УДК 004.94: 629.039.58 / С12

[0000-0003-2334-2276] **І. С. Скітер[1],** *канд. фіз.-мат. наук, доцент,*
e-mail: skiteris@ukr.net
[0000-0002-2118-4748] **М. В. Савельєв[1, 2],** *канд. техн. наук,*
e-mail: m.saveliev@ispnpp.kiev.ua
[0000-0002-1598-663X] **С. В. Купріянчук[1],**
e-mail: kupriianchuk.s@gmail.com
[0000-0001-8681-2840] **Д. О. Хоменко[1, 2]**
e-mail: khomenko.amid@gmail.com
[1]Інститут проблем безпеки АЕС НАН України
вул. Кірова, 36-а, м. Чорнобиль, Київська область, 07270, Україна
[2]Інститут проблем математичних машин та систем НАН України
пр-т Академіка Глушкова, 42, м. Київ, 03187, Україна

АЛГОРИТМ МОНІТОРИНГУ ПОТУЖНОСТЕЙ КРИТЕРІЇВ ТЕСТУВАННЯ ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНОСТІ ЩІЛЬНОСТІ ПОТОКУ НЕЙТРОНІВ В «ОБ'ЄКТІ УКРИТТЯ»

Системний моніторинг щільності потоку нейтронів від паливовмісних матеріалів в «Об'єкті Укриття» потребує постійного контролю та визначення параметрів динаміки з метою контролю ядерної безпеки. Запропоновано алгоритм ідентифікації переходів форми трендів динамічних рядів потоків нейтронів в експоненціальну залежність для фіксації подій, які можуть свідчити про зміну стану та поведінки паливовмісних матеріалів. У роботі проводиться моніторинг потужностей статистичних критеріїв, які можуть бути використані при визначенні моментів /часових інтервалів переходу динамічних рядів щільності потоку нейтронів до експоненціального закону розподілу. Запропоновано набір критеріїв, який найбільш доцільно використовувати при перевірці експоненціального закону розподілу, гамма-розподілу, розподілу Пуассона та Вейбула. Оцінка потужностей статистичних критеріїв була проведена на різних об'ємах вибірок, без урахування конкуруючих гіпотез. Встановлено потужності трьох груп критеріїв тестування експоненціальності для різної дискретизації вхідних масивів даних. Рекомендовано мотивоване використання критеріїв для різних об'ємів вибірок. Проведені дослідження є основою для проектування підсистеми тестування експоненціальності в автоматизованій системі підтримки прийняття рішень по забезпеченню та підвищенню рівня ядерної безпеки комплексу «Новий Безпечний Конфайнмент – «Об'єкт Укриття». Отримані результати разом з визначеними наборами оцінки аномальності в дискретизованих масивах даних щільності потоку нейтронів є основою для побудови алгоритмів функціонування автоматизованих систем контролю оцінки відхилень від безпеки в комплексі «Новий Безпечний Конфайнмент – «Об'єкт Укриття».

Ключові слова: *ядерно-небезпечні скупчення, імітаційне моделювання, аналіз динамічних рядів, оперативна діагностика, перевірка гіпотез, статистичні тести, підтримка прийняття рішень.*

Вступ. В роботі [1] зазначається, що на сьогодні першочерговими задачами є вирішення комплексу інформаційних завдань, пов'язаних з проблематикою оперативної діагностики технічного стану критичних елементів та систем головного обладнання АЕС. Зазначається, що розв'язок таких завдань базується на створенні математичних моделей процесів та використанні відповідних обчислювальних методів для використання діагностичної інформації, що міститься в сигналах датчиків інформаційно значущих діагностичних параметрів станів об'єктів; розробці математичних моделей причинно-наслідкових зв'язків, динаміки зміни спектральних параметрів великих масивів поточних технологічних параметрів тощо.

Процес аналізу динамічних рядів даних параметрів щільності потоків нейтронів (ЩПН), на нашу думку, якісно може включати два паралельні процеси: визначення аномальних подій та визначення зміни станів чи

DOI: 10.24025/2306-4412.2.2022.257822

моментів переходу до таких станів. В роботі [2] запропоновано комплекс максимально ефективних з обчислювальної точки зору статистичних критеріїв та методику їх використання для аналізу аномальних значень у динамічних рядах ЩПН залежно від необхідної потужності критеріїв та об'єму вибірки, яка досліджується. Для створення програмного забезпечення, яке дозволить в автоматичному режимі проводити оцінку станів ЩПН, необхідним також є дослідження проблеми оцінки моментів / інтервалів переходу динамічних рядів, які досліджуються, до експоненціального закону розподілу та його параметрів. Саме такий перехід буде означати наявність критичного стану і можливість визначення значущих діагностичних параметрів ЩПН для кожної складової. Практична актуальність цього підходу полягає в можливості удосконалення існуючих методик та/або використання при прогнозуванні критичних станів ЩПН від потенційно ядерно-небезпечних скупчень паливовмісних матеріалів (ПВМ) у комплексі «Новий безпечний конфайнмент – «Об'єкт Укриття» («НБК–ОУ»).

Після встановлення НБК в проектне положення детектори штатної системи контролю ядерної безпеки почали реєструвати збільшення ЩПН на периферії потенційно ядерно-небезпечного скупчення ПВМ. Ці процеси відбуваються за рахунок зміни температурного і вологісного режиму. В результаті цього відбувається втрата вологи в гіпотетично ядерно-небезпечних скупченнях ПВМ та, відповідно, зростання коефіцієнта розмноження нейтронів, що ставить під сумнів визначені гарантії ядерної безпеки ПВМ комплексу «НБК–ОУ».

На сьогодні науковці ІПБ АЕС НАН України та спеціалісти ДСП ЧАЕС розробили «Програму моніторингу ПВМ ОУ», відповідно до якої розробляються не тільки методи та підходи експериментального підтвердження ядерної безпеки, але й способи ефективного оперативного контролю параметрів ПВМ. Таким чином, алгоритм аналізу експоненціальної залежності зміни ЩПН, на нашу думку, буде використаний в автоматизованих системах підтримки прийняття рішень по забезпеченню та підвищенню рівня ядерної безпеки комплексу «НБК–ОУ».

Тестування на експоненціальність – це загальний термін для тестів відповідності для експоненційних розподілів. Для дослідження експоненціальності динамічного ряду за допомогою параметричних методів використовується велика кількість статистичних тестів.

Так, в роботі [3] розглянуто 22 статистичні критерії перевірки експоненціальності. Вони мають різне прикладне направлення, різні алгоритми обчислень та формування висновків, ступінь значущості та ін. Рекомендації щодо їх використання для різних об'ємів вибірок не систематизовані та різнорідні відносно потужностей приведених критеріїв.

В роботі [4] описано 25 тестів, які частково перекриваються з тестами, описаними в [3]. У цій роботі наголошується на практичному використанні зазначених тестів для аналізу надійності, при перевірці асиметричних розподілів та аналізу даних на дискретизованих часових інтервалах. Крім того, визначено потужності критеріїв для різних рівнів значущості від α=0,01 до α=0,1, але для обмежених значень вибірок об'ємами 12, 20 та 28 одиниць.

В роботі [5] проводиться перевірка експоненціальності попередньо цензурованих даних за допомогою дивергенції Тсаліса, визначаються критерії якості експоненціальності на основі оцінки розходжень даних для різних рівнів цензурування. Методика, пропонована авторами, потребує значних інформаційних ресурсів, але має більшу потужність визначення експоненціальності порівняно з іншими тестами. Результати підтверджено моделюванням методом Монте-Карло.

Крім традиційних параметричних методів, для перевірки експоненціальності також використовуються непараметричні методи. Наприклад, в роботі [6] розроблено непараметричний тест «аналіз відмов», що базується на аналізі та розрахунку параметрів експоненціального розподілу. Використовується для якісного аналізу доцільності/недоцільності методів лікування, коли розподіл частот має неекспонеційний/експоненційний розподіл.

Методологія оцінки експоненціальності, розроблена авторами [7], базується на модифікації критерію експоненціальності Ліллієфорса. Авторами розроблено новий тест експоненціальності – Goodness-of-Fit Test (GOFT), в якому розглянуто аналіз суми всіх абсолютних різниць між експоненційною функцією кумулятивного розподілу (Cumulative Distribution Function – CDF) та вибірковою емпіричною функцією розподілу (Empirical Distribution Function – EDF). Запропонований тест простий для розуміння та обчислення.

DOI: 10.24025/2306-4412.2.2022.257822

Слід зазначити, що недоліком тесту є його обмежена потужність на великих вибірках даних. Проте на об'ємах вибірок $n \leq 50$ для рівнів значущості $\alpha=0,01$; $\alpha=0,05$; $\alpha=0,1$ потужність тесту є достатньою.

На сьогодні найповнішим оглядом статистичних тестів перевірки експоненціальності є дослідження Everestus O. Ossai, Mbanefo S. Madukaife & Abimibola V. Oladugba [8], в якому розглянуто більше 90 тестів на експоненціальність. Деякі з тестів є універсальними, тоді як інші суперечать деяким особливим класам рядів розподілу. Потужність 40 із цих різних тестів на експоненціальність наборів даних порівнюється за допомогою моделювання Монте-Карло. Порівняння проводяться для об'ємів вибірок n={10, 25, 50, 100} для різних груп розподілів відповідно до форми їхніх функцій при рівні значущості $\alpha=0,05$. Крім того, методи оцінки експоненціальності застосовуються до двох реальних наборів даних, а міра потужності використовується для порівняння тестів. Результати показують, що деякі тести, які дуже хороші в одній групі альтернативних розподілів, не є такими в іншій групі. Крім того, деякі тести демонструють відносно високу потужність над усіма групами альтернативних розподілів, які вивчалися, тоді як деякі інші мали низькі показники потужності. Результати, отримані з реальних наборів даних, повністю узгоджуються з результатами моделювання.

Мета та задачі дослідження. Таким чином, наявність великої кількості критеріїв оцінки експоненціальності визначає завдання їх практичного мотивованого вибору для аналізу реальних експериментальних даних. Це зумовлено тим, що наявна в публікаціях інформація не дозволяє однозначно віддати перевагу певному критерію чи обраній групі критеріїв. Відповідно, основними задачами статті є:

- визначення оцінок потужностей групи критеріїв, сформованої за ознаками обчислювальної оптимальності та ефективності;

- дослідження впливу об'єму вибірки на розподіл статистик критеріїв при справедливості перевірки гіпотези експоненціальності;

- впорядкування на основі оцінок потужностей та впливу об'ємів вибірок досліджуваної групи критеріїв за перевагою.

Метою статті є моніторинг статистичних критеріїв оцінки експоненціальності динамічних рядів даних ЩПН в комплексі «НБК–ОУ», визначення потужностей критеріїв на основі моделювання, відбір максимально ефективних критеріїв для визначених об'ємів спостережень.

Виклад основного матеріалу. Якщо досліджуваний динамічний ряд ЩПН в гіпотетично ядерно-небезпечному скупченні ПВМ в комплексі «НБК–ОУ», який реєструється датчиками, стає відповідним експоненціальному закону розподілу, то це може свідчити про можливий передкритичний стан ядерної небезпечної системи. Тому тестування дасть змогу в режимі реального часу проводити оцінку параметрів розподілу і приймати ефективні та своєчасні технічні, технологічні та управлінські рішення.

Динамічні ряди даних, які фіксуються датчиками з періодичністю t=1 хв в режимі 24/7, являють собою масиви об'ємом десятки тисяч одиниць. Для оперативної оцінки параметрів розподілів і зменшення обчислювального навантаження доцільно використовувати дискретизовані ряди даних меншої розмірності, пропорційної часу реагування, для прийняття оперативних рішень. За таких умов постає питання про визначення потужності критеріїв оцінки експоненціальності динамічних рядів різного ступеня дискретизації, вибірок різних об'ємів.

Крім того, формування групи статистичних тестів, які доцільно використовувати при оцінці експоненціальності масивів даних ЩПН в комплексі «НБК-ОУ», проводилося з урахуванням їх інформаційної складової. Для створення автоматизованої системи оцінки та контролю експоненціальності динамічних рядів ЩПН, визначення моментів переходів до нестаціонароного стану, визначення параметрів критичності таких переходів пропоновані тести повинні мати одночасно і невелику обчислювальну ємність, і достатню точність, потужність та статистичну значущість.

Також група статистичних тестів, досліджуваних у роботі, включає можливість оцінки розподілів, які є версіями експоненціального – показникового, Вейбулла, гамма-розподілу. Оцінка потужності тестів проводилась на основі змодельованих динамічних рядів за різними законами розподілів з включенням експоненційної складової на різних часових проміжках.

Всі критерії оцінки експоненціального розподілу можна групувати за декількома ознаками, а саме: форма представлення даних для дослідження, вимоги до вибірки, просто-

DOI: 10.24025/2306-4412.2.2022.257822

та/складність розрахунків, потужність, формулювання гіпотез, метод представлення результату тощо.

Для розв'язання задачі визначення за реальним динамічним рядом спостережень моменту або часового інтервалу, коли закон розподілу набуває експоненціальної форми, доцільно визначити набір тестів, які враховують структуру досліджуваної вибірки, мають достатню статистичну потужність для визначених об'ємів вибірок, можуть бути порівняно легко розраховані та, за необхідності, програмно реалізовані. На нашу думку, для реалізації поставленої мети та задач дослідження доцільно використовувати перелік критеріїв, описаний нижче:

1) Критерій Шапіро-Уілка [9] можна використовувати для впорядкованої вибірки $x_1 \leq x_2 \leq ..... \leq x_n$, коли невідома початкова точка розподілу. При цьому розглядають щільність ймовірності з невідомим параметром μ:

$$f(x) = \frac{1}{\nu} \exp\left(\frac{x-\mu}{\nu}\right). \qquad (1)$$

Статистика Шапіро-Уілка для вибірки $n \leq 20$ має вигляд

$$W_E = \frac{n(\bar{x}-x_1)^2}{(n-1)\sum_{i=1}^{n}(\bar{x}-x_i)^2}, \qquad (2)$$

де $n, x_i, \overline{x}$ – об'єм вибірки, i-те поточне та середнє значення рівнів динамічного ряду відповідно.

Для $n > 50$

$$W_E = \frac{(\bar{x}-x_1)^2}{\sum_{i=1}^{n}(\bar{x}-x_i)^2}. \qquad (2.1)$$

Розраховані значення статистики W_E порівнюють з критичними $W_1(\alpha)$ та $W_2(\alpha)$ для заданого рівня значущості. Якщо виконується умова $W_1(\alpha) \leq W_E \leq W_2(\alpha)$, то гіпотеза про експоненціальність розподілу справедлива з достовірністю α. Модифікований критерій Шапіро-Уілка також може бути використаний для цензурованої (позбавленої від аномальних значень) впорядкованої вибірки.

2). Критерії типу Колмогорова-Смірнова включають критерій Андерсона-Дарлінга [10], критерій Смірнова-Крамера-фон Мізеса [11], критерій Уотсона [12]. Вони являють собою модифікації критерію Колмогорова-Смірнова для перевірки експоненціальності закону розподілу ймовірностей з невідомими параметрами:

$$F(x) = 1 - exp\left(-\frac{x-\mu}{\nu}\right), \qquad (3)$$

де μ та ν – оцінки невідомих параметрів вибірки, які можуть бути знайдені із впорядкованої вибірки $x_1 \leq x_2 \leq ..... \leq x_n$ як

$$\begin{cases} \hat{\nu} = \frac{n(\bar{x}-x_1)}{n-1} \\ \hat{\mu} = x_1 - \frac{\hat{\nu}}{n} \end{cases}. \qquad (4)$$

Якщо провести заміну виду $\frac{x_i-\hat{\mu}}{\hat{\nu}} = w_i$, то розглядають нормований експоненціальний розподіл $z_i = 1 - exp(-w_i)$. Тоді модифіковані критерії мають вигляд:

- Андерсона-Дарлінга:

$$A^2 = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(2i-1)[\ln z_i + \ln(1 - z_{n+1-i})] - n; \qquad (5)$$

- Смірнова-Крамера-фон Мізеса:

$$W^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(z_i - \frac{2i-1}{2n}\right)^2 + \frac{1}{12n}; \qquad (6)$$

- Уотсона:

$$U^2 = W^2 - n(\bar{z} - 0{,}5)^2, \qquad (7)$$

де $\bar{z} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i$.

Розраховані значення статистик A^2, W^2 та U^2 порівнюють з критичними $A^2(\alpha), W^2(\alpha)$ та $U^2(\alpha)$ для заданого рівня значущості α. Якщо розраховані значення статистик менші критичних, то гіпотеза про експоненціальність розподілу справедлива з достовірністю α.

Окремо в цьому переліку слід звернути увагу на критерій Смірнова-Крамера-фон Мізеса для цензурованих даних [13]. При аналізі розглядається цензурована вибірка, в якій всі спостереження більші, ніж деяка величина x_p. Це означає, що проводиться оцінка експоненціальності k спостережень із вибірки об'ємом n, які задовольняють умові $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq ..... \leq x_n$. Перевіряється гіпотеза про те, що k спостережень взяті із вибірки, яка має експоненційну функцію розподілу ймовірностей виду

$$F(x) = 1 - exp\left(-\frac{x}{\nu}\right). \qquad (8)$$

Оцінка параметра ν визначається як

$$\hat{\nu} = \frac{1}{k}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i + (n-k)x_n\right]. \qquad (9)$$

Оцінка ступеня цензурування p:

$$\hat{p} = 1 - exp\left(-\frac{x_n}{\hat{\nu}}\right). \qquad (10)$$

DOI: 10.24025/2306-4412.2.2022.257822

При заміні $z_i = 1 - exp\left(-\frac{x_i}{\hat{v}}\right)$ статистика критерію Смірнова-Крамера-фон Мізеса розраховується як

$$W_p^2 = \sum_{i=1}^{k}\left(z_i - \frac{2i-1}{2n}\right)^2 + \frac{1}{12k} \quad (11)$$

Якщо $W_p^2 \leq W_p^2(\alpha)$, гіпотеза експоненціальності приймається.

Приведені статистики оцінки експоненціальності ґрунтуються в основному на аналізі параметрів розподілу.

Наступна група статистик є достатньо простою в розрахунках і орієнтована на аналіз середніх величин, параметрів розсіювання, варіацій та зв'язків у досліджуваній вибірці.

3). Критерій Фроцині [14] може бути використаний до ранжованої, цензурованої чи невпорядкованої вибірки. Розрахунок статистики за критерієм простий і проводиться за формулою

$$B_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\left|1 - exp\left(-\frac{x_i}{\bar{x}}\right) - \frac{i-0,5}{n}\right|, \quad (12)$$

де n, x_i, $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ відповідно об'єм вибірки, поточні значення та середнє арифметичне значення для вибірки.

Висновок про підтвердження чи відхилення гіпотез проводиться традиційно: якщо $B_n \leq B_n(\alpha)$ – гіпотеза експоненціальності приймається.

4). Критерій Фішера простий у розрахунках, може використовуватися до ранжованої, цензурованої чи невпорядкованої вибірки. Для вхідного ряду спостережень $x_1, x_2, \ldots, x_n$ статистика критерію має вигляд

$$F = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{(n-1)x_i}. \quad (13)$$

Ця статистика при справедливості гіпотези про експоненційний розподіл у вибірці має F-розподіл Фішера з $f_1=2n-2$ та $f_2=2$ ступенями вільності. Якщо $F \leq F_{(\alpha,f1,f2)}$, то гіпотеза про експоненціальність приймається.

5). Критерій Бартлетта-Морана [15] також є достатньо простим у реалізації та не висуває окремих вимог до вибірки, яка аналізується. Для вхідного ряду $x_1, x_2, \ldots, x_n$ статистика критерію має вигляд

$$B = \frac{12n^2}{7n+1}\left[\ln\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i\right]. \quad (14)$$

При $n \geq 20$ розподіл статистики B добре апроксимується χ^2 –розподілом з $f = n - 1$ ступенями вільності. Якщо $\mathrm{B} \leq \chi^2_{(\alpha,f)}$, то гіпотеза експоненціальності приймається з ймовірністю 1-α.

6). Критерій найбільшого інтервалу простий у реалізації і співпадає зі статистикою Кохрана для перевірки однорідності дисперсій. Статистика критерію визначається як

$$\eta_n = \frac{\max_{1 \leq i \leq n}(x_i - x_{i-1})}{\sum_{i=1}^{n} x_i}. \quad (15)$$

Якщо $\eta_n \leq \eta_{n\ (\alpha)}$, то гіпотеза про експоненціальність приймається.

7). Критерій Хартлі [16], або тест-$F_{\max}$ також використовується для перевірки однорідності дисперсій. Один із найбільш простих у реалізації і може використовувати нецензуровані дані. Статистика критерію визначається як

$$h(n) = \frac{\max_{1 \leq i \leq n}(x_i)}{\min_{i \leq 1 \leq n}(x_i)}. \quad (16)$$

Якщо $h(n) \leq h(n)_{\propto}$, то гіпотеза про експоненціальність приймається.

8). Становить інтерес кореляційний критерій експоненціальності [17], який має високу потужність і описує кореляційні зв'язки між рівнями ряду, що досліджується. При аналізі експоненційності розглядаємо функцію розподілу (3), оцінки параметрів вибірки μ та v розраховуються за формулами (4). Статистика критерію базується на коефіцієнті кореляції між нормованою змінною $\frac{x_i - \hat{\mu}}{\hat{v}} = w_i$ та математичним очікуванням i-ї порядкової статистики із експоненційного розподілу, який представлений вибіркою об'ємом n:

$$r_{(w,m)} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(w_i - \bar{w})(m_i - \bar{m})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(w_i - w)^2 \sum_{i=1}^{n}(m_i - \bar{m})^2}}, \quad (17),$$

де $\bar{m} = \sum_{j=1}^{i}\frac{1}{n-j+1}$.

Якщо $n>20$, то використовують $\widetilde{m_i} = -ln\left(1 - \frac{i}{n+1}\right)$. Тоді відповідні статистики мають вигляд

$$\begin{cases} K_{(w,m)} = n\left[1 - r^2_{(w,m)}\right] \\ K_{(w,\widetilde{m})} = n\left[1 - r^2_{(w,\widetilde{m})}\right] \end{cases} \quad (18)$$

Якщо $K_{(w,m)} \leq K_{(w,m)}(\alpha)$ чи $K_{(w,\widetilde{m})} \leq K_{(w,\widetilde{m})}(\alpha)$, гіпотеза експоненціальності приймається.

Серед критеріїв, які базуються на апроксимаціях неекспоненційних розподілів, слід відзначити критерій Климко-Антла-Редемакера-Рокетта [18] та критерій Лоулесса [19], які мають достатню потужність, прості у

DOI: 10.24025/2306-4412.2.2022.257822

розрахунках, байдужі до структури вибірки, легкі у програмній реалізації.

9). Критерій Климко-Антла-Редемакера-Рокетта базується на перевірці коефіцієнта форми β=1 у розподілі Вейбула з функцією виду

$$F(x) = 1 - exp\left\{-\left(\frac{x-\mu}{\alpha}\right)^{\beta}\right\}. \quad (19)$$

Якщо β=1, то розподіл Вейбула переходить в експоненційний. Тому перевірка гіпотези H0: β=1 еквівалентна перевірці гіпотези експоненціальності розподілу.

Для оцінки параметра β використовують апроксимацію $\tilde{c} \approx \nu^{-1{,}075}$, де $\nu = \frac{\sigma}{\bar{x}}$ – коефіцієнт варіації. В загальному вигляді для трьохпараметричного розподілу Вейбула

$$\nu = \frac{\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\{x_i-\left[\min x_i-\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\min x_i)\right]\right\}}. \quad (20)$$

Уточнене значення параметра c визначається як $c = \sqrt{n}(\tilde{c} - 1)$. Якщо $c < c_{(\alpha,n)}$, то гіпотеза H0: β=1 (гіпотеза експоненціальності) – приймається.

10). Критерій Лоулесса базується на перевірці форми гамма-розподілу, статистика критерію визначається як

$$W = \frac{\tilde{x}}{\bar{x}}, \quad (21)$$

де $\tilde{x} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}$ – середня геометрична для вибірки,

$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ – середня арифметична для вибірки

Якщо параметр форми гамма-розподілу дорівнює k=1, то розподіл переходить в експоненційний. Тому перевірка гіпотези $H0: k = 1$ проти альтернативних $H1': k > 1$ та $H1'': k < 1$ еквівалентна перевірці гіпотези про експоненціальний розподіл даних у вибірці, яка досліджується. Якщо виконується умова $W_1(\propto) \leq W \leq W_{12}(\propto)$, то гіпотеза про експоненціальність розподілу справедлива з достовірністю α.

Наведені вище статистичні критерії оцінки експоненціальності динамічних рядів обрані нами із великого масиву схожих критеріїв за ознаками простоти реалізації, достатньої достовірності результатів та можливості програмної реалізації. Із обраних критеріїв можна вичленити якісні групи, які мають деякі особливості їх використання, наведені в таблиці 1.

Таблиця 1 – **Якісна характеристика критеріїв оцінки експоненціальності**

№ групи	Перелік критеріїв	Загальна характеристика	Примітки
I	критерій Шапіро-Уілка; критерій Андерсона-Дарлінга; критерій Смірнова-Крамера-фон Мізеса; критерій Уотсона	необхідність цензурування досліджуваної вибірки	
II	критерій Фроцині; критерій Фішера; критерій Бартлетта – Морана; критерій Хартлі	аналіз середніх; аналіз варіацій	використовуються для цензурованої та нецензурованої вибірок
III	EDF-критерій; критерій Климко-Антла-Редемакера-Рокетта; критерій Лоулесса	кореляційний аналіз; апроксимація неекспонеціальних розподілів	аналіз автокореляцій елементів вибірки; перевірка коефіцієнта форми в розподілі Вейбула; перевірка форми гамма-розподілу

Складено за: [3-19]

Методика та алгоритм експериментальних досліджень. У роботі множина аналізованих критеріїв досліджувалася методами імітаційного та статистичного моделювання. Оскільки робота є продовженням досліджень, опублікованих у [2], то для проведення імітаційного та статистичного моделювання та аналізу результатів обрані ті ж масиви спостережень динаміки ЩПН в ОУ за період 01.08.2019 р. – 31.08.2021 р.

Аналіз досліджуваних статистичних критеріїв оцінки експоненціальності включає імітаційне моделювання на дискретних вибірках кінцевої довжини, отриманих за допомогою експоненціальних та близьких до них законів розподілу, та перевірку результатів імітаційного моделювання на реальних вибірках. На етапі імітаційного моделювання рандомно були згенеровані вибірки кінцевої довжини для різних досліджуваних законів розподілу. Як і в роботі [2], для аналізу були обрані наступні об’єми досліджуваних вибірок: n_1=730 (дискретність – 1 день), n_2=96 (дискретність – 1 тиждень), n_3=73 (дискретність – 1 декада), n_4=24 (дискретність – 1 місяць). Вибір саме таких значень відповідає кумулятивним значенням ЩПН за день, тиждень, декаду та місяць.

За основу алгоритму досліджень взятий алгоритм, запропонований в [2], з модифікаціями відповідно до механізму аналізу:

1. За допомогою генератора випадкових чисел проводиться генерація масивів да-

DOI: 10.24025/2306-4412.2.2022.257822

них об'ємами n_1=730, n_2=96, n_3=73, n_4=24 для експоненційного розподілу (функція EXPON.DIST.), розподілу Вейбула (функція WEIBULL.DIST.), гамма-розподілу (функція GAMMA.DIST.) з відповідними налаштуваннями. При генерації масивів задані параметри середнього $\bar{x}_i$ та дисперсії σ_i^2 були максимально наближені до реальних значень середнього та дисперсії ЩПН на досліджуваному об'єкті за період 01.08.2019 р. – 31.08.2021 р.

2. Для критеріїв I групи (таблиця 1) проводиться цензурування змодельованої вибірки за зростанням рівнів ряду за зростанням кожної згенерованої вибірки; для критеріїв груп I-III проводиться визначення оцінок невідомих параметрів вибірки $\bar{x}_i$, σ_i^2, μ та ν.

3. Розрахунок статистик критеріїв та формулювання висновків про відповідність/невідповідність гіпотезі, яка перевіряється.

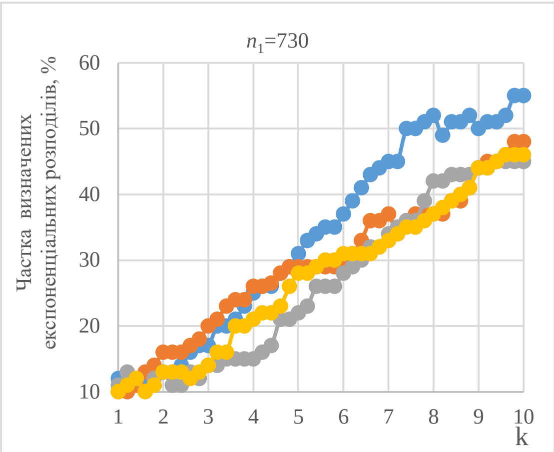
4. Визначення потужностей критеріїв як долі правильно ідентифікованих розподілів у масиві експериментальних даних.

5. Аналіз потужності критеріїв залежно від величини вхідної вибірки.

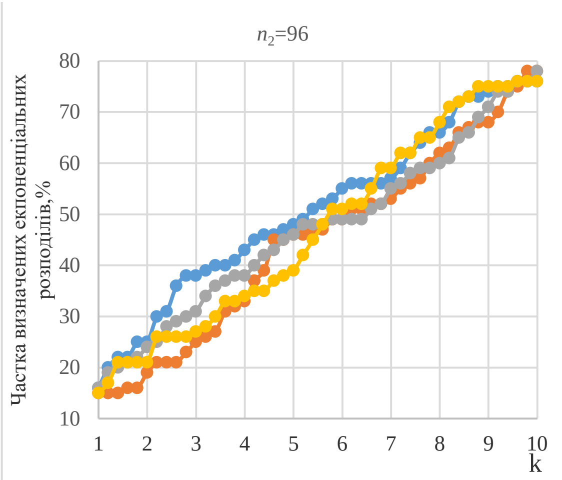
Слід зазначити, що для визначення потужностей критеріїв для кожного окремого об'єму вибірки n_i за заданим законом розподілу проводилося генерування N=10 вибірок за умовою $\bar{x}_i \pm k\sigma_i$, де σ_i – середнє квадратичне відхилення i-ї вибірки, $k = [1{,}0 \div 10{,}0]$.

Потужність критерію визначається як доля правильно ідентифікованих законів розподілу для рівня значущості α=0,05.

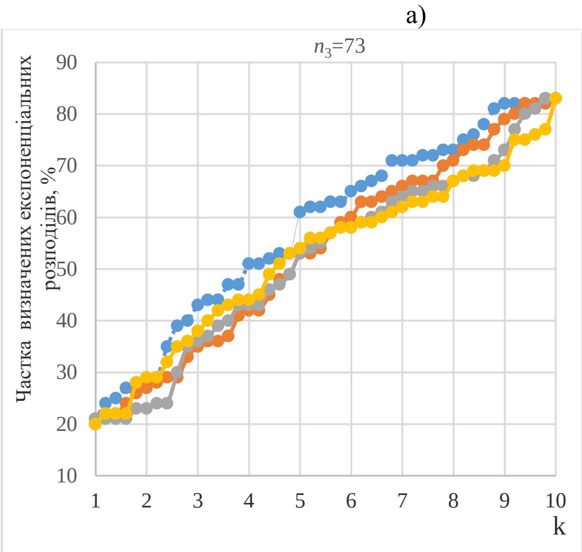
Результати імітаційного моделювання та моніторингу потужностей критеріїв. Результати моніторингу критеріїв на основі згенерованих масивів даних для першої групи критеріїв зображено на рисунку 1.



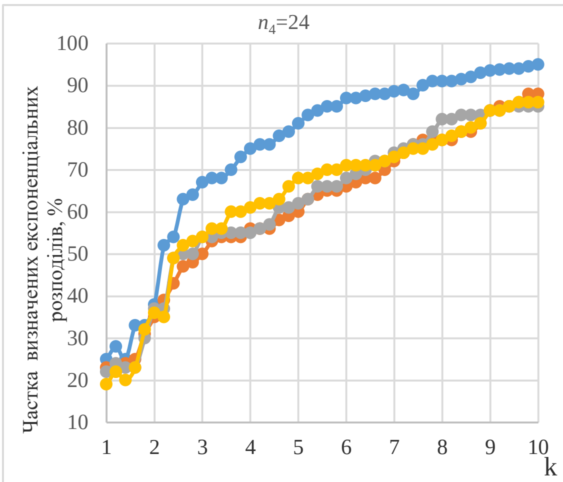
а)



б)



в)



г)

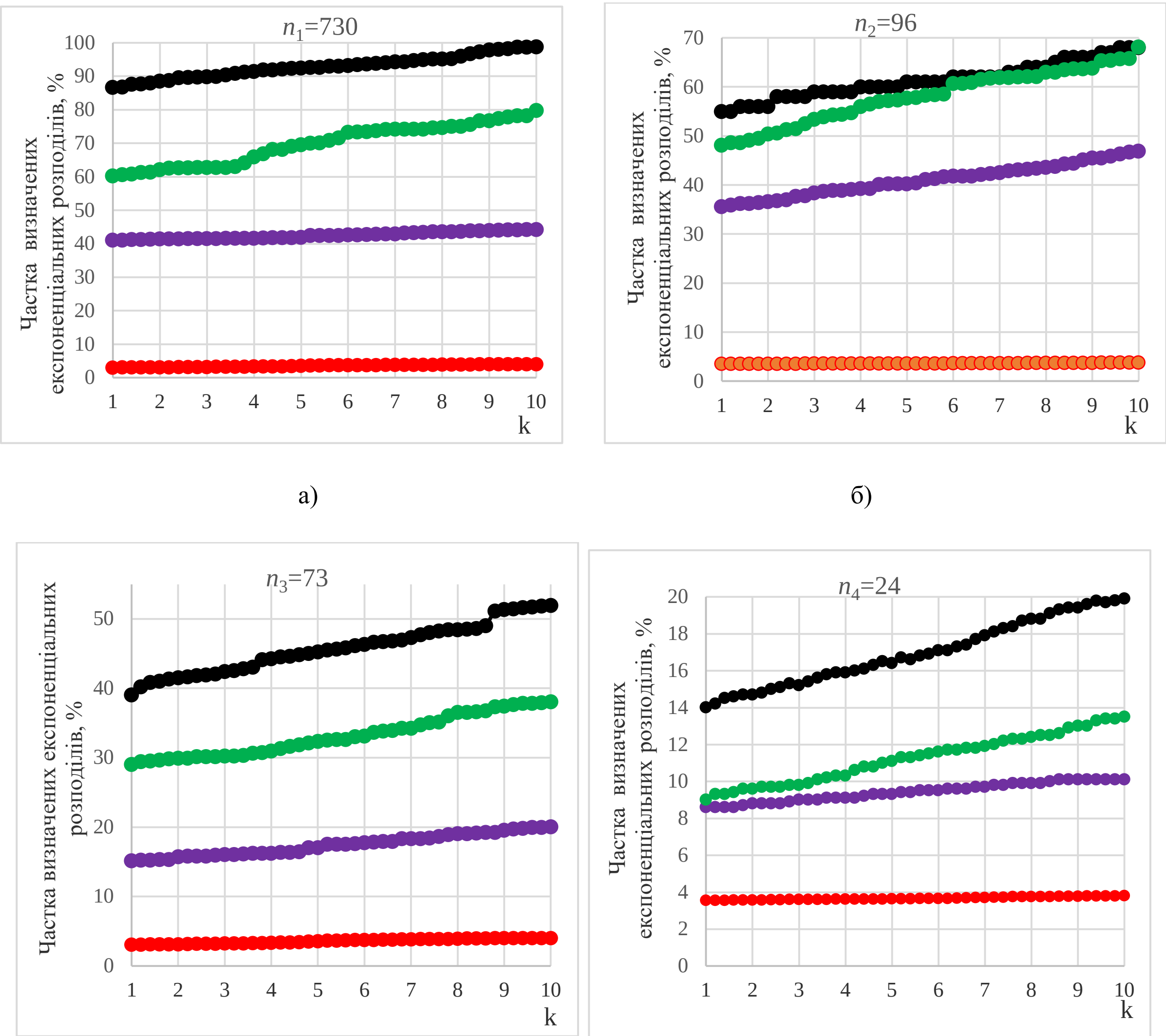
а) n_1=730, б) n_2=96, в) n_3=73, г) n_4=24

– критерій Шапіро-Уілка; – критерій Андерсона-Дарлінга;
– критерій Смірнова-Крамера-фон Мізеса; – критерій Уотсона

Рисунок 1 – Оцінка потужностей першої групи критеріїв

DOI: 10.24025/2306-4412.2.2022.257822

Результати моніторингу критеріїв на основі згенерованих масивів даних для другої групи критеріїв зображено на рисунку 2.



а) б) в) г)

а) n_1=730, б) n_2=96, в) n_3=73, г) n_4=24

– критерій Фроцині;

– критерій Хартлі;

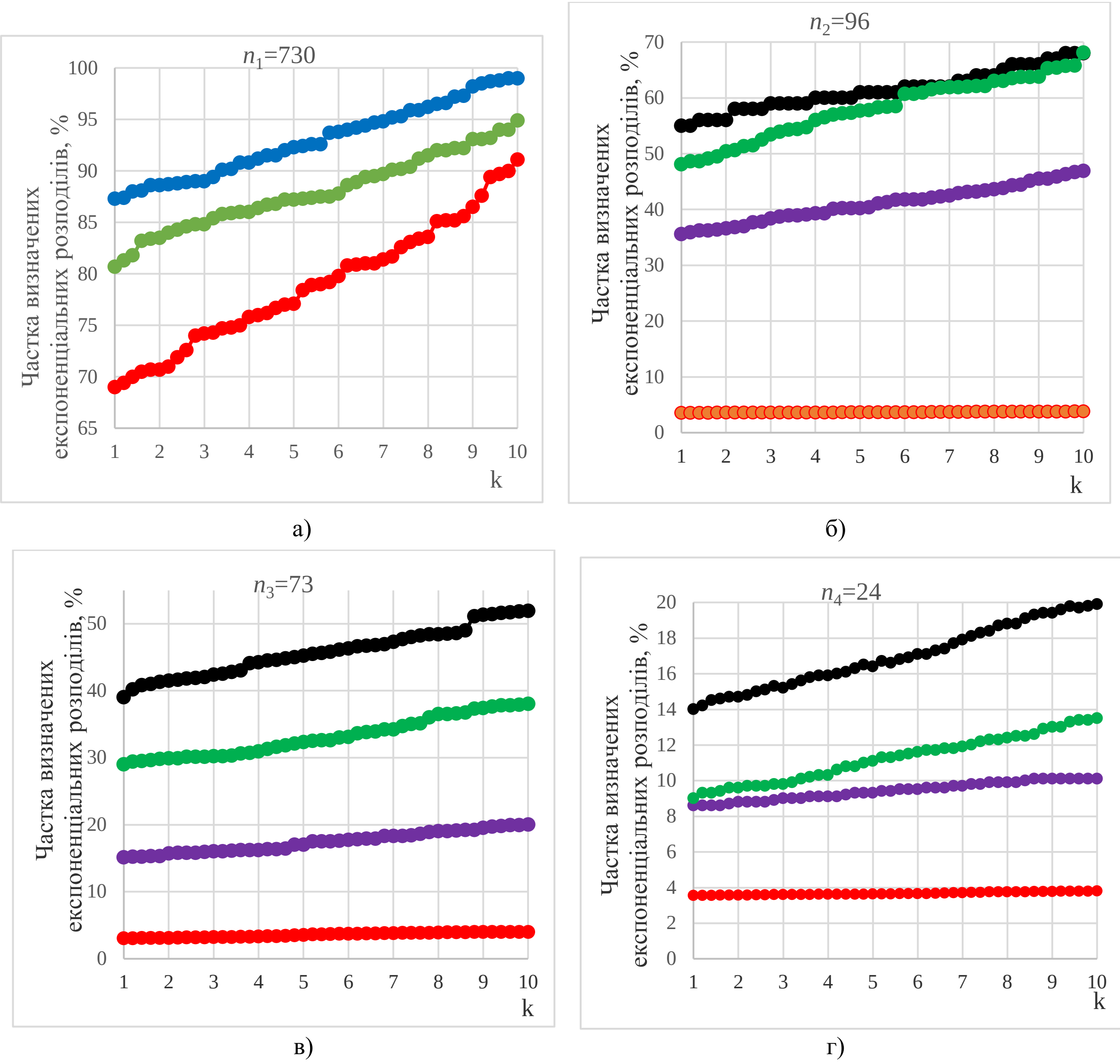
– критерій Барлета-Морана;

– критерій Фішера

Рисунок 2 – Оцінка потужностей другої групи критеріїв

Результати імітаційного моделювання та моніторингу потужностей статистичних критеріїв тестування експоненціальності III групи зображено на рисунку 3.

DOI: 10.24025/2306-4412.2.2022.257822



а) n_1=730, б) n_2=96, в) n_3=73 г) n_4=24

– кореляційний критерій; – критерій Климко-Антла-Редемакера-Рокетта;

– критерій Лоулесса

Рисунок 3 – Оцінка потужностей третьої групи критеріїв

Обговорення результатів. Проведений моніторинг потужностей критеріїв дає змогу стверджувати, що перша група критеріїв демонструє гарну потужність на невеликих вибірках (n_4=24), яка зменшується зі зростанням об'ємів вибірок (n_1=730, n_2=96, n_3=73). Слід зазначити також, що зі зростанням рівня дисперсії вибірок $\bar{x}_i \pm k\sigma_i$, які досліджувалися, така тенденція щодо величини вибірок зберігається на всьому діапазоні досліджень. Також із проведених досліджень видно, що критерії типу Колмогорова-Смірнова поступаються за потужністю критерію Шапіро-Уілка на всіх діапазонах значень x_i.

Друга група критеріїв демонструє високу потужність на великих вибірках (n_1=730, n_2=96), за винятком критерію Фішера. Критерії Фроцині та Хартлі мають значно більшу потужність порівняно з критеріями Фішера та Барлета-Морана. Потужність критеріїв зменшується зі зменшенням об'ємів вибірок. Зростання рівня дисперсії вибірок $\bar{x}_i \pm k\sigma_i$ практично не впливає на рівень потужності критеріїв, що свідчить про їх сталість та значущість на всьому діапазоні значень x_i.

Третя група критеріїв ефективна для вибірок великих об'ємів (n_1=730), проте потужність критеріїв значно (приблизно в 2-4 рази) зменшується при зменшенні об'ємів вибірок (n_2=96, n_3=73, n_4=24). Збільшення об'ємів вибірок має вплив на потужності кри-

DOI: 10.24025/2306-4412.2.2022.257822

теріїв. На вибірках великих об’ємів цей вплив становить 1,35-2,3% на $k\sigma_i$.

Слід зазначити, що потужності критеріїв визначалися для рівня значущості α=0,05.

Висновки. Другий етап дослідження динаміки ЩПН в комплексі «НБК-ОУ» включає задачі визначення моментів / інтервалів переходу трендів до експоненціальних законів розподілу. Проведене дослідження дає змогу констатувати, що при розв’язку задачі трендового аналізу масивів даних ЩПН в системі контролю ядерної безпеки ПВМ на другому етапі необхідно визначити набір оптимальних критеріїв оцінки експоненціальності та меж їх використання. В результаті імітаційного моделювання встановлено, що максимальна ефективність статистичного оцінювання параметрів експоненціальності досягається при використанні для тестування критеріїв з максимальною потужністю, яка, в свою чергу, залежить від величини досліджуваної вибірки.

Так, для масивів спостережень з рівнем дискретизації 1 день (об’єм вибірки n_1=730) максимально ефективним буде використання критерію Фроціні (ІІ група) та кореляційного критерію експоненціальності і критерію Климко-Антла-Редемакера-Рокетта (ІІІ група), потужність яких лежить в межах 87-99%.

Для масивів спостережень з дискретизацією 1 тиждень (n_2=96) доцільно використовувати критерії І групи, максимальна потужність яких (50-75%) досягається на динамічних рядах зі значним рівнем дисперсії $\bar{x}_i \pm k\sigma_i$, при k>5.

Вибірки з рівнями дискретизації 1 декада (n_3=73) оцінюються на експоненціальність максимально ефективно за допомогою критеріїв І групи з потужностями 50-85% для $\bar{x}_i \pm k\sigma_i$, при k>5; для вибірок з дискретизацією 1 місяць (n_4=24) – критерій Шапіро-Уілка (потужність критерію становить 63-95% на діапазонах k>3σ.

Наукова новизна отриманих результатів полягає в уточненні переліку критеріїв тестування на експоненціальність для дискретизованих динамічних рядів ЩПН, конкретизації та класифікації меж їх використання, використанні визначених оптимальних наборів критеріїв моніторингу на нові класи об’єктів комплексу «НБК-ОУ».

Практична значущість полягає в тому, що проведені дослідження та отримані результати є основою для проєктування і створення підсистеми тестування та моніторингу експоненціальності в автоматизованій системі контролю ЩПН та автоматизованій системі підтримки прийняття рішень по забезпеченню та підвищенню рівня ядерної безпеки комплексу «НБК ОУ».

Перспективою подальших досліджень є використання отриманих результатів разом з визначеними в [2] наборами тестів оцінки аномальності в дискретизованих масивах даних ЩПН для побудови алгоритмів функціонування автоматизованих систем контролю комплексу «НБК ОУ».

Список використаних джерел

[1] І. Г. Шараєвський, Т. С. Власенко, Л. Б. Зімін, А. В. Носовський, Н. М. Фіалко, та Г. І. Шараєвський, "Перспективні напрями підвищення експлуатаційної надійності та забезпечення оперативного управління ресурсом головного обладнання", *Ядерна енергетика та довкілля,* т. 3, № 22, с. 3-13, 2021.

[2] І. С. Скітер, та М. В. Савельєв, "Моделювання аномалій щільності потоку нейтронів в автоматизованій системі контролю ядерної безпеки об’єкта "Укриття", *Математичні машини і системи*, № 4, с. 70-77, 2021.

[3] А. І. Кобзар, *Прикладна математична статистика. Для інженерів і наукових робітників*. ФІЗМАТЛІТ, 2006.

[4] B. V. Frozini, *On the Distribution and Power of a Goodness-of-fit Statistic with Parametric and Nonparametric Applications, "Goodness-of-fit"*. North-Holland, 1987.

[5] A. Vahideh, and H. Arezou, "Test based on progressively type-II censored data via extension of cumulative Tsallis divergence", *Revista Colombiana de Estadística - Applied Statistics*, vol. 44, pp. 97-312, 2021.

[6] M. Mansour, "Non-parametric statistical test for testing exponentiality with applications in medical research", *Statistical Methods in Medical Research*, vol. 29, no. 2, pp. 413-420, 2020.

[7] A. Adhikari, and J. Schaffer, "Modified Lilliefors test", *Journal of Modern Applied Statistical Methods*, vol. 14, no. 1, pp. 53-69, 2015.

[8] E. O. Ossai, M. S. Madukaife, and A. V. Oladugba, "A review of tests for exponentiality with Monte Carlo comparisons", *Journal of Applied Statistics*, no. 2, pp. 345-420, 2020.

[9] S. S. Shapiro, and M. B. Wilk, "An analysis of variance test for the exponential distribu-

DOI: 10.24025/2306-4412.2.2022.257822

tion (complete samples)", *Technometrics*, vol. 14, no. 1, pp. 355-370, 1972.

[10] T. W. Anderson, and D. A. Darling, "Asymptotic theory of certain "goodness-of-fit" criteria based on stochastic processes", *Annals of Mathematical Statistics*, vol. 23, pp. 193-212, 1952.

[11] T. W. Anderson, "On the distribution of the two-sample Cramer-von Mises criterion", *Annals of Mathematical Statistics. Institute of Mathematical Statistics*, vol. 33, no. 3, pp. 1148-1159, 1962.

[12] J. D. Spurrier, "An overview of tests for exponentiality", *Communications in Statistics - Theory and Methods*, vol. 13, pp. 56-69, 1984.

[13] D. A. Darling, "The Kolmogorov-Smirnov, Cramer-von Mises tests", *The Annals of Mathematical Statistics*, vol. 28, no. 4, pp. 823-838, 1957.

[14] R. Mezbahur, and W. Han, "Tests for exponentiality: A comparative study, *American Journal of Applied Mathematics and Statistics*, vol. 5, no. 4, pp. 125-135, 2017.

[15] M. S. Barlett, "Properties of sufficiency and statistical tests", *Proceedings of the Royal Statistical Society*, vol. 160, pp. 268-282, 1937.

[16] H. O. Hartley, "The maximum F-ratio as a short cut test for homogeneity of variance", *Biometrika*, vol. 37, pp. 308-312, 1950.

[17] M. A. Stephens, *EDF-Tests of Fit for the Logistic Distribution: Technical report.* Department of Statistics, Stanford University (Prepared under Grant DAAG29-77-G-0031 for the U.S. Army Research Office), no. 36, 1979.

[18] L. A. Klimko, C. E. Antle, A. W. Rademaker, and H. E. Rockette, "Upper bounds for the power of invariant tests for the exponential distribution with Weibull alternatives", *Technometrics*, vol. 17, no. 3, pp. 357-360, 1975.

[19] J. F. Lawless, *Statistical Models and Methods for Lifetime Data* (2-nd ed.). Hoboken, N.-J., USA: John Wiley & Sons, Inc., 2003.

References

[1] I. G. Sharaevskiy, T. S. Vlasenko, L. B. Zimin, A. V. Nosovskiy, N. M. Fialko, and G. I. Sharaevskiy, "Perspective directions of increase of operational reliability and maintenance of operative management by a resource of the main equipment", *Yaderna energetyka ta dovkillya*, vol. 3, no. 22, pp. 3-13, 2021 [in Ukrainian].

[2] I. S. Skiter, and M. V. Saveliev, "Simulation of neutron flux density anomalies in the automated nuclear safety control system of the Shelter's object", *Matematychni mashyny i systemy*, no. 4, pp.70-77, 2021 [in Ukrainian].

[3] A. I. Kobzar, *Applied Mathematical Statistics. For engineers and researchers*. FIZMATLIT [in Ukrainian].

[4] B. V. Frozini, *On the Distribution and Power of a Goodness-of-fit Statistic with Parametric and Nonparametric Applications, "Goodness-of-fit"*. North-Holland, 1987.

[5] A. Vahideh, and H. Arezou, "Test based on progressively type-II censored data via extension of cumulative Tsallis divergence", *Revista Colombiana de Estadística - Applied Statistics*, vol. 44, pp. 97-312, 2021.

[6] M. Mansour, "Non-parametric statistical test for testing exponentiality with applications in medical research", *Statistical Methods in Medical Research*, vol. 29, no. 2, pp. 413-420, 2020.

[7] A. Adhikari, and J. Schaffer, "Modified Lilliefors test", *Journal of Modern Applied Statistical Methods*, vol. 14, no. 1, pp. 53-69, 2015.

[8] E. O. Ossai, M. S. Madukaife, and A. V. Oladugba, "A review of tests for exponentiality with Monte Carlo comparisons", *Journal of Applied Statistics*, no. 2, pp. 345-420, 2020.

[9] S. S. Shapiro, and M. B. Wilk, "An analysis of variance test for the exponential distribution (complete samples)", *Technometrics*, vol. 14, no. 1, pp. 355-370, 1972.

[10] T. W. Anderson, and D. A. Darling, "Asymptotic theory of certain "goodness-of-fit" criteria based on stochastic processes", *Annals of Mathematical Statistics*, vol. 23, pp. 193-212, 1952.

[11] T. W. Anderson, "On the distribution of the two-sample Cramer-von Mises criterion", *Annals of Mathematical Statistics. Institute of Mathematical Statistics*, vol. 33, no. 3, pp. 1148-1159, 1962.

[12] J. D. Spurrier, "An overview of tests for exponentiality", *Communications in Statistics - Theory and Methods*, vol. 13, pp. 56-69, 1984.

[13] D. A. Darling, "The Kolmogorov-Smirnov, Cramer-von Mises tests", *The Annals of Mathematical Statistics*, vol. 28, no. 4, pp. 823-838, 1957.

DOI: 10.24025/2306-4412.2.2022.257822

[14] R. Mezbahur, and W. Han, "Tests for exponentiality: A comparative study, *American Journal of Applied Mathematics and Statistics*, vol. 5, no. 4, pp. 125-135, 2017.
[15] M. S. Barlett, "Properties of sufficiency and statistical tests", *Proceedings of the Royal Statistical Society,* vol. 160, pp. 268-282, 1937.
[16] H. O. Hartley, "The maximum F-ratio as a short cut test for homogeneity of variance", *Biometrika*, vol. 37, pp. 308-312, 1950.
[17] M. A. Stephens, *EDF-Tests of Fit for the Logistic Distribution: Technical report.* Department of Statistics, Stanford University (Prepared under Grant DAAG29-77-G-0031 for the U.S. Army Research Office), no. 36, 1979.
[18] L. A. Klimko, C. E. Antle, A. W. Rademaker, and H. E. Rockette, "Upper bounds for the power of invariant tests for the exponential distribution with Weibull alternatives", *Technometrics*, vol. 17, no. 3, pp. 357-360, 1975.
[19] J. F. Lawless, *Statistical Models and Methods for Lifetime Data* (2-nd ed.). Hoboken, N.-J., USA: John Wiley & Sons, Inc., 2003.

I. S. Skiter[1], *Ph. D., Associate Professor,*
e-mail: skiteris@ukr.net
M. V. Saveliev[1, 2], *Ph. D.,*
e-mail: m.saveliev@ispnpp.kiev.ua
S. V. Kupriyanchuk[1],
D. O. Khomenko[1, 2]
e-mail: khomenko.amid@gmail.com
[1] Institute for Safety Problems of Nuclear Power Plants, NAS of Ukraine
Kirova st., 36-a, Chornobyl, 07270, Ukraine
[2] Institute of Mathematical Machines and Systems Problems of the Ukraine NAS
acad. Glushkova ave., 42, Kyiv, 03187, Ukraine

ALGORITHM FOR MONITORING THE POWER OF CRITERIA FOR TESTING THE EXPONENTIVITY OF NEUTRON FLUX DENSITY IN THE SHELTER OBJECT

Nuclear safety monitoring of the "New Safe Confinement – Shelter Object" system requires constant monitoring of the dynamics of neutron flux density from clusters of nuclear fuel-containing materials at sub-reactor premises at the Shelter object. The paper proposes an algorithm for identifying transitions of neutron flux time series trends from lineal into exponential dependence. The monitoring of the powers of statistical criteria that can be used in determining the moments of transition of dynamic series to the law of exponential distribution has been carried out. The criteria are classified according to the "power - sample size" parameters. A set of criteria, which is most expedient to use when checking the laws of exponential distribution, is offered. The power of statistical criteria is estimated at different sample sizes, without taking into account competing hypotheses. Powers of three groups of exponentiality testing criteria for different data sets have been established. Motivated use of criteria for different sample sizes is recommended. The obtained results are the basis for the construction of algorithms for automated monitoring systems for assessing the state of fuel-containing materials in the complex "New Safe Confinement – Shelter Object". The scientific novelty of the obtained results consists in clarifying the list of exponentiality testing criteria for discretized time series, specifying the limits of their use, determining optimal sets of monitoring criteria for new classes of objects. The practical significance lies in the use of the results as a basis for designing a subsystem for exponentiality testing and monitoring in an automated control system and decision support system on the research object. The direction of further research is the use of the obtained results to construct algorithms for automated monitoring and decision support systems to assess the state of the New Safe Confinement – Shelter Object system.

Keywords: *"New Safe Confinement – Shelter Object", nuclear-hazardous clusters, simulation modeling, time series analysis, operational diagnostics, hypothesis testing, statistical tests, decision support.*

Стаття надійшла 30.05.2022
Прийнято 14.06.2022

DOI: 10.24025/2306-4412.2.2022.257822