\Delta DMN)$. За властивістю гомотетії $S_{DCB}:S_{DMN}=(-3)^2$. Оскільки $S_{DCB}=\frac{1}{2}s$ (розв. 1), то одержимо $\frac{s}{2}:S_{DMN}=9$, звідки $S_{DMN}=\frac{s}{18}$. Таким чином, $S_{AMDN}=S_{AMN}+S_{DMN}=\frac{s}{9}+\frac{s}{18}=\frac{s}{6}$.

Розв'язання 6. Виберемо прямокутну систему координат $O;\vec{i};\vec{j}$ так, щоб початок координат співпав з точкою *B*, а вісь *x* – з прямою *BC* (рис. 5).

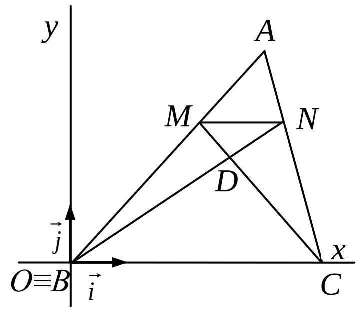

Рис. 5

Нехай в $O;\vec{i};\vec{j}$ $A(a;b)$, $B(0;0)$, $C(c;0)$. Оскільки відношення, в якому точка *N* ділить відрізок *AC*, дорівнює λ $N;\overrightarrow{AC}$ $=\frac{\overrightarrow{AN}}{\overrightarrow{NC}}=\frac{AN}{NC}=\frac{1}{2}$,

то $x_N=\frac{x_A+\lambda x_C}{1+\lambda}=\frac{a+\frac{1}{2}c}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2a+c}{3}$, $y_N=\frac{b+\frac{1}{2}\cdot 0}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2b}{3}$.

Отже, $N\left(\frac{2a+c}{3};\frac{2b}{3}\right)$.

Аналогічно знайдемо $M\left(\frac{2a}{3};\frac{2b}{3}\right)$. Складемо рівняння прямих *BN* і *CM* (рис. 5), застосувавши рівняння прямої, заданої двома точками: $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$.

BN: $\frac{y-0}{\frac{2b}{3}-0}=\frac{x-0}{\frac{2a+c}{3}-0}$, $2bx-(2a+c)y=0$. *CM*: $2bx-(2a-3c)y-2bc=0$.

Знайдемо координати точки *D*, розв'язавши систему рівнянь:

$$\begin{cases}2bx-(2a+c)y=0,\\ 2bx-(2a-3c)y-2bc=0.\end{cases}\quad x=\frac{2a+c}{4},\ y=\frac{b}{2},\ D\left(\frac{2a+c}{4};\frac{b}{2}\right). \qquad (2)$$

Використавши ключову задачу 5 [5, с. 5], обчислимо S_{AMN}, S_{DMN}, S_{ABC} за координатами вершин за формулою $S=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}x_2-x_1 & y_2-y_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1\end{matrix}\right\|$.

$$S_{AMN}=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}a-\frac{2a}{3} & b-\frac{2b}{3}\\ \frac{2a+c}{3}-\frac{2a}{3} & \frac{2b}{3}-\frac{2b}{3}\end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}\frac{a}{3} & \frac{b}{3}\\ \frac{c}{3} & 0\end{matrix}\right\|=\frac{bc}{18},\quad S_{ABC}=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}a-0 & b-0\\ c-0 & 0-0\end{matrix}\right\|=\frac{bc}{2}$$

$$S_{DMN}=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}\frac{2a+c}{4}-\frac{2a}{3} & \frac{b}{2}-\frac{2b}{3}\\ \frac{2a+c}{3}-\frac{2a}{3} & \frac{2b}{3}-\frac{2b}{3}\end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}\frac{3c-2a}{12} & -\frac{b}{6}\\ \frac{c}{3} & 0\end{matrix}\right\|=\frac{bc}{36}.$$

Тоді $S_{AMDN}=S_{AMN}+S_{DMN}=\frac{bc}{18}+\frac{bc}{36}=\frac{bc}{12}=\frac{1}{6}\cdot\frac{bc}{2}=\frac{1}{6}S_{ABC}=\frac{1}{6}s$.

Розв'язання 7. У вибраній системі координат (рис. 7) $A(a;b)$, $B(0;0)$, $C(c;0)$, $M\left(\frac{2a}{3};\frac{2b}{3}\right)$. Крім цього $DM:CD=1:3$ (розв. 4). Тоді $\lambda\left(D,\overrightarrow{CM}\right)=\overrightarrow{CD}:\overrightarrow{DM}=CD:DM=3$.

Обчислимо: $x_D=\frac{x_C+\lambda x_M}{1+\lambda}=\frac{c+3\cdot\frac{2a}{3}}{1+3}=\frac{2a+c}{4}$; $y_D=\frac{0+3\cdot\frac{2b}{3}}{1+3}=\frac{b}{2}$, $D\left(\frac{2a+c}{4};\frac{b}{2}\right)$,

$$S_{AMD}=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}\frac{2a}{3}-a & \frac{2b}{3}-b\\ \frac{2a+c}{4}-a & \frac{b}{2}-b\end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}-\frac{a}{3} & -\frac{b}{3}\\ \frac{c-2a}{4} & -\frac{b}{2}\end{matrix}\right\|=\frac{bc}{24}.$$

Оскільки $S_{AND}=S_{AMD}$ (розв. 3), то $S_{AMDN}=2S_{AMD}=2\cdot\frac{bc}{24}=\frac{bc}{12}$ (1). Маємо $S_{ABC}=\frac{bc}{2}$ (розв. 6) (2).

(1), (2) $\rightarrow$ $S_{ABC}:S_{AMDN}=\frac{bc}{2}:\frac{bc}{12}$ або $s:S_{AMDN}=6:1$, $S_{AMDN}=\frac{s}{6}$.

Розв'язання 8. Використавши скалярне множення векторів, площу трикутника, заданого координатами вершин, можна обчислити за формулою $S_{ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{\left(\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\right)^2-\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right)^2}$. Дійсно

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin A=\frac{1}{2}\sqrt{(AB\cdot AC)^2\sin^2 A}=\frac{1}{2}\sqrt{(AB\cdot AC)^2(1-\cos^2 A)}=\frac{1}{2}\sqrt{\left(\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\right)^2-\left(\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos A\right)^2}=$$
$$=\sqrt{\left(\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\right)^2-\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right)^2}.$$

В $(O;\vec{i};\vec{j})$ $A(a;b)$, $B(0;0)$, $C(c;0)$, $M\left(\frac{2a}{3};\frac{2b}{3}\right)$, $N\left(\frac{2a+c}{3};\frac{2b}{3}\right)$, $D\left(\frac{2a+c}{4};\frac{b}{2}\right)$ (розв. 7). Тоді $\overrightarrow{BA}(a;b)$, $\overrightarrow{BC}(c;0)$, $\overrightarrow{MA}\left(\frac{a}{3};\frac{b}{3}\right)$, $\overrightarrow{MN}\left(\frac{c}{3};0\right)$ $\overrightarrow{MD}\left(\frac{3c-2a}{12};-\frac{b}{6}\right)$,

$$\left|\overrightarrow{MA}\right|=\sqrt{\left(\frac{2a}{3}-a\right)^2+\left(\frac{2b}{3}-b\right)^2}=\sqrt{\frac{a^2}{9}+\frac{b^2}{9}},\quad \left|\overrightarrow{MN}\right|=\frac{c}{3},\quad \left|\overrightarrow{MD}\right|=\sqrt{\left(\frac{3c-2a}{12}\right)^2+\frac{b^2}{36}}=\frac{\sqrt{9c^2+12ac+4a^2+4b^2}}{12}.$$

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{\left(\left|\overrightarrow{BA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right|\right)^2-\left(\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{(a^2+b^2)\cdot c^2-a^2c^2}=\frac{bc}{2},$$

$$S_{AMN}=\frac{1}{2}\sqrt{\left(\left|\overrightarrow{MA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{MN}\right|\right)^2-\left(\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MN}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2+b^2}{9}\cdot\frac{c^2}{9}-\frac{a^2c^2}{81}}=\frac{bc}{18},$$

$$S_{DMN}=\frac{1}{2}\sqrt{\left(\left|\overrightarrow{MD}\right|\cdot\left|\overrightarrow{MN}\right|\right)^2-\left(\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{MN}\right)^2}=\sqrt{\frac{(9c^2+12ac+4a^2+4b^2)\cdot c^2}{12^2\cdot 3^2}-\frac{(3c^2-2ac)^2}{36^2}}=\frac{bc}{36}.$$

Знайдемо площу чотирикутника *AMDN* (рис. 6): $S_{AMDN}=S_{AMN}+S_{DMN}=\frac{bc}{18}+\frac{bc}{36}=\frac{bc}{12}=\frac{1}{6}\cdot\frac{bc}{2}=\frac{1}{6}\cdot S_{ABC}=\frac{1}{6}s.$

Зауваження. Пропонуємо площу чотирикутника *AMDN* обчислити за формулою $S_{AMDN}=S_{AMD}+S_{AND}$ (рис. 7).

Розв'язання 9. За умовою $AB=3AM$, $AC=3AN$, $S_{ABC}=s$, *D* – точка перетину *BN* і *CM* (рис. 8). З точок *A*, *D*, *N* опустимо перпендикуляри *AH*, *DE*, *NF* на пряму *BC*. Тоді $\Delta ACH \sim \Delta NCF$ (прямокутні, за гострим кутом). Звідси $AH:NF=AC:NC=3:2$, тобто $NF=\frac{2}{3}AH$. Крім цього $\Delta BDE\sim\Delta BNF$, звідки

$DE:NF = BD:BN$. Оскільки $BD = 3DN$ (розв. 4), то $BD:BN = 3:4$. Таким чином, $DE:\frac{2}{3}AH = 3:4$, звідки $DE = \frac{1}{2}AH$. Знайдемо $S_{BDC} = \frac{1}{2}BC \cdot DE = \frac{1}{4}BC \cdot AH = \frac{1}{2}S_{ABC} = \frac{s}{2}$.

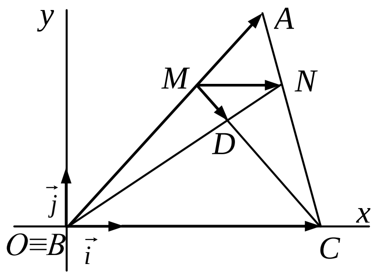

Рис. 6

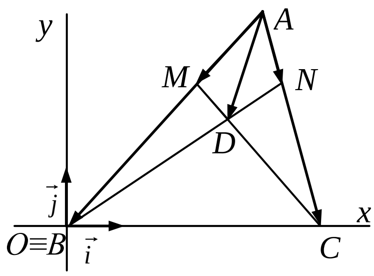

Рис. 7

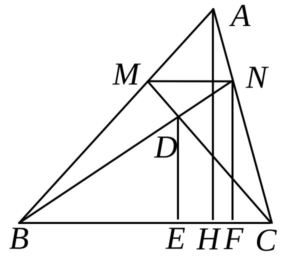

Рис. 8

Позначимо $\angle BAC = \alpha$, $\angle MDN = \delta$, $MBD = \varphi$ (рис. 9).

$S_{AMN} = \frac{1}{2}AM \cdot AN \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}AB\cdot\frac{1}{3}AC\cdot\sin\alpha = \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin\alpha = \frac{s}{9}$.

$S_{DMN} = \frac{1}{2}DM \cdot DN \cdot \sin\delta = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}CD\cdot\frac{1}{3}BD\cdot\sin\delta = \frac{1}{9}\cdot\frac{s}{2} = \frac{s}{18}$. Отже, $S_{AMDN} = S_{AMN} + S_{DMN} = \frac{s}{9} + \frac{s}{18} = \frac{s}{6}$.

Розв'язання 10. За умовою $S_{ABC} = s$, $AB = 3AM$ (рис. 9), тоді $BM = \frac{2}{3}AB$. Маємо $BD = \frac{3}{4}BN$ (розв. 9), $S_{ABN} = \frac{s}{3}$ (розв. 1). Обчислимо $S_{BMD} = \frac{1}{2}BM \cdot BD \cdot \sin\varphi = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}AB\cdot\frac{3}{4}BN\cdot\sin\varphi = \frac{1}{2}S_{ABN} = \frac{1}{2}\cdot\frac{s}{3} = \frac{s}{6}$.

Тоді $S_{AMDN} = \ S_{ABN} - S_{MBD} = \frac{s}{3} - \frac{s}{6} = \frac{s}{6}$.

Розв'язання 11. За умовою $AB = 3AM$, $S_{ABC} = s$ (рис. 10). Маємо $BN = 4DN$ (розв. 9). Трикутники *ABN* і *ADN* мають спільну висоту *AH*, тому $S_{ABN} : S_{ADN} = BN : DN = 4:1$ або $\frac{s}{3} : S_{ADN} = 4$, звідки $S_{ADN} = \frac{s}{12}$. Тоді $S_{ABD} = S_{ABN} - S_{ADN} = \frac{s}{3} - \frac{s}{12} = \frac{s}{4}$. Оскільки $S_{AMD} : S_{ABD} = AM : AB = 1:3$, то $S_{AMD} : \frac{s}{4} = 1:3$, звідки $S_{AMD} = \frac{s}{12}$. Отже, $S_{AMDN} = S_{ADN} + S_{AMD} = \frac{s}{12} + \frac{s}{12} = \frac{s}{6}$.

Розв'язання 12. Трикутники *ABN* і *ABD* мають спільну висоту *NH* (рис. 11). Оскільки $S_{ABN} = \frac{s}{3}$ і $AB = 3AM$ (розв. 1), то одержимо: $S_{ABN} : S_{AMN} = AB : AM = 3:1$, тобто $\frac{s}{3} : S_{AMN} = 3:1$, звідки $S_{AMN} = \frac{s}{9}$. Тоді $S_{BMN} = S_{ABN} - S_{AMN} = \frac{s}{3} - \frac{s}{9} = \frac{2s}{9}$. Тоді $S_{BMN} : S_{DMN} = BN : DN = 4:1$ або $\frac{2s}{9} : S_{DMN} = 4:1$, звідки $S_{DMN} = \frac{s}{18}$.

Отже, $S_{AMDN} = S_{AMN} + S_{DMN} = \frac{s}{9} + \frac{s}{18} = \frac{s}{6}$.

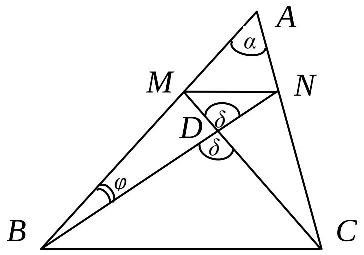

Рис. 9

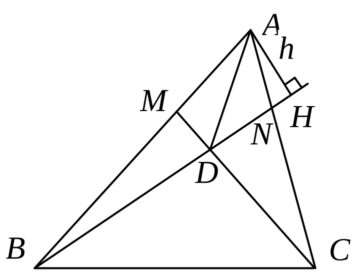

Рис. 10

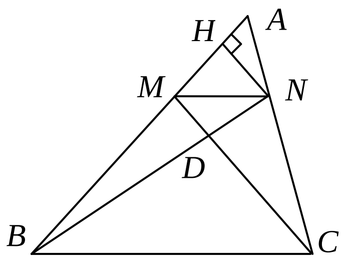

Рис. 11

Використані джерела

1. Бевз Г.П. Методика викладання математики. Навч. посіб. / Г.П. Бевз. – К.: Вища школа, 1987. – 367 с.
2. Бурда М.І. Геометрія: Навч. посіб. Для 8-9 кл. шк. з поглиб. вивченням математики / М.І. Бурда, Л.М. Савченко. – К. : Освіта, 1998. – 240 с.
3. Буткова Віра. Фінський досвід успішного навчання математики в школі / Віра Буткова // Математика в школі. – 2008. – №5. – С. 52-56.
4. Вересова Е.Е. Практикум по решению математических задач: Учебное пособие для институтов / Е.Е. Вересова, Н.С. Денисова, Т.Н. Полякова. – М. : Просвещение, 1979. – 240 с.
5. Ігнатенко М. Одна геометрична задача крізь різні розділи / Микола Ігнатенко, Лідія Кобко // Математика в сучасній школі. – 2013. – №4. – С.4-8.
6. Клейман Я.М. Решение задач различными способами предоставляет большие возможности для усовершенствования обучения математики / Я.М. Клейман // Математика в школі. – 1987. – №6. – С. 23-28.
7. Кушнир И.А. Воспитание творческой активности на уроках геометрии / И.А. Кушнир // Математика в школе. – 1991. – №1. – С. 12-16.
8. Кушнир Исаак. Геометрия на баррикадах. – 2-е изд., доп. и перераб. – К. : Факт, 2009. – 724 с.
9. Наконечный М.Н. Различные способы решения задач спсобствуют эффективности обучения / М.Н. Наконечный // Математика в школе. – 1980. – №4. – С. 45-47.
10. Пойа Д. Как решать задачу? / Д. Пойа. – Львов: Журнал "Квантор", 1991. – 215 с.
11. Соловей Микола. Урок однієї задачі / Микола Соловей // Математика. – 2007. – №9 (берез.). – С. 18-21.

Hokova T., Kobko L

GENERALIZATION AND SYSTEMATIZATION OF KNOWLEDGE ABOUT A TRIANGLE AREA THROUGH SEARCHING OF DIFFERENT WAYS OF SOLVING A GEOMETRIC PROBLEM

Different solutions of a certain geometric problem by the area method in the context of improving of the process of study regarding thematic knowledge control, learning and systematization of the material are considered. In the solutions of the problem the theoretical data of plain geometry are applied: the notion of area and its properties, equality and decomposition-equality of polygons, different formulas of triangle area calculation, areas ratio of similar triangles, the property of ratio of areas of triangles with a common base (with a common altitude), homothety and its properties, scalar product of vectors. Also there used the area method, the homothety method, the vector-coordinate method, the method of auxiliary constructions.

Problem solving holds a specific place in the mathematics education and is a kind of creative activity, whereas the search of solution is a process of invention. Solving a problem in different ways is more effective than solving several problems in one way since it helps to deeper understanding and learning the subject.

The main purpose of teaching mathematics in secondary school primarily is to develop students' ability to analyze, classify, organize and simulate situations that arise in the surrounding world. Meanwhile, it is necessary to teach students to think logically, to express their thoughts clearly, both verbally and in writing. The current labor market requires high school graduates to have the ability to use modern information technologies and practically apply the knowledge and experience in many areas of education. In modern life not only the ability to operate with already existing knowledge is important, but also the willingness to change under the new labor market needs, the active usage of information, the productive activity, making decisions quickly, learning throughout life. Solving geometric problems in different ways is a search, heuristic process that doesn't repeat and copy what was before but motivates for individual creativity, creates great opportunities for improvement of teaching mathematics. This active material helps to make knowledge deeper, forms ability and practical skills, lets to test theoretical knowledge for durability in practice.

Key words: *concept of area and its properties, different formulas of triangle and quadrilateral area, the area method.*

Стаття надійшла до редакції 17.08.2015