

**ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ТОЧНОСТІ РЕКУРЕНТНИХ МЕТОДІВ
ОБЧИСЛЕННЯ ДИСКРЕТНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ ФУР'Є ТА ХАРТЛІ В СИСТЕМІ
КОМП'ЮТЕРНОГО МОДЕЛЮВАННЯ MATLAB**

Проведено експериментальне дослідження точності рекурентних методів обчислення дискретних перетворень Фур'є та Хартлі в системі комп'ютерного моделювання Matlab, результати якого підтвердили результати теоретичного дослідження точності цих методів.

Ключові слова: точність, рекурентні методи обчислення, дискретне перетворення Фур'є, дискретне перетворення Хартлі, комп'ютерне моделювання, Matlab.

**EXPERIMENTAL INVESTIGATION OF THE ACCURACY OF RECURRENT COMPUTING METHODS OF THE
FOURIER AND HARTLEY DISCRETE TRANSFORMATIONS IN THE SYSTEM OF MATLAB COMPUTER
SIMULATION**

Abstract – The aim of the research – an experimental research of precision of recurrent methods of calculation of discrete Fourier and Hartley transforms in fixed and floating-point arithmetic in the computer modelling system Matlab.

A modelling program for calculation and plotting output noise to signal ratio for a given input modelling data on the transform size was developed. Transform type, fixed or floating-point arithmetic, the total amount of code data and fractional or exponential part of data in bits, rounding or truncation results of multiplication and addition operations are defined as input modelling data.

The results of the experimental research confirmed the results of theoretical research of accuracy of recurrent calculation methods.

Keywords: accuracy, recursive calculation methods, discrete Fourier transform, discrete Hartley transform, computer modelling, Matlab.

Вступ

В основі динамічного спектрального аналізу, який проводиться на ковзних або стрибкових інтервалах вхідного сигналу, лежить використання рекурентних методів обчислення дискретних перетворень Фур'є (ДПФ) і Хартлі (ДПХ) або модифікованих ДПФ (МДПФ) і ДПХ (МДПХ), арифметична складність яких значно нижча за складність прямих та швидких методів обчислення цих перетворень, оскільки рекурентні методи враховують результати обчислення на попередніх інтервалах вхідного сигналу.

Важливим критерієм ефективності методів обчислення є точність обчислення, яку вони забезпечують. В працях [1–3] проведено теоретичне дослідження точності рекурентних методів обчислення ДПФ, ДПХ, МДПФ і МДПХ, в основу якого покладено статистичний метод аналізу, при якому кожному джерелу елементарної похибки ставиться у відповідність генератор випадкової похибки з рівномірним законом розподілу та робиться припущення, що всі джерела елементарних похибок не корелюють між собою та з вхідним сигналом. Оскільки обчислювальними операціями рекурентних методів обчислення перетворень є операції додавання та множення, то при реалізації цих методів в арифметиці з плаваючою комою джерелами похибок можуть бути як операції додавання, так і операції множення, а при реалізації в арифметиці з фіксованою комою – лише операції множення, оскільки похибки операцій додавання внаслідок переповнення розрядної сітки відсутні за рахунок вхідного масштабування, при якому значення вхідного сигналу масштабуються так, щоб в процесі обчислення не було переповнень. В якості кількісної оцінки точності обчислення приймаються середньоквадратичні значення (СКЗ) похибок обчислення перетворень та відношення СКЗ похибок обчислення перетворень до СКЗ перетворень, квадратний корінь якого можна розглядати як відношення вихідного шуму до вихідного сигналу.

Для експериментальних досліджень та підтвердження результатів теоретичних досліджень методів цифрової обробки сигналів широко застосовують систему комп'ютерного моделювання Matlab, яка містить потужні засоби аналітичного та імітаційного моделювання [4–6].

Метою даної роботи є експериментальне дослідження точності рекурентних методів обчислення ДПФ, ДПХ, МДПФ і МДПХ при їх реалізації в арифметиці з фіксованою та плаваючою комою в системі комп'ютерного моделювання Matlab.

Теоретична частина

Проведемо дослідження точності рекурентних методів обчислення ДПФ, ДПХ, МДПФ і МДПХ на ковзних інтервалах, рекурентні вирази для обчислення яких мають такий вигляд [1–3]:

$$F_{i+1}(k) = [F_i(k) + [x(N+i) - x(i)]] \cdot W^{-k}, \quad (1)$$

$$H_{i+1}(k) = [H_i(k) + [x(N+i) - x(i)]] \cdot \cos \frac{2\pi k}{N} - [H_i(N-k) + [x(N+i) - x(i)]] \cdot \sin \frac{2\pi k}{N}, \quad (2)$$

$$X_{i+1}(k) = X_i(k) + [x(N+i) - x(i)] \cdot \alpha(ik), \quad (3)$$

$$P_{i+1}(k) = P_i(k) + (-1)^l [x(N+i) - x(i)] \cdot [(-1)^l \alpha(ik)]. \quad (4)$$

де $F_{i+1}(k)$, $F_i(k)$ – ДПФ на $(i+1)$ -му та i -му інтервалах відповідно;

$H_{i+1}(k)$, $H_i(k)$ – ДПХ на $(i+1)$ -му та i -му інтервалах відповідно;
 $X_{i+1}(k)$, $X_i(k)$ – МДПФ або МДПХ на $(i+1)$ -му та i -му інтервалах відповідно;
 $P_{i+1}(k)$, $P_i(k)$ – МДПФ або МДПХ з підвищеною точністю на $(i+1)$ -му та i -му інтервалах відповідно;

N – розмір перетворення;

$i = 0, 1, 2, \dots$ – номер попереднього інтервалу вхідного сигналу;

$k = \overline{0, N-1}$ – номер значення перетворення;

$x(n)$ – послідовність вхідного сигналу;

l – номер ітерації обчислення;

$W^{nk} = \exp(-j2\pi nk / N)$ – базові функції ядра ДПФ ($j = \sqrt{-1}$);

$\cos(2\pi nk / N) = \cos(2\pi nk / N) + \sin(2\pi nk / N)$ – базові функції ядра ДПХ;

$\alpha((n+i)k)$ – базові функції ядра модифікованого перетворення, які для МДПФ визначаються як $W^{(n+i)k}$, а для МДПХ – як $\cos(2\pi(n+i)k / N)$.

Кількісні оцінки точності рекурентних методів обчислення ДПФ, ДПХ, МДПФ і МДПХ на ковзних інтервалах з $(b+1)$ -розрядними числами при реалізації в арифметиці з фіксованою комою та мантисами при реалізації в арифметиці з плаваючою комою, які можуть бути визначені на підставі отриманих в [1–3] результатів, наведено в табл. 1 та табл. 2.

Таблиця 1

Відношення вхідного шуму до вхідного сигналу для рекурентних методів обчислення ДПФ, ДПХ, МДПФ і МДПХ на ковзних інтервалах при реалізації в арифметиці з фіксованою комою

Вид перетворення	Вид апроксимації результатів операцій множення	
	Округлення доповняльного коду	Усікання доповняльного коду
ДПФ	$N \cdot 2^{-b}$	$2N \cdot 2^{-b}$
ДПХ	$\frac{N \cdot 2^{-b}}{\sqrt{2}}$	$\sqrt{2}N \cdot 2^{-b}$
МДПФ	$\frac{N \cdot 2^{-b}}{\sqrt{2}}$	$\sqrt{\frac{N^2 + 3N^3}{2}} \cdot 2^{-b}$
МДПХ	$\frac{N}{2} \cdot 2^{-b}$	$\frac{\sqrt{N^2 + 3N^3}}{2} \cdot 2^{-b}$
МДПФ з підвищеною точністю	$\frac{N \cdot 2^{-b}}{\sqrt{2}}$	$\sqrt{\frac{5}{2}}N \cdot 2^{-b}$
МДПХ з підвищеною точністю	$\frac{N}{2} \cdot 2^{-b}$	$\sqrt{2}N \cdot 2^{-b}$

Таблиця 2

Відношення вхідного шуму до вхідного сигналу для рекурентних методів обчислення ДПФ, ДПХ, МДПФ і МДПХ на ковзних інтервалах при реалізації в арифметиці з плаваючою комою

Вид перетворення	Вид апроксимації результатів операцій множення та додавання	
	Округлення прямого коду	
ДПФ, ДПХ	$\sqrt{\frac{N+1}{2}} \cdot 2^{-b}$	
МДПФ, МДПХ	$\sqrt{\frac{N+3}{6}} \cdot 2^{-b}$	

Експериментальна частина

Для експериментального дослідження точності рекурентних методів обчислення ДПФ, ДПХ, МДПФ і МДПХ при їх реалізації в арифметиці з фіксованою та плаваючою комою в системі комп'ютерного моделювання Matlab була розроблена програма визначення та побудови графіків відношень вхідного шуму до вхідного сигналу для заданих вхідних даних моделювання в залежності від розмірів перетворення.

Моделювальна програма включає такі етапи:

1. Введення вхідних даних моделювання: вид перетворення (ДПФ, ДПХ, МДПФ, МДПХ, МДПФ або МДПХ з підвищеною точністю), арифметика обчислення (з фіксованою або плаваючою комою), загальний розмір коду даних та дробової або експоненціальної частини даних в бітах), метод апроксимації

результатів операцій множення та додавання (округлення або усікання).

2. Циклічне виконання дій для заданих значень розміру перетворення:

2.1. Генерація вхідного сигналу з рівномірним законом розподілу в діапазоні значень від -1 до 1 при реалізації в арифметиці з плаваючою комою або від $-1/N$ до $1/N$ при реалізації в арифметиці з фіксованою комою для усунення можливих переповнень розрядної сітки.

2.2. Обчислення перетворення в арифметиці з плаваючою комою з подвійною точністю, яке приймається в якості точного обчислення перетворення, що не містить похибки обчислення.

2.3. Обчислення перетворення з заданими вхідними даними моделювання, яке приймається в якості реального обчислення перетворення, що містить похибки обчислення.

2.4. Визначення похибок обчислення значень перетворення як різниці між значеннями реального та точного обчислення перетворення.

2.5. Визначення середнього значення, дисперсії, СКЗ похибки обчислення перетворення та квадратного кореня відношення СКЗ похибки обчислення перетворення до СКЗ перетворення (відношення вихідного шуму до вихідного сигналу).

3. Побудова експериментального та теоретичного графіків відношення вихідного шуму до вихідного сигналу в залежності від розміру перетворення.

Експериментальні та теоретичні графіки відношення вихідного шуму до вихідного сигналу в залежності від розміру перетворення для різних вхідних даних моделювання наведено на рис. 1 – рис. 6.

В результаті порівняльного аналізу експериментальних та теоретичних графіків відношення вихідного шуму до вихідного сигналу для рекурентних методів обчислення ДПФ, ДПХ, МДПФ і МДПХ можна зробити такі основні висновки:

1. Експериментальні дані відповідають теоретичним даним точності рекурентних методів обчислення ДПФ, ДПХ, МДПФ і МДПХ.

2. В усіх випадках, окрім випадку обчислення МДПФ і МДПХ в арифметиці з плаваючою комою, експериментальні дані не перевищують теоретичні дані точності рекурентних методів обчислення ДПФ, ДПХ, МДПФ і МДПХ.

Висновки

Отримані результати експериментального дослідження точності рекурентних методів обчислення ДПФ, ДПХ, МДПФ і МДПХ підтвердили теоретичні результати дослідження точності цих методів.

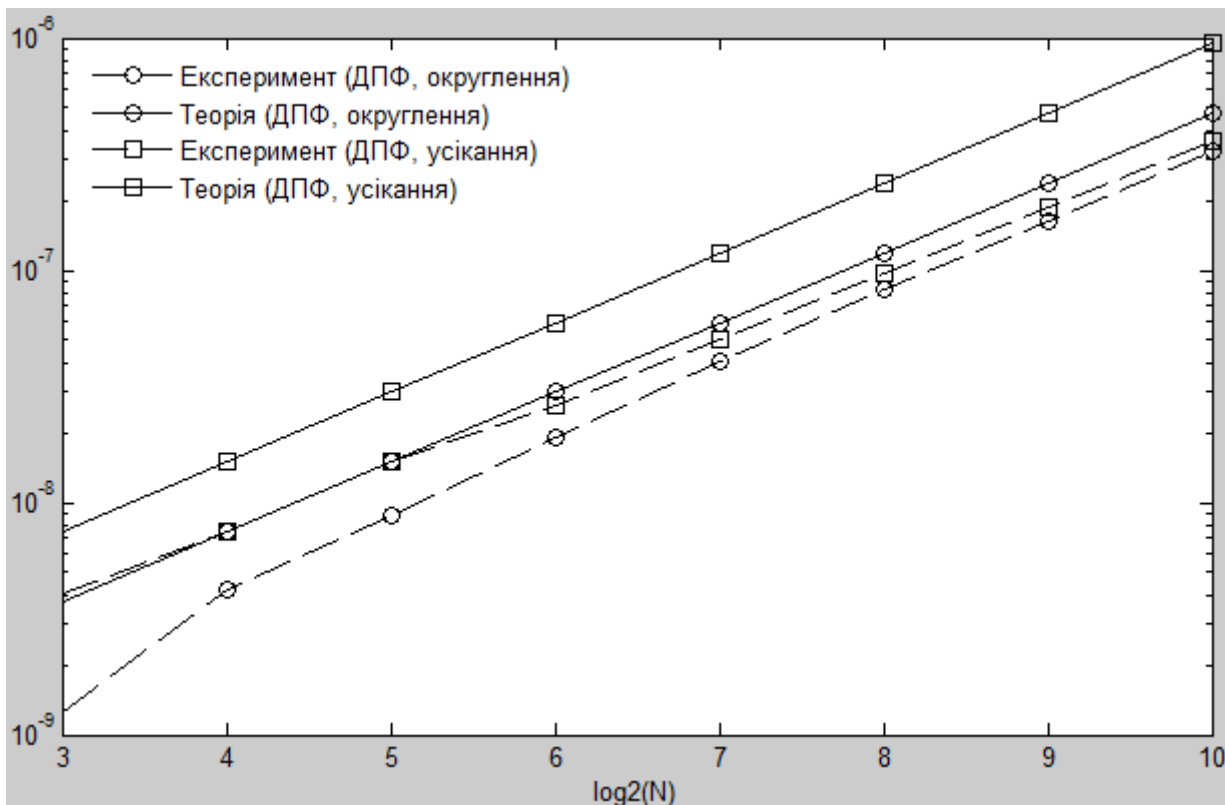


Рис. 1. Відношення вихідного шуму до вихідного сигналу для рекурентного методу обчислення ДПФ на ковзних інтервалах при реалізації в арифметиці з фіксованою комою для 32-розрядних чисел ($b=31$)

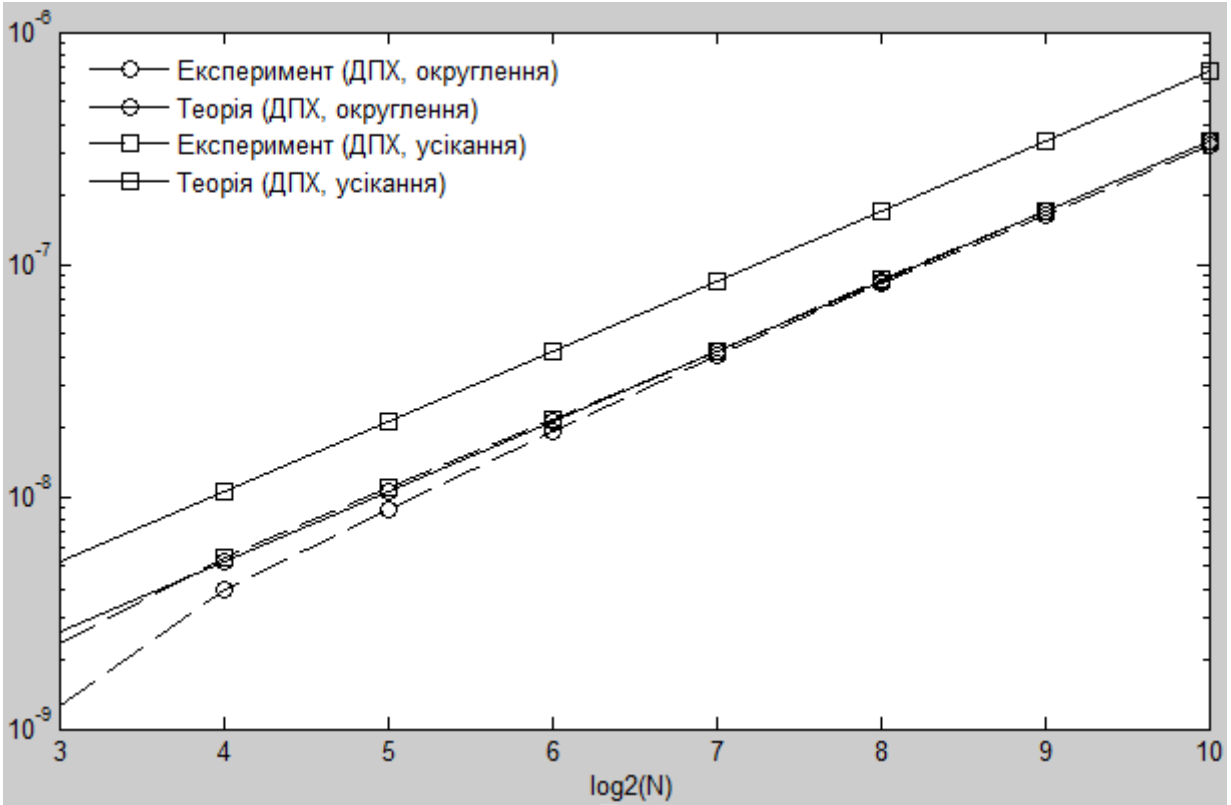


Рис. 2. Відношення вихідного шуму до вихідного сигналу для рекурентного методу обчислення ДПХ на ковзних інтервалах при реалізації в арифметиці з фіксованою комою для 32-розрядних чисел ($b=31$)

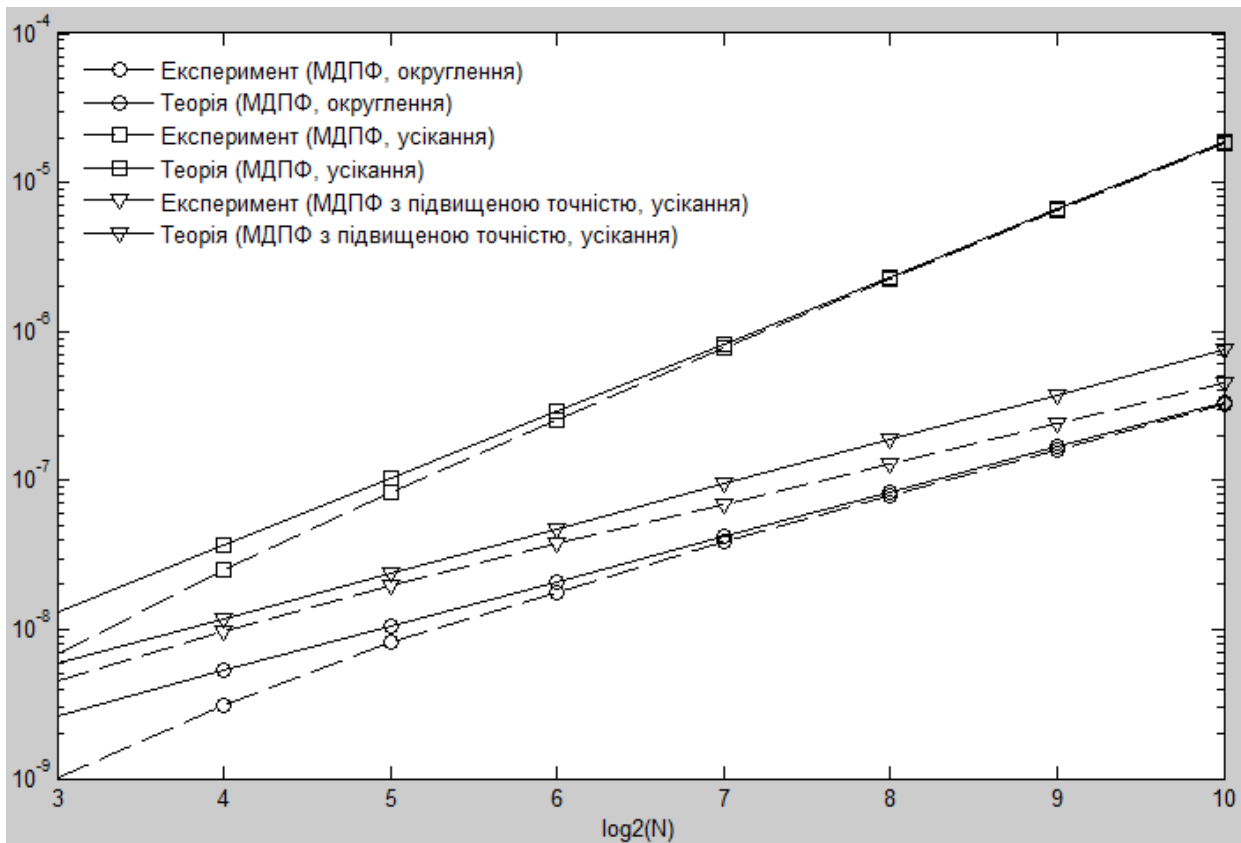


Рис. 3. Відношення вихідного шуму до вихідного сигналу для рекурентних методів обчислення МДПФ на ковзних інтервалах при реалізації в арифметиці з фіксованою комою для 32-розрядних чисел ($b=31$)

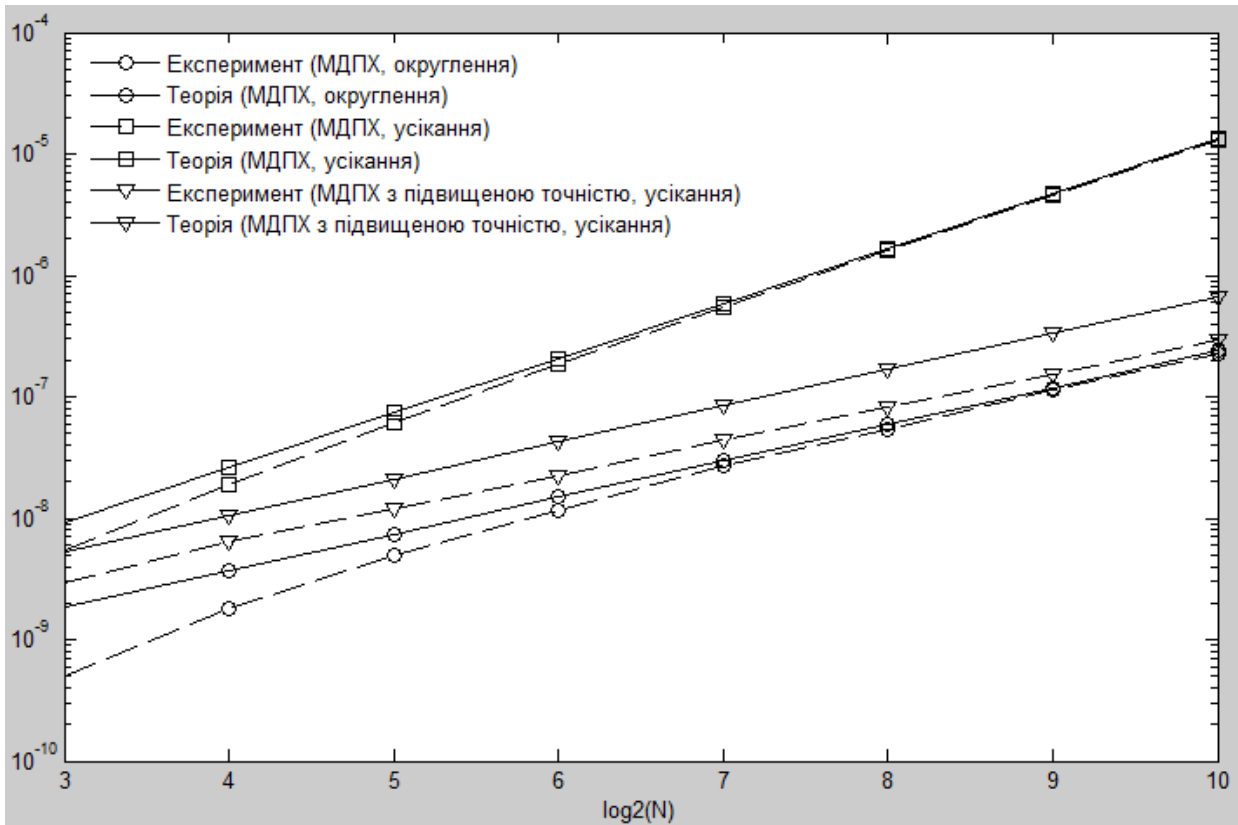


Рис. 4. Відношення вихідного шуму до вихідного сигналу для рекурентних методів обчислення МДПХ на ковзних інтервалах при реалізації в арифметиці з фіксованою комою для 32-розрядних чисел (b=31)

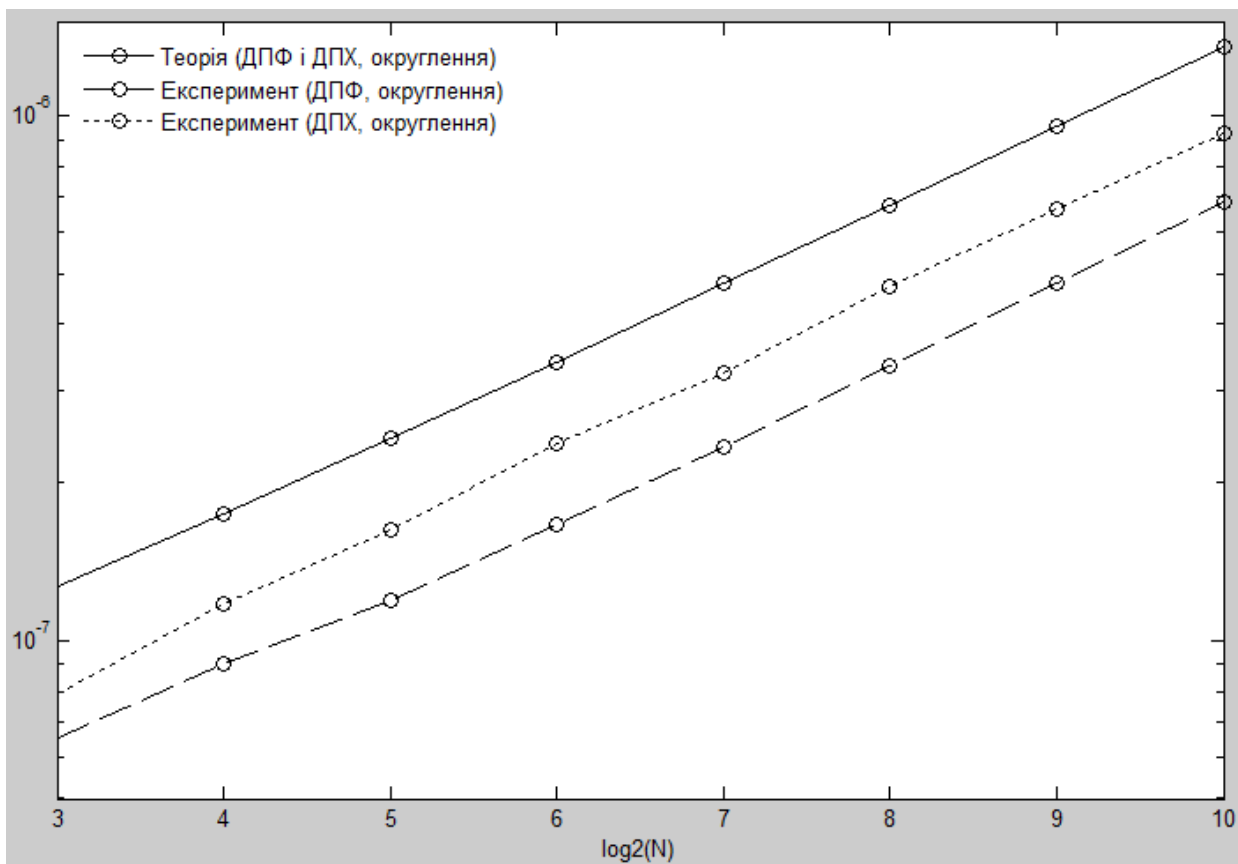


Рис. 5. Відношення вихідного шуму до вихідного сигналу для рекурентних методів обчислення ДПФ і ДПХ на ковзних інтервалах при реалізації в арифметиці з плаваючою комою для 32-розрядних чисел (b=24)

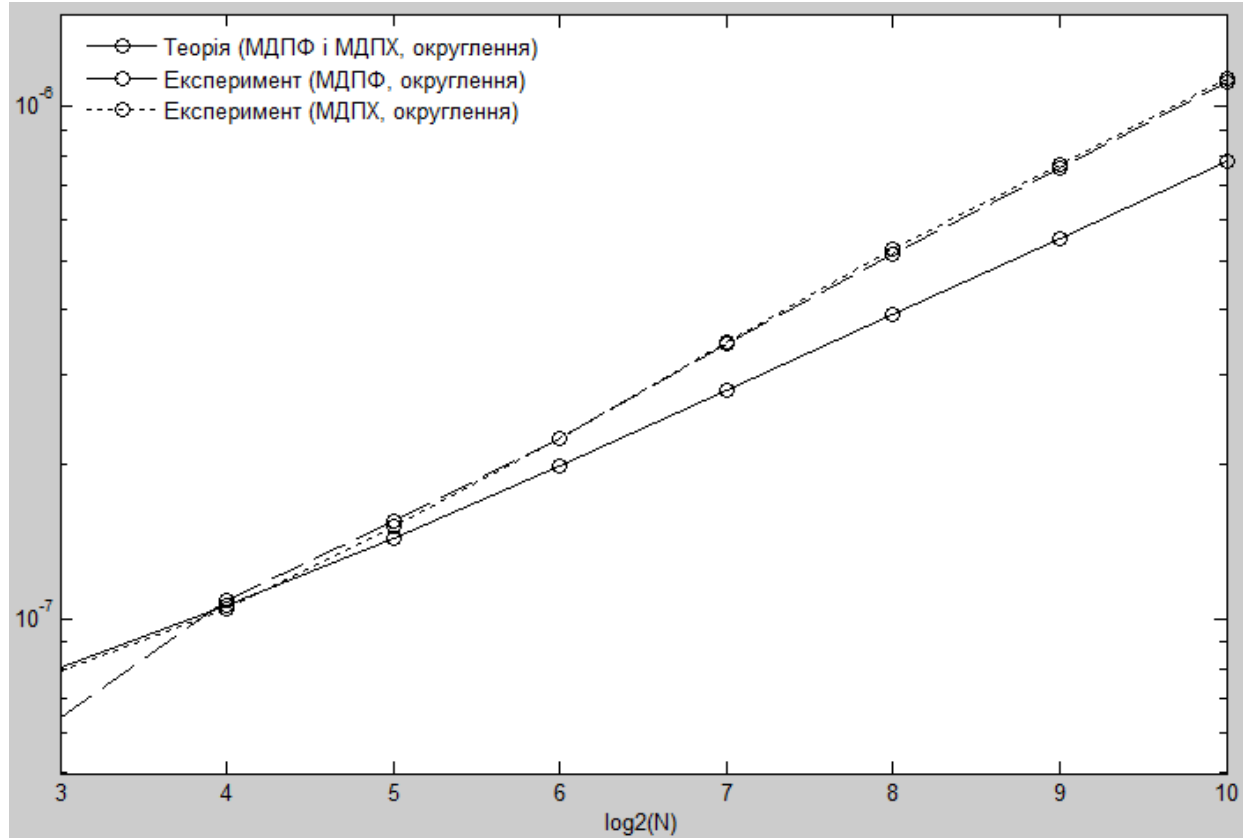


Рис. 6. Відношення вихідного шуму до вихідного сигналу для рекурентних методів обчислення МДПФ і МДПХ на ковзних інтервалах при реалізації в арифметиці з плаваючою комою для 32-розрядних чисел ($b=24$)

Література

1. Волинець В. І. Аналіз точності рекурентних методів обчислення дискретних перетворень Фур'є та Хартлі в арифметиці з фіксованою комою / В. І. Волинець // Вісник Хмельницького національного університету. Технічні науки. – 2006. – № 2, Т. 1. – С. 171–175.
2. Волинець В. І. Аналіз точності рекурентних методів обчислення дискретних перетворень Фур'є та Хартлі в арифметиці з плаваючою комою / В. І. Волинець // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2006. – Т. 11. – № 4. – С. 151–160.
3. Волинець В. І. Рекурентні методи обчислення дискретних перетворень Фур'є та Хартлі з підвищеною точністю обчислення в арифметиці з фіксованою комою / В. І. Волинець // Вісник Харківського національного університету ім. В. Н. Каразіна. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління». – 2010. – № 926. – Вип. 15. – С. 85–92.
4. Сергиенко А. Б. Цифровая обработка сигналов / А. Б. Сергиенко. – [3-е изд. – СПб : БХВ-Петербург, 2011. – 768 с.
5. Солонина А. И. Цифровая обработка сигналов. Моделирование в MATLAB / А. И. Солонина, С. М. Арбузов. – СПб : БХВ-Петербург, 2008. – 816 с.
6. Цифровая обработка сигналов и MATLAB / [А. И. Солонина, Д. М. Клионский, Т. В. Меркучева, С. Н. Перов]. – СПб : БХВ-Петербург, 2013. – 512 с.

References

1. V. I. Volynets, Analiz tochnosti rekurentnykh metodiv obchyslennia dyskretnykh peretvoren Furie ta Khartli v aryfmytytsi z fiksovanoiu komoiu, Visnyk Khmelnytskoho natsionalnoho universytetu. Technical science. Khmelnytsky, 2006, Issue 2, Part 1, pp. 171-175. [in Ukrainian]
2. V. I. Volynets, Analiz tochnosti rekurentnykh metodiv obchyslennia dyskretnykh peretvoren Furie ta Khartli v aryfmytytsi z plavaiuchoiu komoiu, Visnyk Ternopilskoho derzhavnogo tekhnichnoho universytetu, 2006, Volume 11, Issue 4, pp. 151-160. [in Ukrainian]
3. V. I. Volynets, Rekurentni metody obchyslennia dyskretnykh peretvoren Furie ta Khartli z pidvyshchenoiu tochnistiu obchyslennia v aryfmytytsi z fiksovanoiu komoiu, Visnyk Kharkivskoho natsionalnoho universytetu im. V. N. Karazina. Seriya «Matematychno modeliuвання. Informatsiini tekhnolohii. Avtomatyzovani systemy upravlinnia», 2010, Issue 926, Vyp. 15, pp. 85-92. [in Ukrainian]
4. A. B. Sergienko, Cifrovaya obrabotka signalov, 3-nth ed, SPb: BXV-Peterburg, 2011. [in Russian]
5. A. I. Solonina and S. M. Arbuzov, Cifrovaya obrabotka signalov. Modelirovanie v MATLAB, SPb.: BXV-Peterburg, 2008. [in Russian]
6. A. I. Solonina, D. M. Kliionskij, T. V. Merkucheva and S. N. Perov, Cifrovaya obrabotka signalov i MATLAB, SPb.: BXV-Peterburg, 2013. [in Russian]

Рецензія/Peer review : 21.10.2014 р.

Надрукована/Printed : 29.11.2014 р.

Рецензент: к.т.н., доц. Паночішин.Ю.М.