

О.В. СКІДАН  
Київський національний університет технології та дизайну  
Т.А. НАДОПТА, І.М. ПАСТУХ  
Хмельницький національний університет

## АНАЛІТИЧНІ ОСНОВИ СПЛАЙНІВ З КРУГОВИМИ КРИВОЛІНІЙНИМИ НАПРЯМНИМИ

*В роботі викладені аналітичні основи принципово нових підходів до формування абрисів деталей виробів легкої промисловості за допомогою сплайнових кривих з криволінійними напрямними. Розглянуті головні варіанти можливих комбінацій типів ділянок сплайнів, приведені всі необхідні для визначення положення точок кривої сплайну формули. Матеріал може бути використаний для розробки програмного забезпечення автоматизованого проектування абрисів деталей. Основною перевагою запропонованого типу кривих є спрощення процедури їх проектування з одночасним забезпеченням більш точного відображення реальних деталей. Перевагами розробленого методу є мобільність керування формою криволінійних кривих абрисів деталей із зниженням порядку кривої, в тому числі – з кривизною різного напрямку, зокрема, що перш вагомо для кривих характерних абрисів колодки та умовної розгортки колодки.*

**Ключові слова:** сплайнові криві, аналітична модель, криволінійні напрямні, проектування деталей

O.V. SKIDAN  
Kyiv National University of Technologies and Design  
T.A. NADOPTA, I.M. PASTUH  
Khmelnitsky Natsionalny Universitet

### ANALYTICAL FRAMEWORK OF SPLINES WITH CIRCULAR CURVED GUIDES

*Abstract – The paper deals with innovative analytical approaches to forming of detail outlines of light industry products by using of spline curves with curved guides. Some specific questions relating to the classification and terminology concerning general splines and splines with curved guides in particular are determined.*

*Different options of possible combinations of types of splines parts are considered, all necessary formulas for determining of the position of spline curve points are given. The material can be used for the development of software of detail outlines design. The main advantage of the proposed type of curves is simplification of design procedures while providing a more accurate representation of the real parts.*

*The advantages of the developed method is the mobility of management of detail outlines curve shape with the reduction of the curve order including the different directions of the curvature that is characteristic for curves of outlines and conditional scan of pads.*

**Keywords:** spline curves, analytical model, curvilinear guides, design details

### Вступ

Сучасні методи застосування основ прикладної та аналітичної геометрії дозволяють моделювати об'єкти досить складної форми. При цьому задачі котрі вирішуються, направлені на пошук аналітичного опису та подальшого моделювання об'єктів із застосуванням кривих різних порядків. Методи моделювання кривих ліній за способом опису умовно поділяться: за допомогою масивів точок; за допомогою рівнянь. Застосування масивів точок по –перше, громіздке, оскільки пов'язане із застосуванням значних чисельних методів обчислень, а по –друге, знайдені таким чином характеристики можуть не відповідати поставленим вимогам та не містять аналітичної основи [1]. Також вони розв'язують задачу не повною мірою, оскільки не враховують геометричних характеристик, властивих кривим лініям. Існує також певна кількість методів знаходження залежностей рівнянь опису кривих у вигляді різноманітних функцій, поліномів, тощо.

Актуальними задачами геометричного та аналітичного моделювання є розробка нових більш досконалих моделей, які описують реальні об'єкти, наприклад взуття. Тому необхідно розвивати теорію моделюючого апарату, який повинен забезпечувати відповідність побудованої моделі заданим вимогам та мати необхідну точність відтворення об'єкта.

### Аналіз останніх досліджень і публікацій

У практиці проектно-конструкторських робіт для моделювання кривих ліній застосовують певні підходи та методи [1-5]. Основою означених методів є використання геометричних прийомів та формування моделі кривих опису з використанням складних математичних прийомів та перетворень. Також слід звернути увагу, що проблеми та задачі визначення геометричних характеристик кривих та поверхонь розроблялися для певної групи об'єктів (літакобудування, суднобудування, геодезія).

А розвиток взуттєвої галузі вимагає безупинної розробки нових ефективних методик проектування на засадах сучасних комп'ютерних інформаційних технологій. Це неможливо без досліджень та розробок оптимізації процесів автоматизованого проектування та геометричного і аналітичного моделювання колодки та деталей взуття.

У роботах [6-8] розроблені головні засади використання сплайнових кривих для проектування абрисів деталей легкої промисловості, в першу чергу – взуттєвої. Там же викладені теоретичні принципи та алгоритми вирішення оберненої задачі проектування абрисів, яка полягає у знаходженні положення керуючих точок сплайну при відомих положеннях точок абрисів деталей. Розроблене відповідне програмне

забезпечення з метою практичної реалізації алгоритмів оберненої задачі. В статті [8] викладені пропозиції стосовно застосування сплайнів з криволінійними напрямними, наведені основні переваги методу, котрі, насамперед, полягають у більш гнучкому керуванні формою кривої, ускладненню форми абрисів при одночасному зниженню порядку кривої. Матеріал у статті [8] носить постановочний характер і потребує подальшого розвитку, насамперед в аналітичному плані, що і є завданням пропонованої статті.

**Формулювання мети дослідження**

Мета дослідження полягає у формуванні аналітичних основ сплайнів з круговими криволінійними напрямними за рахунок розробки варіантів можливих комбінацій сплайнів з криволінійними напрямними.

**Викладення основного матеріалу**

В першу чергу необхідно визначитись з деякими специфічними питаннями, котрі стосуються класифікації та термінології стосовно сплайнів взагалі та сплайнів з криволінійними напрямними зокрема. Сплайном або сплайновою кривою вважається гладка лінія, тобто лінія, в будь-якій точці якої однозначно визначається похідна. Особливим випадком сплайну може бути пряма (сплайн першого порядку, який визначається двома керуючими точками – кінцями цієї прямої).

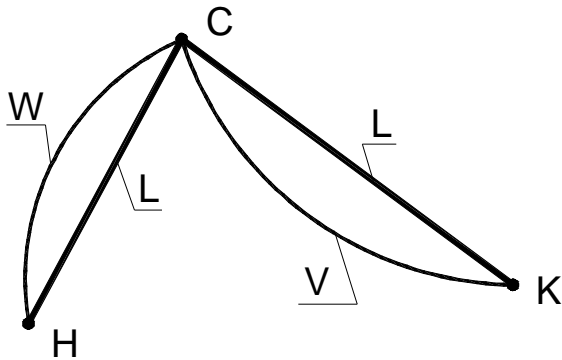


Рис. 1. Схема позначень в ЕС

В принципі абрис деталі може мати безліч перегинів, при цьому слід мати на увазі, що кожний перегин вимагає окремої керуючої точки, а порядок кривої на одиницю більший за число цих перегинів, відповідно – число керуючих точок на одиницю більше порядку кривої. В статті [8] показано, що застосування сплайнів з криволінійними напрямними дозволяє значно ускладнити форму кривої без збільшення її порядку. Відомо [1], що чим далі знаходиться певна ділянка від певної керуючої точки, тим менше положення цієї точки впливає на форму цієї ділянки сплайну. Таким чином у подальшому для спрощення

викладу достатньо дослідити аналітику найпростішої складової сплайнової кривої – її елемента. Елементом сплайну (ЕС) вважатимемо ділянку найменшої складності (виключаючи сплайн першого порядку), яка є сплайном другого порядку та визначається трьома керуючими точками. Також умовно встановимо послідовність цих точок шляхом обходу їх за годинниковою стрілкою (напрямок для аналітики принципової ролі не відіграє), тому точка Н буде точкою початку ЕС, точка С – серединою, а точка К – кінцевою (рис. 1). Відповідно відрізки НС – назовемо початковою ділянкою ЕС, а відрізок СК – кінцевою. У звичайних сплайнах НС і СК – прямолінійні напрямні, які позначимо буквою L. Звичайний ЕС типу L знаходиться всередині кута, утвореного напрямними, а кінці його співпадають з точкою початку та кінця ЕС (відповідно Н і К) (ці властивості зберігаються для ЕС всіх типів).

Криволінійна напрямна (КН) – будь-яка крива, яка з’єднує кінці початкової або кінцевої ділянок. Найпростішими з них можуть бути дуги кола, еліпса тощо. В подальшому розглядаються криволінійні напрямні у вигляді дуг кола. Якщо центр кривизни КН знаходиться всередині кута, утвореного напрямними ЕС, то така КН називається опуклою (тип W), якщо зовні його – вгнутою (тип V). Очевидно, що центр кола завжди буде симетричним відносно кінців відповідної ділянки.

Варіант LL детально розглянуто з позицій аналітики в [1], а принцип побудови – [5]. Нагадаємо, що основою для всіх розрахунків, необхідних для побудови сплайнів різних типів, є параметр  $t$ , оскільки положення будь-якої точки на відрізку визначається шляхом множення цього параметра на довжину відрізка.

**Варіант WL**

В цій комбінації початковою напрямною є криволінійна опукла, кінцевою – прямолінійна. Розрахункова схема показана на рисунку 2.

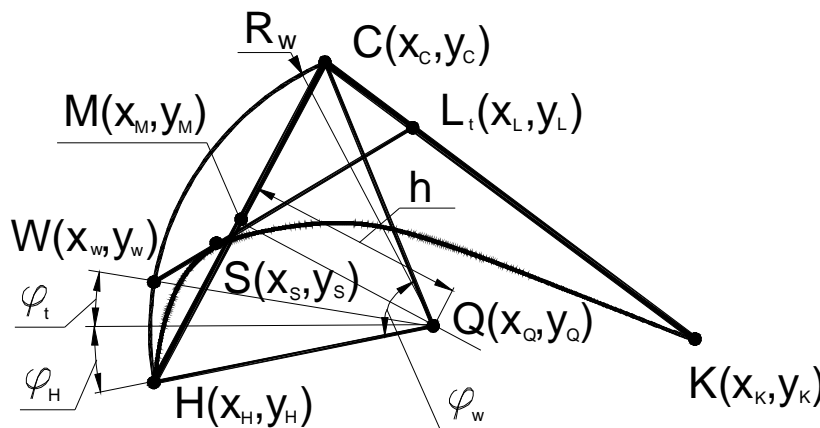


Рис. 2. Схема побудови сплайна типу WL

Задано координатами положення керуючих точок сплайну  $H(x_H, y_H)$ ,  $C(x_C, y_C)$ ,  $K(x_K, y_K)$ , варіативно вибирається радіус криволінійної напрямної  $R_W$ . Задача зводиться до визначення координат точки сплайну при певному значенні параметра  $t$  (поточна точка  $S$  з координатами  $x_S, y_S$ ).

$$x_S = x_W + t(x_L - x_W),$$

$$y_S = y_W + t(y_L - y_W).$$

Координати точки L

$$x_L = x_C + t(x_K - x_C)$$

$$y_L = y_C - t(y_C - y_K)$$

Координати точки W

$$x_W = x_Q - R_W \cos f_t,$$

$$y_W = y_Q + R_W \sin f_t$$

Положення центра кола кругової криволінійної напрямної визначається з наступної побудови. З середини  $M$  початкового відрізка  $HC$ , координати якої

$$x_M = x_H + 0,5(x_C - x_H),$$

$$y_M = y_H + 0,5(y_C - y_H)$$

проводиться перпендикуляр, на якому відкладається відстань

$$h = \sqrt{R^2 - (0,5 HC)^2}.$$

Якщо врахувати, що кутовий коефіцієнт нахилу напрямної  $HC$

$k_{HC} = (y_C - y_H)/(x_C - x_H)$ , то кутовий коефіцієнт перпендикуляра  $k_h = -(1/k_{HC})$ , який чисельно дорівнює тангенсу кута нахилу перпендикуляра. Тоді

$$x_Q = x_M + h \cos(\text{arc tg } k_h),$$

$$y_Q = y_M - h \sin(\text{arc tg } k_h).$$

Кут  $f_t$ , необхідний для визначення координат поточної точки  $W$  ( $x_W, y_W$ ),

$$f_t = t \cdot f_W - f_H,$$

де допоміжний кут

$$f_H = \text{arc tg}((y_Q - y_H)/(x_Q - x_H)),$$

а кут дуги криволінійної напрямної

$$f_W = 2(\text{arc sin}(0,5HC/R)).$$

Довжина відрізка  $HC = \sqrt{(x_C - x_H)^2 + (y_C - y_H)^2}$ .

Наведена аналітика є першоосною для автоматизованих розрахунків координат точок сплайнової кривої з круговою опуклою початковою напрямною.

Розглянемо інші варіанти.

#### Варіант VL

В цьому випадку початковою напрямною є вгнута кругова напрямна, кінцевою – прямолінійна напрямна. Схема подібної комбінації напрямних показана на рисунку 3. По можливості збережена система позначень, яка використовувалась в попередній схемі.

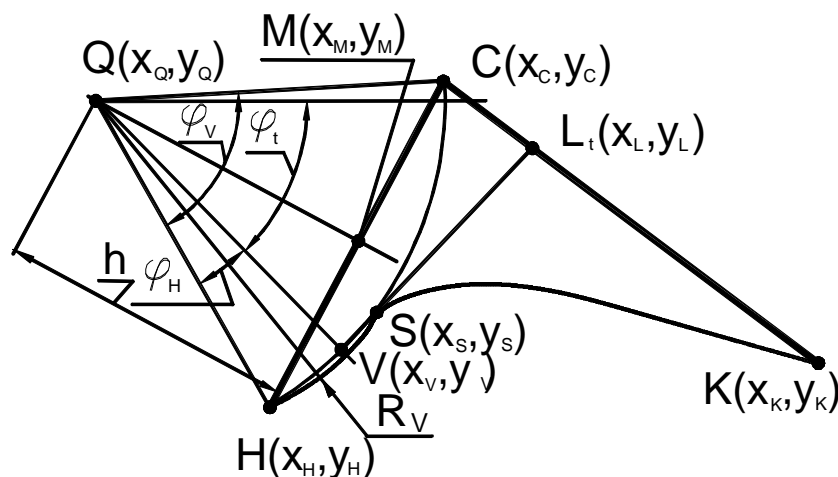


Рис. 3. Схема побудови сплайна типу VL

Задача зводиться до визначення координат точки сплайну при певному значенні параметра  $t$  (поточна точка  $S$  з координатами  $x_s, y_s$ ).

$$\begin{aligned} x_s &= x_w + t(x_L - x_w), \\ y_s &= y_w + t(y_L - y_w), \\ x_L &= x_C + t(x_K - x_C), \\ y_L &= y_C - t(y_C - y_K), \\ x_w &= x_Q + R_w \cos f_t, \\ y_w &= y_Q - R_w \sin f_t. \\ x_M &= x_H + 0,5(x_C - x_H), \\ y_M &= y_H + 0,5(y_C - y_H) \\ h &= \sqrt{R^2 - (0,5 HC)^2}. \end{aligned}$$

Кутовий коефіцієнт нахилу напрямної  $HC$

$k_{HC} = (y_C - y_H)/(x_C - x_H)$ , то кутовий коефіцієнт перпендикуляра  $k_h = -(1/k_{HC})$ , який чисельно дорівнює тангенсу кута нахилу перпендикуляра. Тоді

$$\begin{aligned} x_Q &= x_M + h \cos(\arctg k_h), \\ y_Q &= y_M + h \sin(\arctg k_h). \\ f_t &= f_w - f_H - \arcsin((y_C - y_Q)/(x_C - x_Q)). \\ f_w &= 2(\arcsin(0,5HC/R)) \\ f_H &= t \cdot f_w, \\ f_w &= 2(\arcsin(0,5HC/R)). \\ HC &= \sqrt{(x_C - x_H)^2 + (y_C - y_H)^2}. \end{aligned}$$

**Варіант WV**

Схема, що відповідає цій комбінації, показана на рисунку 4.

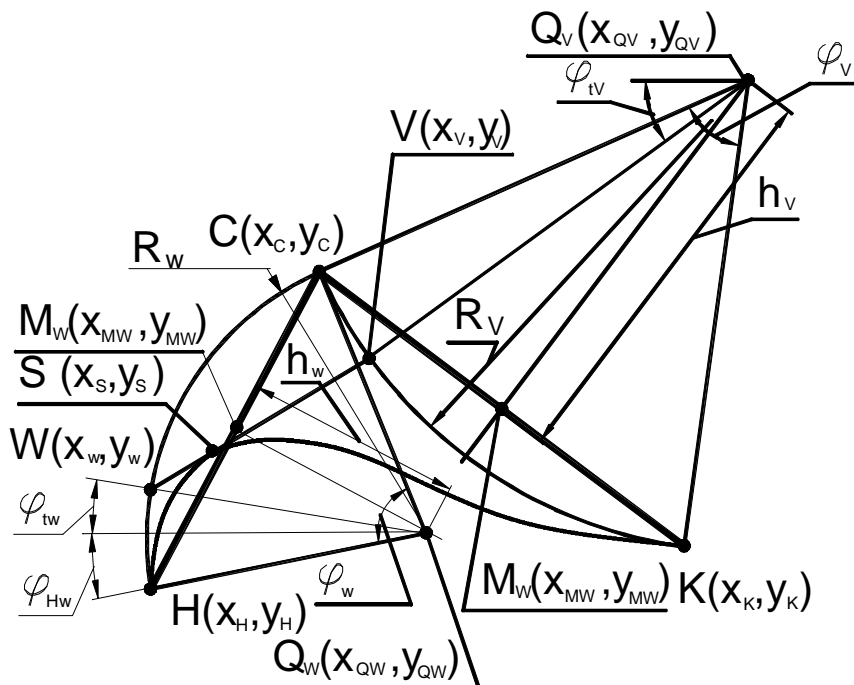


Рис. 4. Схема побудови сплайну типу WV

На рисунку 4 дотримано наступної системи індексації: параметри, котрі стосуються опуклої криволінійної напрямної включають індекс  $W$ , вгнутої – індекс  $V$ . Параметри, які стосуються опуклої криволінійної напрямної аналогічні аналітиці до рисунку 2 з врахуванням специфіки позначень, матеріал викладено без коментарів та пояснень.

$$x_w = x_{QW} - R_w \cos f_{tW},$$

$$\begin{aligned}
y_W &= y_{QW} + R_W \sin f_{tW} \\
x_{MW} &= x_H + 0,5(x_C - x_H), \\
y_{MW} &= y_H + 0,5(y_C - y_H) \\
h_W &= \sqrt{R_W^2 - (0,5 HC)^2}. \\
k_{HC} &= (y_C - y_H)/(x_C - x_H), \quad k_{hW} = -(1/k_{HC}) \\
x_{QW} &= x_{MW} + h_W \cos(\operatorname{arc} \operatorname{tg} k_{hW}), \\
y_{QW} &= y_{MW} - h_W \sin(\operatorname{arc} \operatorname{tg} k_{hW}). \\
f_t &= t \cdot f_W - f_H.
\end{aligned}$$

Кут  $f_W$  визначається

$$\begin{aligned}
f_{tW} &= t \cdot f_W - f_{HW}, \\
f_{HW} &= \operatorname{arc} \operatorname{tg}((y_{QW} - y_H)/(x_{QW} - x_H)), \\
f_W &= 2(\operatorname{arc} \sin(0,5HC/R_W)). \\
HC &= \sqrt{(x_C - x_H)^2 + (y_C - y_H)^2}.
\end{aligned}$$

Координати точки V визначаються наступним чином

$$\begin{aligned}
x_V &= x_{QV} - R_V \cos f_{tV}, \\
y_V &= y_{QV} - R_V \sin f_{tV} \\
x_{MV} &= x_C + 0,5(x_K - x_C), \\
y_{MV} &= y_C + 0,5(y_C - y_K) \\
h_V &= \sqrt{R_V^2 - (0,5 KC)^2}. \\
k_{KC} &= (y_K - y_C)/(x_K - x_C), \quad k_{hV} = -(1/k_{KC}) \\
x_{QV} &= x_{MV} + h_V \cos(\operatorname{arc} \operatorname{tg} k_{hV}), \\
y_{QV} &= y_{MV} + h_V \sin(\operatorname{arc} \operatorname{tg} k_{hV}). \\
f_{tV} &= t \cdot f_V + \operatorname{arc} \sin((y_{QV} - y_C)/R_V). \\
f_V &= 2(\operatorname{arc} \sin(0,5KC/R_V)). \\
KC &= \sqrt{(x_C - x_K)^2 + (y_C - y_K)^2}.
\end{aligned}$$

#### Варіант VW

Схема варіанта показана на рисунку 5. Аналітика до рисунка 5, як це було раніше для інших схем, приводиться без коментарів.

Координати точки V визначаються наступним чином

$$\begin{aligned}
x_V &= x_{QV} + R_V \cos f_{tV}, \\
y_V &= y_{QV} - R_V \sin f_{tV} \\
x_{MV} &= x_C - 0,5(x_K - x_H), \\
y_{MV} &= y_C - 0,5(y_C - y_H) \\
h_V &= \sqrt{R_V^2 - (0,5 HC)^2}. \\
k_{KC} &= (y_C - y_H)/(x_C - x_H), \quad k_{hV} = -(1/k_{KC}). \\
x_{QV} &= x_{MV} - h_V \cos(\operatorname{arc} \operatorname{tg} k_{hV}), \\
y_{QV} &= y_{MV} + h_V \sin(\operatorname{arc} \operatorname{tg} k_{hV}). \\
f_{tV} &= f_V - t \cdot f_V - \operatorname{arc} \sin((y_C - y_{QV})/R_V). \\
f_V &= 2(\operatorname{arc} \sin(0,5HC/R_V)). \\
HC &= \sqrt{(x_C - x_H)^2 + (y_C - y_H)^2}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x_W &= x_{QW} + R_W \cos f_{tW} \\
 y_W &= y_{QW} + R_W \sin f_{tW} \cdot \\
 x_{MW} &= x_K + 0,5(x_K - x_C) , \\
 y_{MW} &= y_K + 0,5(y_C - y_K) \cdot \\
 h_W &= \sqrt{R_W^2 - (0,5 KC)^2} . \\
 k_{HC} &= (y_C - y_K)/(x_C - x_K) , k_{hW} = -(1/k_{HC}) . \\
 x_{QW} &= x_{MW} - h_W \cos(\text{arc tg } k_{hW}) , \\
 y_{QW} &= y_{MW} - h_W \sin(\text{arc tg } k_{hW}) .
 \end{aligned}$$

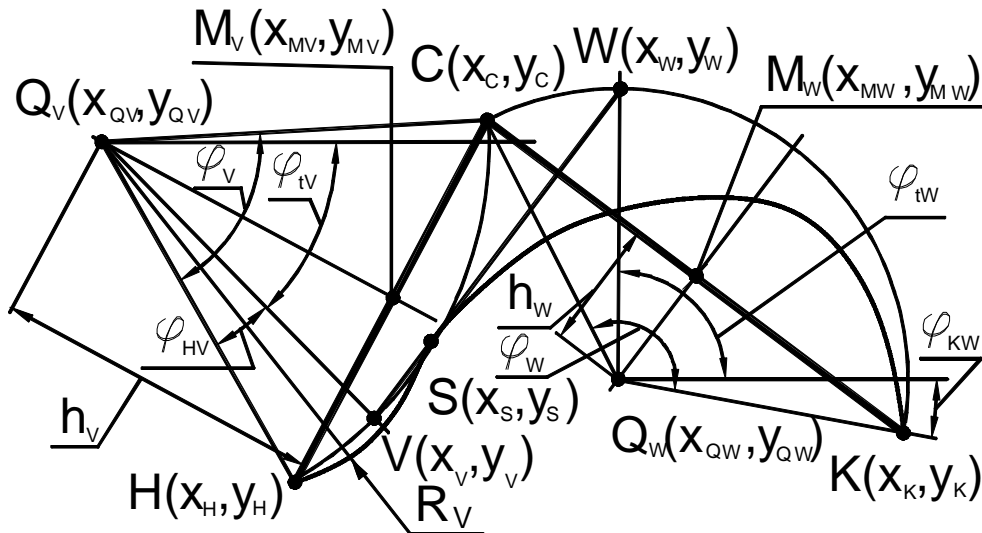


Рис. 5. Схема побудови сплайну типу VW

Кут  $f_W$  визначається

$$\begin{aligned}
 f_W &= 2 (\text{arc sin}(0,5KC/R_W)) \\
 f_{tW} &= f_W - t \cdot f_W - f_{KW} , \\
 f_{KW} &= \text{arc tg}((y_{QW} - y_K)/(x_{QW} - x_K)) , \\
 KC &= \sqrt{(x_C - x_K)^2 + (y_C - y_K)^2} .
 \end{aligned}$$

Всі інші можливі комбінації (LW, LV, WW, VV та інші) є окремими випадками вищенаведених і аналітика для них може бути розроблена, спираючись на наведене вище.

Звертаємо увагу на те, що на кожному з рисунків, не дивлячись на однакове положення керуючих точок, форма сплайну весь час змінюється, що ще раз вказує на переваги сплайнів з криволінійними напрямними, головна з яких полягає у більш гнучкій підгонці реальних абрисів деталей. Ще одна важлива обставина, яку слід враховувати – радіус кругової криволінійної напрямної повинен бути більшим половини довжини відповідної прямолінійної напрямної.

Наведений аналітичний апарат може бути використаний для розробки відповідного програмного продукту. Нижче наведено (рис. 7) приклад такого блоку для розрахунку однієї з координат (інша принципово не відрізняється) для схеми WL. Програма складена в обчислювальній системі MathCAD. На рисунку 6 представлено рисунок сплайна, координати якого розраховані за наведеною програмою.

Одночасно на рисунку 6 показані прямолінійні напрямні, в межах кута між ними повинен був би розташовуватись звичайний сплайн, що свідчить про принципово нові розширені можливості сплайнів з криволінійними напрямними у відтворенні складних абрисів деталей.

**Висновки**

Запропоновано метод профілювання абрисів деталей сплайновими кривими з круговими криволінійними напрямними, який забезпечує гнучкість керування формою криволінійних абрисів деталей, зниження порядку кривої значної складності, в тому числі – з кривизною різного знаку.

Розроблені аналітичні основи розрахунку координат точок сплайнових кривих з круговими криволінійними напрямними для основних комбінацій типів ділянок.

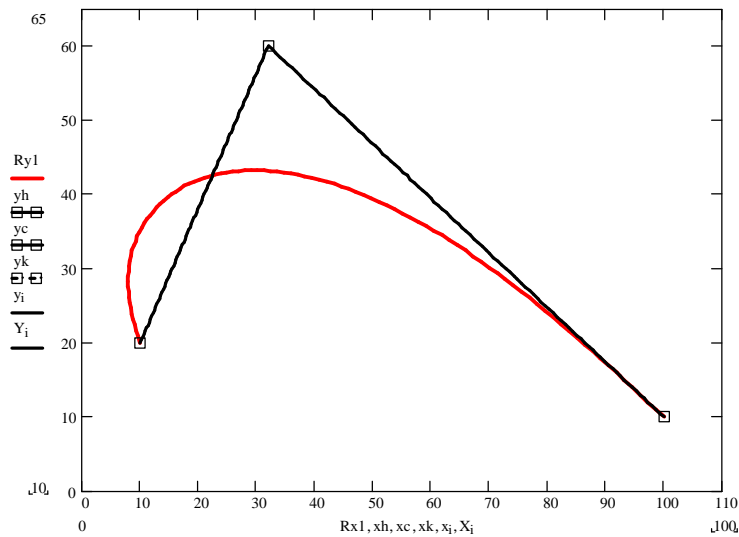


Рис. 6. Приклад сплайна з круговими криволінійними напрямними

Література

1. Надопта Т.А. Розробка методу проектування деталей верху взуття на основі аналітичної моделі прототипу: дис. ... канд. техн. наук: 05.18.18 / Надопта Тетяна Анатоліївна – Хмельницький, 2013. – 214 с.
2. Калашніков, О. О. Геометричне та комп'ютерне моделювання компонентів спеціальної техніки швидкого реагування : автореф. дис. ... канд. техн. наук : спец. 05.01.01 «Прикладна геометрія, інженерна графіка» / Калашніков Олександр Олександрович ; Таврійська державна агротехнічна академія. - Мелітополь, 2005. – 45 с
3. Белкин Е. А. Модульно-геометрический метод математического моделирования каркасной дискретно-определенной поверхности / Е. А. Белкин // Известия ТулГУ. Серия. Технологическая системотехника.. –Тула. – 2006. – Вып.4. – С.99-110.
4. Ткачевський Я.І. Використання структурних геометричних моделей для контролю форми літака / Я.І. Ткачевський // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – 2005. – Вип. 75. – С. 179-182.
5. Малкіна В. М. Геометричне моделювання поверхонь на основі спеціальних систем ортонормованих поліномів : автореф. дис. ... канд. техн. наук : спец. 05.01.01 «Прикладна геометрія, інженерна графіка» / Малкіна Віра Михайлівна ; КНУБА. – К., 1999. – 16 с
6. Надопта Т. А. Моделювання профільних абрисів прототипу взуття з використанням кривих Безьє / Т. А. Надопта // Вісник Хмельницького національного університету. Технічні науки. – 2008. – № 6. – С. 222-226.
7. Надопта Т.А. Особливості формування габаритного сліду прототипу / Т. А. Надопта // Вісник Хмельницького національного університету. Технічні науки. – 2010. – № 4. – С. 247-252.
8. Скідан О.В. Теоретичні передумови аналітичного проектування взуття / О.В. Скідан, Т.А. Надопта, І.М. Пастух, // Вісник Хмельницького національного університету. Технічні науки. – 2015. – № 4. – 244-248.

```

KBx(R, xh, yh, xc, yc, xk, yk) :=
t ← 0
dt ← 0.01
x0 ← xh
y0 ← yh
t ← t + dt
i ← 1
HC ← [(xc - xh)² + (yc - yh)²]⁰.⁵
"R<0.5HC" if R < 0.5·HC
break if R < 0.5·HC
h ← [R² - (0.5·HC)²]⁰.⁵
xm ← xh + 0.5·(xc - xh)
ym ← yh + 0.5·(yc - yh)
khc ← (yc - yh) / (xc - xh)
kh ← (1 / khc)
xq ← xm + h·cos(atan(kh))
yq ← ym + h·cos(atan(kh))
fh ← atan[(yq - yh) / (xq - xh)]
fw ← 2·(asin(0.5·(HC/R)))
while t ≤ 1
    xl ← xc + t·(xk - xc)
    yl ← yc - t·(yc - yk)
    ft ← t·fw - fh
    xw ← xq - R·cos(ft)
    yw ← yq + R·sin(ft)
    xs ← xw + t·(xl - xw)
    xi ← xs
    ys ← yw + t·(yl - yw)
    yi ← ys
    i ← i + 1
    t ← t + dt
x
    
```

Рис. 7. Приклад програмного модуля для визначення координат сплайна з круговими криволінійними напрямними типу WL