УДК 004.32:532.5

С. А. Положаенко, *д.т.н., профессор*,
e-mail: polozhaenko@mail.ru
Х. М. Мухиалдин, *аспирант*
hassan_mohammed88@yahoo.com
Одесский национальный политехнический университет
просп. Шевченко, 1, г. Одесса, 65044, Украина

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РЕОЛОГИИ ФРАКТАЛЬНО-НЕОДНОРОДНЫХ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ ПЛАСТОВЫХ СИСТЕМ

Исследовано условие «гладкости» фронта раздела составляющих многокомпонентных (гетерогенных) систем на основании анализа «скачка» насыщенности в функции Баклея-Леверетта. Показано, что «скачок» насыщенности отсутствует, а фронт раздела продвигается устойчиво и сохраняет «гладкость», если подвижность вытесняющей компоненты не превышает подвижность вытесняемой. Также показано, что нарушение «гладкости» фронта раздела приводит к фрактально-неоднородной структуре процесса реологии. Получены численные значения фрактальной размерности фронта раздела для реологического процесса, развивающегося в реальных геологических условиях. Предложена математическая модель фрактально-неоднородной многокомпонентной (гетерогенной) системы в классе вариационных неравенств.

Ключевые слова: *многокомпонентная система, гетерогенная система, процесс реологии, фрактально-неоднородная структура, фрактальный кластер, математическая модель, вариационное неравенство.*

Введение. В последние годы появился ряд работ (например, [1]), в которых исследуются вопросы ранее не изученного влияния процесса образования фрактальных структур на фильтрацию внутрипластовых жидкостей. Это влияние может осуществляться за счет *фрактальной структуры* пористой среды [2] или самой системы фильтрующихся жидкостей, имеющих *гетерогенный характер* [3]. В работе [2] утверждается, что переход от линейного закона фильтрации к нелинейному в большой степени зависит от распределения пор по размерам или фрактальности структуры пористой среды (или, иными словами, самоподобия структуры пористой среды, сохраняющегося в случае изменения геометрических размеров ее пор). Вместе с тем в [3] показано, что гетерогенные жидкости, в частности, эмульсии и системы многофазных несмешивающихся жидкостей, обладают динамической фрактальной структурой, которая определяется взаимодействием между частицами дисперсной фазы.

Учитывая вышесказанное, практически важным является определение фрактальных характеристик грунтов пористой среды и их влияние на фильтрацию пластовых жидкостей. Имеется ряд работ по экспериментальному определению фрактальной размерности пористых сред. В частности, в работе [4] методом сканирующей электронной микроскопии определена пространственная фрактальная размерность реального образца пористой среды, в [5] впервые предложен метод определения фрактальной размерности по экспериментальной изотерме адсорбции газа, который (метод) нашел своё развитие в работах [6, 7]. В работах [8, 9] предложены косвенные способы определения фрактальных характеристик пласта по кривым восстановления давления [8] и реакции пластовой системы на мгновенное изменение давления [9].

Однако в приведенных работах фрактальные свойства пористой среды и их влияние на фильтрационные процессы внутрипластовых жидкостей исследовались на основе натурных экспериментов. Это затруднительно в практической реализации, поскольку требует проведения экспериментов в условиях реальной пластовой системы (или ее физического воспроизведения при лабораторных исследованиях), специального оборудования и значительных ресурсных затрат.

Представляется перспективным, с точки зрения временных и ресурсных затрат, использовать средства математического моделирования для исследования фрактальных геологических структур и реологии (фильтрации в пористой среде) фрактально-неоднородных гетерогенных пластовых систем. Важным этапом проведения математического моделирования для указанных задач является формирование адекватной математической модели (ММ) исследуемых процессов. В ряде работ, например [10–12], выполнена попытка формализации реологии в пористых средах для случая фрактальной структуры последней, однако приведенные модели получены для идеального лотка Хелле-Шоу и имеют исключительно теоретическое значение. При этом следует отметить, что к настоящему моменту в литературе не выявлено ММ, описывающих реологические процессы для фильтрующихся гетерогенных (в том числе и многофазных) систем и обеспечивающих решение практических задач в условиях реальных фрактально-неоднородных пластовых структур.

Цель работы – разработка ММ реологии во фрактально-неоднородных пористых средах гетерогенных многофазных систем.

Основная часть. Важным фактом физической картины реологии многофазных, в частности, гетерогенных систем во фрактально-неоднородных средах является то [3], что при уменьшении взаимодействия между частицами, вследствие снижения концентрации дисперсной фазы, фрактальная структура фильтрующейся системы исчезает. Иными словами, можно утверждать, что, в данном случае, процесс реологии носит *выраженный направленный характер*.

Как показано в ряде работ, например [13], адекватным математическим описанием реологических процессов в пластовых пористых средах с выраженной направленностью развития процесса являются вариационные неравенства. Исходя из этого, в дальнейшем будем разрабатывать ММ процесса реологии во фрактально-неоднородных пористых средах в классе вариационных неравенств в частных производных.

1. Качественное описание процесса реологии многокомпонентной (гетерогенной) системы в пористой среде. Для фильтрующихся многофазных жидкостей (систем) важным аспектом при моделировании динамики является определение *фронта раздела* между отдельными компонентами. Данная задача может иметь и самостоятельное прикладное значение, например, когда исследуется процесс вытеснения одной жидкости другой.

Предположение о «гладкости» фронта раздела компонент в фильтрующейся многофазной (а также гетерогенной) системе возможно лишь в случае «близости» физико-химических свойств этих компонент (или мелкодисперсности и низкой концентрации гетерогенной системы). В противном случае «гладкость» фронта нарушается, а фильтрующийся поток приобретает фрактально-неоднородную структуру со «сложным» фронтом раздела фаз. Ещё более сложную картину реологии приобретает случай, когда с границей Γ области моделирования Ω контактируют разные компоненты многофазной (или гетерогенной) системы.

В пластовой гидрогазодинамике условием, определяющим границу раздела двух (для простоты дальнейшего рассмотрения) фильтрующихся компонент многофазного или гетерогенного потока, может служить «скачок» насыщенности в функции Баклея-Леверетта [14–16]

$$J(S) = \frac{k_1^0(S_1)}{\mu_1 k_1^0(S_1) + \mu_2 k_2^0(S_2)}, \tag{1}$$

где $k_1^0(S_1)$ и $k_2^0(S_2)$ – относительные фазовые проницаемости фильтрующихся компонент; μ_1 и μ_2 – их вязкости; S_1 и S_2 – насыщенности порового пространства фильтрующимися компонентами, соответственно.

Физически «скачок» насыщенности обусловлен наличием у одной из компонент многофазной системы напряжения сдвига τ, превышающего предельное значение ($\tau > \tau^*$). В литературе данная компонента получила название «вытесняющей» [13–16]. Экспериментально установлено [14], что фронт раздела фильтрующихся компонент многофазной системы продвигается устойчиво (т.е. фрактально-неоднородная структура процесса реологии отсутствует), если подвижность вытесняющей компоненты не превышает подвижность вытесняемой компоненты

$$\frac{k_1(S_1)}{\mu_1} \le \frac{k_2(S_2)}{\mu_2}. \tag{2}$$

Данный случай реологии двухкомпонентной системы (т.е. с «гладкой» границей раздела) иллюстрирует рис. 1, а, на котором представлена динамика процесса фильтрации водонефтяной смеси (вода – вытесняющая компонента, занимающая светлую область; нефть – вытесняемая компонента, занимающая темную область) между двумя эксплуатационными скважинами (обозначены на рисунке черными точками).

На практике более удобно пользоваться выражением, полученным из (2), делением последнего на усреднённую скорость фильтрации ϖ

$$\frac{\partial P(t,z)}{\partial \eta} > 0, \quad \frac{\partial P_c(S)}{\partial \eta} > 0, \qquad (3)$$

где $P(t,z)$ задает внутрипластовое (усредненное) давление для фильтрующихся компонент многофазной системы; $P_c(S)$ – капиллярное давление, обусловленное наличием различных скоростей фильтрации для компонент в многокомпонентной системе; η – нормаль к градиенту внутрипластового давления $P(t,z)$ на границе Γ.

В противном случае скорость фильтрации вытесняемой компоненты ϖ_2 выше скорости изменения насыщенности вытесняющей компоненты, что приводит к образованию фрактально-неоднородной структуры процесса реологии, т.е. существенному нарушению «гладкости» фронта раздела (рис. 1, б, в). При этом физическая картина реологического процесса характеризуется появлением «пальцев» вытесняющей компоненты (рис. 1, г, д). В предельном случае в фильтрующемся потоке возможно даже образование «застойных зон» [13, 14], представляющих собой участки вытесняемой компоненты с нулевой скоростью фильтрации $\varpi_2 = 0$ (рис. 1, е, ж, з). Иными словами, вытесняемая компонента «отступает» медленнее, чем продвигается вытесняющая компонента, что физически и определяет механизм образования фрактально-неоднородной структуры и, как следствие, «застойных зон».

Предположим, что в момент времени $t = 0$ поверхность фронта раздела представляет собой плоскость $F(z_i) = \Xi_0, i = 1,2$. Нарушение устойчивости фронта раздела учтем в виде нестационарных возмущений, нарушающих постоянство насыщенностей компонент S_j многофазной системы ($j = 2$ – для двухфазного случая) в областях распространения фронта и искажающих его «гладкость», что отразится следующим образом:

$$F(z_i, t) = \Xi_0(t);\ i = 1,2, \qquad (4)$$

где z_i соответствуют координатам в невозмущенной плоскости фронта раздела.

Выраженная направленность развития рассматриваемого процесса реологии, о которой говорилось выше, свидетельствует об его отклонении от линейного закона Дарси [14–16] (т.е. о пропорциональной линейной зависимости скорости фильтрации ϖ от градиента внутрипластового давления $grad(P)$) и о возможном наличии предельного градиента G, обусловливающего ненулевую скорость продвижения фронта раздела. Формализовано данное предположение представим следующим образом (для двухкомпонентного потока, $j = 1,2$)

$$\varpi_j = -\frac{k_j(S_j)}{\mu_j}\left[grad(P_j) - \frac{G_j}{\left|grad(P_j)\right|}\right];$$

$$\left|grad(P_j)\right| > G_j,\ \varpi_j = 0;$$

$$\left|grad(P_j)\right| \le G_j;\ j = 1,2. \qquad (5)$$

Уравнения динамики вида (5) дополним уравнениями неразрывности (случай двух компонент в многофазной системе)

$$div(\varpi_j) - (-1)^j m \frac{\partial S_j}{\partial t} = 0;\quad j = 1,2. \qquad (6)$$

Граничные условия (ГУ) на возмущенной поверхности фронта раздела компонент (4), выражающие равенство давлений перед и за фронтом раздела, а также расходов

$$\frac{\partial Q_1}{\partial \eta} = m\overline{\varpi}\left(S_1^h - S_1^f\right);\ \frac{\partial Q_2}{\partial \eta} = m\overline{\varpi}\left(S_2^h - S_2^f\right),$$

определены на невозмущенной поверхности фронта вытеснения Ξ_0.

Очевидно, что для «гладкости» границы раздела требуется ограниченность возмущений на поверхности Ξ_0. Тогда для определения возмущений скоростей, давлений и насыщенностей получим следующие выражения (в приведенных ниже выражениях возмущения соответствующих величин обозначены знаком тильда, а невозмущенные величины обозначены индексом 0):

$$\varpi_j = -\frac{k_j(S_j)}{\mu_j} J_0(S_j)\left[grad(\tilde{P}_j) - \frac{G_j}{\left|grad(\tilde{P}_j)\right|}\right];$$

$$\left|grad\left(\widetilde{P}_j\right)\right| > G_j\,, \quad \varpi_j = 0\,;$$

$$\left|grad\left(\widetilde{P}_j\right)\right| \le G_j\,; \quad j = 1,2\,, \qquad (7)$$

с ГУ, учитывающими ограниченные возмущения (или их отсутствие) на поверхности фронта $F(z_i) = \Xi_0;\, i = 1,2$

$$\frac{\partial \widetilde{P}(t, z_i)}{\partial \eta} > 0, \quad \frac{\partial \widetilde{P}_c(S)}{\partial \eta} > 0\,; \quad i = 1,2\,, \qquad (8)$$

$$\frac{\partial \widetilde{Q}_j}{\partial \eta} = m\overline{\varpi}\left(S_j^h - S_j^f\right); \quad j = 1,2\,. \qquad (9)$$

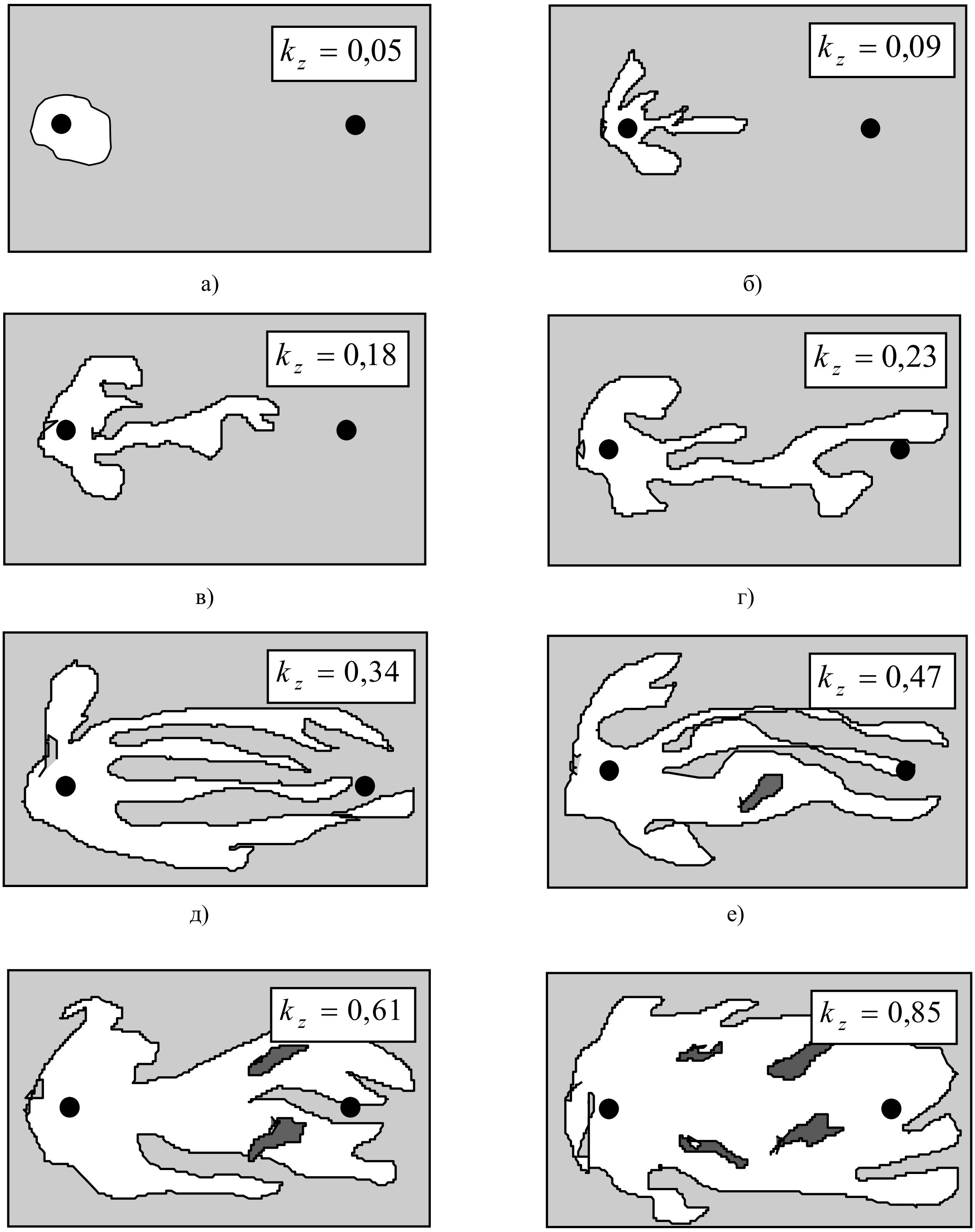

Рис. 1. Картина реологии двухкомпонентной системы на примере водонефтяной смеси при различных значениях пропускной способности k_z пористой среды

Таким образом, формулировка задачи об устойчивости фронта раздела компонент многофазной системы фактически сводится к определению возмущений насыщенности («скачку» насыщенности) из системы (7) с ГУ (8), (9).

Однако возникновение фрактально-неоднородной структуры процесса реологии свидетельствует о значительных возмущениях фронта раздела компонент многофазной системы, что, формализовано, должно быть отражено в граничных условиях, поскольку последние определяют геометрию фронта раздела. В соответствии с одним из свойств, составляющих основу определения фрактальных систем, фрактальная структура представляет собой систему с *дробной размерностью* (именуемой в литературе, например [1, 3, 10, 11], *фрактальной размерностью*), геометрически объединяющая *фрактальные кластеры* (или *агрегаты*). При этом фрактальный кластер представляет собой совокупность достаточно большого числа элементов, которые внутри данной совокупности сохраняют свою индивидуальность [3, 10, 11]. С точки зрения реологии многокомпонентных систем, под фрактальным кластером будем понимать совокупность «пальцев» вытесняющей компоненты на фронте раздела (рис. 1, г, д).

Если выполнить аппроксимацию фронта раздела в пределах одного «пальца» ломаной линией, то ее длину можно представить в следующем виде:

$$L = a\left(R/a\right)^{D}, \tag{10}$$

где L – линейный размер «пальца» вытесняющей компоненты (по прямой); a – размер звена ломаной линии (усреднённый размер «зерна» порового пространства); R – размер фрактального кластера (радиус сферы, охватывающий «палец»); D – фрактальная размерность, обеспечивающая для кластера определенную область масштабов, в которой выполняется аппроксимация вида (10).

Разрешая (10) относительно фрактальной размерности D, получим

$$D = \left[\ln(L) - \ln(a)\right]/\left[\ln(R) - \ln(a)\right]. \tag{11}$$

Учитывая реальные (усреднённые) геологические значения параметров [8, 14], входящих в (10), и подставляя их в (11), можно оценить величину фрактальной размерности для пористых сред, в которых осуществляется реология многокомпонентных (или гетерогенных) систем

$$D = \left[\ln(100) - \ln(0{,}1)\right]/\left[\ln(50) - \ln(0{,}1)\right] =$$
$$= \left[4{,}605 - (-2{,}302)\right]/\left[3{,}912 - (-2{,}302)\right] = 1{,}112\,.$$

Далее, имея реологические фрактальные характеристики многокомпонентной (гетерогенной) системы при значительных возмущениях фронта раздела компонент, можно получить *математическую модель* процесса реологии фрактально-неоднородной гетерогенной системы.

2. Формализация задачи реологии фрактально-неоднородной гетерогенной системы в виде вариационного неравенства. Сформируем ММ процесса реологии фрактально-неоднородной системы, характеризующуюся нарушениями «гладкости» фронта раздела компонент. Запишем для плоского случая ($i = 2$) уравнения динамики вида (7) соответственно для вытесняемой компоненты ($j = 1$) и вытесняющей компоненты ($j = 2$) с учетом «скачка» насыщенности в функции Баклея-Леверетта и параметра пористости m среды, в которой реализуется реологический процесс

$$(-1)^{j}\,\frac{m\,\partial S_j}{\partial t} - \frac{k_j(S_j)}{\mu_j}\,J(S_j)\times$$
$$\times\left\{\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial}{\partial z_i}\left[\frac{\partial\widetilde{P}}{\partial z_i} - \frac{d\widetilde{P}_c}{dS_j} - G_j\left(\left|\frac{\partial\widetilde{P}}{\partial z_i}\right|\right)^{-1}\right]\right\} = \frac{1}{h}Q_j\,, \tag{12}$$

где h – толщина реологического пласта (в литературе используется термин «мощность пласта», например, [13, 15, 16]).

Начальные и граничные условия примут вид

$$S_j(0,z)\Big|_{z\in\Omega} = S_{j_0}\,(z);$$
$$\widetilde{P}(0,z)\Big|_{z\in\Omega} = \widetilde{P}_0(z),\quad j = 1,2 \tag{13}$$

$$\left.\frac{\partial\widetilde{P}}{\partial\eta}\right|_{L\in\Gamma} > 0;\quad \left.\frac{\partial S_j}{\partial\eta}\right|_{L\in\Gamma} > 0;$$
$$\left.\frac{\partial P_c(S_j)}{\partial\eta}\right|_{L\in\Gamma} > 0,\quad j = 1,2. \tag{14}$$

Приведем ММ процесса реологии фрактально-неоднородной системы к вариационной форме (вариационному неравенству). С этой целью введем в рассмотрение пробную функцию v_j, по физической природе аналогичную функциям насыщенности $S_j(t,z)$, $j=1,2$, и определенную на множестве K: $\forall v \in K, K=\{v | v \geq 0$ п.в. в $\Omega\}$. Скалярно умножим уравнения системы (12) соответственно на $(v-S_1)$ и $(v-S_2)$. Далее, применив к преобразованным таким образом уравнениям (12) функцию Грина, получим

$$\left[(-1)^j \frac{m\partial S_j}{\partial t},(v-S_j)\right]-\int_\Omega \frac{k_j(S_j)}{\mu_j}J(S_j)\times$$

$$\times\left\{\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial\widetilde{P}}{\partial z_i}\left[\frac{\partial\widetilde{P}}{\partial z_i}-\frac{d\widetilde{P}_c}{dS_j}\frac{\partial S_j}{\partial z_i}-G_j\left(\left|\frac{\partial\widetilde{P}}{\partial z_i}\right|\right)^{-1}\right]\times\right.$$

$$\left.\frac{\partial(v-S_j)}{\partial z_i}\right\}dz=\frac{1}{h}Q_j,(v-S_j)+\int_\Gamma\left[\frac{\partial S_j}{\partial\eta},(v-S_j)\right]d\Gamma,$$

$$\forall v, S_j \in K,\ j=1,2. \qquad (15)$$

Определим билинейную форму

$$a\left[\widetilde{P},(v-S_j)\right]=$$

$$=\int_\Omega\left[\frac{k_j(S_j)}{\mu_j}J(S_j)\sum_{i=1}^{2}\frac{d\widetilde{P}_c}{dS_j}\frac{\partial S_j}{\partial z_i}\frac{\partial(v-S_j)}{\partial z_i}\right]dz \qquad (16)$$

и функционалы

$$\mathbf{j}(v)=$$

$$=\int_\Omega\left[\frac{k_j(v_j)}{\mu_j}J(v_j)\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial^2\widetilde{P}}{\partial z_i^2}-G_j\left(\left|\frac{\partial\widetilde{P}}{\partial z_i}\right|\right)^{-1}\right]dz, \qquad (17)$$

$$\mathbf{j}(S)=$$

$$=\int_\Omega\left[\frac{k_j(S_j)}{\mu_j}J(S_j)\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial^2\widetilde{P}}{\partial z_i^2}-G_j\left(\left|\frac{\partial\widetilde{P}}{\partial z_i}\right|\right)^{-1}\right]dz. \qquad (18)$$

Тогда, в результате очевидных преобразований приходим к следующей системе вариационных неравенств:

$$S_j \in K:\left[(-1)^j\frac{m\partial S_j}{\partial t},(v-S_j)\right]-a\left[\widetilde{P},(v-S_j)\right]-$$

$$-\mathbf{j}(v_j)+\mathbf{j}(S_j)\geq\left[\frac{1}{h}Q_j,(v-S_j)\right],\quad \forall v_j \in K. \qquad (19)$$

Полученная система вариационных неравенств вида (19) дополняется начальными (13) и граничными (14) условиями.

Вывод. Выполнены качественное описание процесса реологии многокомпонентной (гетерогенной) системы в пористой среде, а также формализация задачи реологии фрактально-неоднородной гетерогенной системы в виде вариационного неравенства, что позволило получить адекватную математическую модель исследуемого процесса. Модель получена на основании гипотезы о фрактально-неоднородной структуре реологического процесса, для которого определены числовые значения основных характеристик, в частности, фрактальной размерности. Последняя позволяет оценить степень «негладкости» границы раздела составляющих многокомпонентной (или гетерогенной) системы в реологическом процессе.

Список литературы

1. Мандельбот Б. Фрактальная геометрия природы. – М.-Ижевск : ИКИ, 2002. – 656 с.
2. Фракталы и перколяция в пористой среде / Э. Гийон, К. Д. Минтеску, Ж. П. Юлен, С. Ру // Успехи физических наук. – 1991. – Т. 161, № 10. – С. 121–128.
3. Зосимов В. В. Динамическая фрактальная структура эмульсий, обусловленная движением и взаимодействием частиц. Численная модель / В. В. Зосимов, Д. Н. Тарасов // Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 1997. – Т. 111, вып. 4. – С. 1314–1319.
4. Katz A. J. Fractal sandstone pores: implications between for conductivity and pore formation / A. J. Katz, A. H. Thompson // Physical Review Letters. – 1985. – V. 54. – P. 1325–1332.
5. Avnir D. Chemistry in non-integer dimensions between two and three. Fractal surfaces of absorbents / D. Avnir, D. Farin, P. Pfeifer // The Journal of Chemical Physics. – 1983. – V. 79, № 7. – P. 3566–3571.
6. Неймарк А. В. Термодинамический метод расчета поверхностной фрактальной размерности // Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 1990. – Т. 51, вып. 10. – С. 535–538.
7. Черкашинин Г. Ю. Оценка фрактальной размерности дисперсных систем на основании уравнения, описывающего адсорбцию в микропорах / Г. Ю. Черкашинин,

В. А. Дроздов // Журнал физической химии. – 1998. – Т. 72, № 1. – С. 88–92.
8. Сулейманов Б. А. Особенности фильтрации гетерогенных систем. – М.-Ижевск : ИКИ, 2006. – 354 с.
9. Chang J. Pressure-transient analysis of fractal reservoir / J. Chang, Y. C. Yortsos // SPE Formation Evaluation. – 1990, March. – SPE 18170. – P. 31–38.
10. Федер Е. Фракталы / Е. Федер. – М. : Мир, 1991. – 254 с.
11. Смирнов Б. М. Физика фрактальных кластеров / Б. М. Смирнов. – М. : Наука, 1991. – 133 с.
12. Moulu J. C. A new model for three-phase relative permeability's based on a fractal representation of the porous media / J. C. Moulu, O. Vizika, F. Kalandjian // SPE Formation Evaluation. – 1997, August. – SPE 38891. – P. 147–158.
13. Верлань А. Ф. Математическое моделирование аномальных диффузионных процессов / А. Ф. Верлань, С. А. Положаенко, Н. Г. Сербов. – К. : Наука, 2011. – 416 с.
14. Бернадинер М. Г. Гидродинамическая теория фильтрации аномальных жидкостей / М. Г. Бернадинер, В. М. Ентов. – М. : Наука, 1975. – 199 с.
15. Азиз Х. Математическое моделирование пластовых систем / Х. Азиз, Э. Сеттари. – М. : Недра, 1982. – 406 с.
16. Кричлоу Генри Б. Современная разработка нефтяных месторождений. – М. : Недра, 1979. – 302 с.

References

1. Mandelbot, B. (2002) Fractal geometry of nature. Moscow-Izhevsk: IKI, 656 p. [in Russian].
2. Guyon, E., Mintesku, K. D., Julen, J. P. and Roux, S. (1991). Fractals and percolation in porous media. *Uspehi fizicheskih nauk*, 161 (10), pp. 121–128 [in Russian].
3. Zosimov, V. V. and Tarasov, D. N. (1997). Dynamic fractal structure of emulsions due to the movement and interaction of particles. Numerical model. *Zhurnal eksperimentalnoy i teoreticheskoy fiziky,* 111 (4), pp. 1314–1319 [in Russian].
4. Katz, A. J. and Thompson, A. H. (1985). Fractal sandstone pores: implications between for conductivity and pore formation. *Physical Review Letters*, (54), pp. 1325–1332.
5. Avnir, D., Farin, D. and Pfeifer, F (1983) Chemistry in non-integer dimensions between two and three. Fractal surfaces of absorbents. *The Journal of Chemical Physics*, 79 (7), pp. 3566–3571.
6. Neumark, A. V. (1990) Thermodynamic method for calculating surface fractal dimension. *Zhurnal eksperimentalnoy i teoreticheskoy fiziky*, 51 (10), pp. 535–538 [in Russian].
7. Cherkashinin, G. Yu. and Drozdov, V. A. (1998). Estimation of fractal dimension of dispersed systems based on the equation that describes the adsorption in microspores. *Zhurnal fizicheskoy khimii*, 72 (1), pp 88–92 [in Russian].
8. Suleimanov, B. A. (2006) Features of heterogeneous systems filtration. Moscow-Izhevsk : IKI, 354 p. [in Russian].
9. Chang, J. and Yortsos, Y. C. (1990) Pressure-transient analysis of fractal reservoir. *SPE Formation Evaluation*, SPE 18170, pp. 31–38.
10. Feder, E. (1991) Fractals. Moscow: Mir, 254 p. [in Russian].
11. Smirnov, B. M. (1991) Physics of fractal clusters. Moscow : Nauka, 133 p. [in Russian].
12. Moulu, J. C., Vizika, O. and Kalandjian, F. (1997) A new model for three-phase relative permeability's based on a fractal representation of the porous media. *SPE Formation Evaluation*, SPE 38891, pp. 147–158.
13. Verlan, A. F., Polozhaenko, S. A. and Serbov, N. G. (2011) Mathematical modeling of anomalous diffusion processes. Kyiv: Nauka, 416 p. [in Russian].
14. Bernadiner, M. G. and Entov, V. M. (1975). Hydrodynamic theory of abnormal liquids filtration. Moscow: Nauka, 199 p. [in Russian].
15. Aziz, H. and Settary, E. (1982) Mathematical modeling of reservoir systems. Moscow: Nedra, 406 p. [in Russian].
16. Critchlow, Henry B. (1979) Modern development of oil fields. Moscow : Nedra, 302 p. [in Russian].

S. A. Polozhaenko, *Dr.Tech.Sc.*, *professor*,
e-mail: polozhaenko@mail.ru
H. M. Muhialdin, *postgraduate student*
e-mail: hassan_mohammed88@yahoo.com
Odessa National Polytechnic University
Shevchenko ave., 1, Odessa, 65044, Ukraine

MATHEMATICAL MODEL OF RHEOLOGY OF FRACTAL-HETEROGENEOUS MULTICOMPONENT STRATAL SYSTEMS

Filtration processes within the reservoir fluids are highly dependent on biological characteristics of the "skeleton" of porous medium. Qualitative specificity thus has the shape of the boundary (front) of the filter flow, depending on which areas may be formed with a "zero" speed of filtration – "stagnant" zones.

One possible and efficient by examining complex filtration flows with substantial heterogeneity of their boundaries is the assumption of fractal structure of porous medium and heterogeneous structure of filtered liquid.

In this paper, in contrast to the available studies carried out on the basis of field experiments, mathematical model of the rheology of fractal heterogeneous porous media is considered. This gives the opportunity for multivariate experiments without a rigid peg to the characteristics of porous medium.

The condition of «smoothness» of the front of components division in multicomponent (heterogeneous) systems is investigated on the basis of the analysis of saturation «jump» in the function of Bacley-Leverett. It is shown that saturation «jump» is absent, and the front of division moves up steadily and saves «a smoothness», if the mobility of ousting component does not exceed the mobility of ousted one. It is also shown that the failure of «smoothness» of the front of division brings to fractal-heterogeneous structure of rheology process. The numeral values of fractal dimension of the front of division are got for rheology process, developing in real geological terms. Mathematical model of fractal-heterogeneous multicomponent system in the class of variation inequalities is offered.

Mathematical formalization of rheology process of multicomponent (heterogeneous) system in the form of variation inequalities allows to adequately describe the features of the test process, in particular, its one-sided ones.

Keywords*: multicomponent system, heterogeneous system, rheology process, fractal-heterogeneous structure, fractal cluster, mathematical model, variation inequality.*

Статтю представляє С. А. Положаєнко, д.т.н., професор, завідувач кафедри «Комп'ютеризовані системи управління», Одеський національний політехнічний університет.