

ЗГИН КРУГОВОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ ЗІ ЗМІННОЮ ТОВЩИНОЮ

Отримано аналітичний розв'язок для неоднорідного диференціального рівняння четвертого порядку, що описує осесиметричну деформацію замкненої кругової циліндричної оболонки зі змінною товщиною стінок. Отримано формули для параметрів оболонки. Наявність даних формул дозволяє досліджувати напружено-деформований стан оболонки з різними граничними умовами. Виведено квадратури для чисельної реалізації знайдених аналітичних розв'язків. Досліджено напружено-деформований стан циліндричної оболонки у вигляді резервуару з товщиною, яка змінюється за лінійним законом, під дією осесиметричного гідростатичного тиску. Результати розрахунків авторським методом практично збігаються із відповідними результатами, виконаними в пакеті ANSYS. Для обох випадків побудовані графіки залежності переміщень та напружень від координати.

Ключові слова: циліндрична оболонка, метод прямого інтегрування, змінна товщина, чисельна реалізація, напруження, переміщення, ANSYS.

Y. S. KRUTII, N. G. SURYANINOV
Odessa State Academy of Construction and Architecture

BEND CLOSED CIRCULAR CYLINDRICAL SHELL WITH VARIABLE THICKNESS

The analytical solution for inhomogeneous differential equation of the fourth order, describing the axisymmetric deformation of a closed circular cylindrical shell with variable wall thickness. The formulas for the parameters of the shell. The presence of these formulas allows to investigate the mode of deformation shell with various boundary conditions. Displaying quadrature for numerical implementation of analytical solutions found. The stress-strain state of cylindrical shell in a tank with a thickness that varies linearly, axially symmetric under hydrostatic pressure. The results of calculations by the author practically coincide with the corresponding results performed in package ANSYS. Both cases are constructed plots of displacement and stress of coordinates.

Keywords: cylindrical shell, method of direct integration, variable thickness, numerical implementation, strain, displacement, ANSYS.

Вступ. Оболонкові конструкції широко застосовуються в сучасній техніці. Поєднуючи малу вагу з високою міцністю, оболонки є найпоширенішими конструктивними елементами. Тонкостінні елементи типу оболонок використовуються в машинобудівних конструкціях, у транспортних і хімічних машинобудуванні, у промислових і цивільних будівництвах, в авіаційних, ракетних і суднових конструкціях. Серед усіх видів оболонок, використовуваних людиною, найбільший інтерес представляють циліндричні оболонки, у яких вдало сполучаються простота, компактність і висока технологічність. Кругові циліндричні оболонки входять елементами в конструкції літальних апаратів і двигунів, підводних і надводних засобів пересування, резервуарів і трубопроводів, склепінних систем підводних і підземних тунелів і сховищ.

До схеми осесиметричної циліндричної оболонки зводиться дуже багато інженерних конструкцій, у тому числі, казанів, баків, нафтопроводів, газопроводів, деталей машин і ін.

Аналіз досліджень та публікацій. Математичні основи розрахунків напружено-деформованого стану оболонок у статичі, що дозволяють обійтися без громіздкого апарата тривимірної теорії пружності, з'явилися на початку ХХ століття.

У період з 1920 по 1930 рр. розроблена теорія симетричної деформації оболонок – тіл обертання постійної й змінної товщини, що має велике прикладне значення у зв'язку з розрахунками тонкостінних куполів, резервуарів і їх днищ. Шляхом використання комплексної допоміжної функції, швейцарському вченому Мейсснеру [1] вдалося звести розв'язок цієї задачі до розв'язку диференціального рівняння другого порядку, що понизило вдвічі порядок рівнянь і явилось істотним кроком вперед. З'явилася можливість одержання як точних розв'язків зазначеного рівняння для ряду оболонок конкретної форми (конічної, сферичної, тороїдальної), так і для розробки наближених підходів до розрахунку оболонок обертання з довільною формою меридіана.

Однак робіт, у яких розглядаються оболонки змінної жорсткості, порівняно мало. Одним з перших такі оболонки досліджував Е.Ф. Бурмістров [2], який розв'язав задачу про симетричний згин ортотропної циліндричної оболонки, товщина якої по довжині змінюється за лінійним законом. Розв'язок знаходиться методом малого параметра з урахуванням другого наближення.

Слід відзначити книгу Я.М. Григоренко й Л.В. Мольченко [3], у якій значна увага приділена теорії круглих і прямокутних пластин і оболонок змінної товщини при нерівномірних навантаженнях і різних граничних умовах.

Цікавими представляються також роботи представників казахстанської школи А.Н. Тюреходжаєва та В.Б. Ристигулової [4]. Тут досліджений напружено-деформований стан циліндричної оболонки змінної й постійної товщини під дією розподіленого навантаження. Отримано аналітичні розв'язки задачі осесиметрично навантаженої циліндричної оболонки методом часткової дискретизації нелінійних диференціальних рівнянь. Цей же метод для розв'язку задачі про згин циліндричної оболонки змінної товщини успішно застосував Б.Ж. Кирикбаєв [5].

Однак аналітичні розв'язки задачі про згин циліндричної оболонки змінної жорсткості в літературі

практично відсутні.

Метою роботи є побудова аналітичного розв'язку задачі про згин циліндричної оболонки з товщиною, що змінюється за довільним законом.

Основний матеріал дослідження. Розглянемо згин замкненої кругової циліндричної оболонки змінної товщини під дією навантаження, розподіленого симетрично щодо поздовжньої осі циліндра (рис. 1). Деформація такої оболонки також буде симетричною. Відповідне диференціальне рівняння отримав С.П. Тимошенко [6]:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(D(x) \frac{d^2 w}{dx^2} \right) + \frac{Eh(x)}{a^2} w = Z. \quad (1)$$

де $D(x) = \frac{Eh^3(x)}{12(1-\mu^2)}$ – змінна циліндрична жорсткість, a – радіус оболонки.

Таким чином, осесиметрична деформація кругової циліндричної оболонки змінної товщини описується лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням четвертого порядку зі змінними коефіцієнтами.

Побудуємо аналітичний розв'язок цього рівняння, застосовуючи метод прямого інтегрування [7–10].

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння (1) можна отримати, скориставшись формулами, якими визначений частинний розв'язок аналогічного за виглядом диференціального рівняння вільних поперечних коливань [7].

Відповідне однорідне рівняння

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(D(x) \frac{d^2 w}{dx^2} \right) + \frac{Eh(x)}{a^2} w = 0 \quad (2)$$

за своєю структурою співпадає з рівнянням вільних поперечних коливань стрижня зі змінною жорсткістю та змінною масою. Завдяки цьому, загальний розв'язок рівняння (2) можна отримати за відповідними формулами [7], вносячи там певні корективи.

Аналогом представлень [7] для поперечної жорсткості, погонної маси стрижня й поперечного навантаження тут будуть представлення для циліндричної жорсткості, товщини оболонки й тиску

$$D(x) = D_0 A(x), \quad h(x) = h_0 B(x), \quad Z(x) = Z_0 C(x), \quad (3)$$

де D_0, h_0, Z_0 – сталі величини, а саме циліндрична жорсткість, товщина й тиск у деякій характерній точці;

$A(x), B(x), C(x)$ – безрозмірні неперервні функції, що визначають закони змін своїх величин уздовж осі x .

Враховуючи при цьому, що циліндрична жорсткість виражається через товщину, знаходимо:

$$D_0 = \frac{Eh_0^3}{12(1-\mu^2)}; \quad A(x) = B^3(x).$$

Вносячи очевидні зміни у відповідну формулу [7], також одержимо $K^2 = -L^2$, де L – безрозмірний параметр,

$$L = \frac{l^2}{ah_0} \sqrt{12(1-\mu^2)}.$$

Для зручності запису, перезначимо: $\varphi(x) = \frac{dw}{dx}$; $M_x = M(x)$; $Q_x = Q(x)$.

Звернемо увагу, що для параметрів напружено-деформованого стану оболонки $w(x), \varphi(x), M(x), Q(x)$ справедливі формули, аналогічні формулам [7]. Саме тому тут можна скористатися не тільки формулою для переміщення, а й формулами для інших параметрів.

У підсумку будемо мати наступні формули:

$$w(x) = w(0)X_1(x) + \varphi(0)lX_2(x) - M(0)\frac{l^2}{D_0}X_3(x) - Q(0)\frac{l^3}{D_0}X_4(x) + Z_0\frac{l^4}{D_0}X_5(x); \quad (4)$$

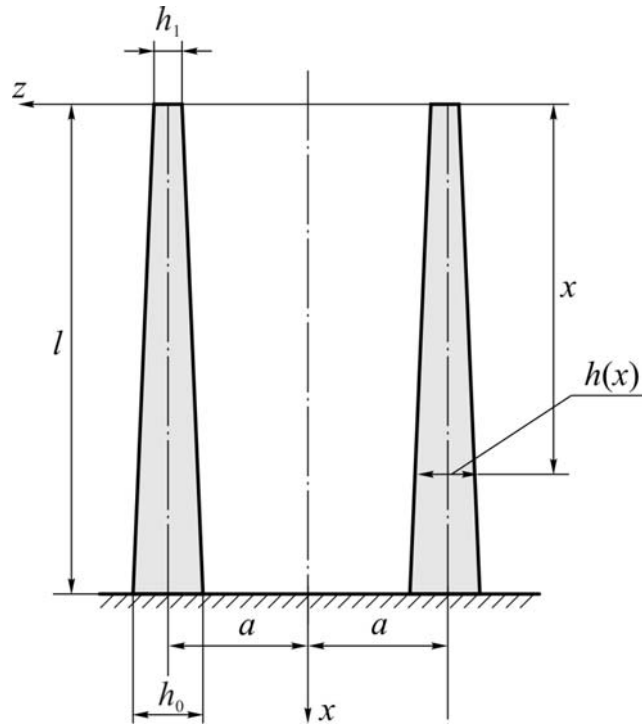


Рис. 1. Циліндричний резервуар зі змінною товщиною стінок

$$\varphi(x) = w(0)\frac{1}{l}\tilde{X}_1(x) + \varphi(0)\tilde{X}_2(x) - M(0)\frac{l}{D_0}\tilde{X}_3(x) - Q(0)\frac{l^2}{D_0}\tilde{X}_4(x) + Z_0\frac{l^3}{D_0}\tilde{X}_5(x); \quad (5)$$

$$M(x) = -w(0)\frac{D_0}{l^2}\hat{X}_1(x) - \varphi(0)\frac{D_0}{l}\hat{X}_2(x) + M(0)\hat{X}_3(x) + Q(0)l\hat{X}_4(x) - Z_0l^2\hat{X}_5(x); \quad (6)$$

$$Q(x) = -w(0)\frac{D_0}{l^3}\hat{X}_1(x) - \varphi(0)\frac{D_0}{l^2}\hat{X}_2(x) + M(0)\frac{1}{l}\hat{X}_3(x) + Q(0)\hat{X}_4(x) - Z_0l\hat{X}_5(x). \quad (7)$$

$$X_n(x) = \beta_{n,0}(x) - L^2\beta_{n,1}(x) + L^4\beta_{n,2}(x) - L^6\beta_{n,3}(x) + \dots \quad (n = 1, 2, 3, 4, 5);$$

$$\beta_{n,0}(x) = \left(\frac{x}{l}\right)^{n-1} \quad (n = 1, 2), \quad \beta_{n,0}(x) = \frac{1}{l^2} \int_0^x \int_0^x \frac{1}{B^3(x)} \left(\frac{x}{l}\right)^{n-3} dx dx \quad (n = 3, 4)$$

$$\beta_{5,0}(x) = \frac{1}{l^4} \int_0^x \int_0^x \frac{1}{B^3(x)} \int_0^x C(x) dx dx dx; \quad (8)$$

$$\beta_{n,k}(x) = \frac{1}{l^4} \int_0^x \int_0^x \frac{1}{B^3(x)} \int_0^x B(x) \beta_{n,k-1}(x) dx dx dx dx \quad (k = 1, 2, 3, \dots);$$

$$\beta_{n,k}(x) = \frac{1}{l^{4k}} \int_0^x \int_0^x \frac{1}{B^3(x)} \int_0^x B(x) \dots \int_0^x \frac{1}{B^3(x)} \int_0^x B(x) \beta_{n,0}(x) dx dx dx dx \dots dx dx dx dx;$$

$$\tilde{X}_n(x) = \tilde{\beta}_{n,0}(x) - L^2\tilde{\beta}_{n,1}(x) + L^4\tilde{\beta}_{n,2}(x) - L^6\tilde{\beta}_{n,3}(x) + \dots;$$

$$\hat{X}_n(x) = \hat{\beta}_{n,0}(x) - L^2\hat{\beta}_{n,1}(x) + L^4\hat{\beta}_{n,2}(x) - L^6\hat{\beta}_{n,3}(x) + \dots;$$

$$\hat{X}_n(x) = \hat{\beta}_{n,0}(x) - L^2\hat{\beta}_{n,1}(x) + L^4\hat{\beta}_{n,2}(x) - L^6\hat{\beta}_{n,3}(x) + \dots;$$

$$\tilde{\beta}_{n,k}(x) = l\beta'_{n,k}(x), \quad \hat{\beta}_{n,k}(x) = lA(x)\tilde{\beta}'_{n,k}(x), \quad \hat{\beta}_{n,k}(x) = l\hat{\beta}'_{n,k}(x) \quad (n = 1, 2, 3, 4, 5) \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (9)$$

Нагадаємо, що функції $X_n(x)$, $\tilde{X}_n(x)$, $\hat{X}_n(x)$, $\hat{X}_n(x)$ ($n = 1, 2, 3, 4, 5$), через які виражені розв'язки (4) – (7), є безрозмірними.

Тепер слід вказати також формули, які будуть необхідні для чисельної реалізації зазначених точних розв'язків (4) – (7). Дані формули засновані на апроксимації:

$$\frac{1}{B^3(x)} = A_0 + A_1\left(\frac{x}{l}\right) + A_2\left(\frac{x}{l}\right)^2 + \dots + A_s\left(\frac{x}{l}\right)^s; \quad (10)$$

$$B(x) = B_0 + B_1\left(\frac{x}{l}\right) + B_2\left(\frac{x}{l}\right)^2 + \dots + B_p\left(\frac{x}{l}\right)^p; \quad (11)$$

$$C(x) = C_0 + C_1\left(\frac{x}{l}\right) + C_2\left(\frac{x}{l}\right)^2 + \dots + C_g\left(\frac{x}{l}\right)^g. \quad (12)$$

Квадратури для чотирьох початкових функцій $\beta_{n,0}(x)$, $\tilde{\beta}_{n,0}(x)$, $\hat{\beta}_{n,0}(x)$, $\hat{\beta}_{n,0}(x)$ ($n = 1, 2, 3, 4$) отримані в [7]. Квадратури для $\beta_{5,0}(x)$, $\tilde{\beta}_{5,0}(x)$, $\hat{\beta}_{5,0}(x)$, $\hat{\beta}_{5,0}(x)$ одержимо, скориставшись формулами (9) – (12). У результаті будемо мати:

$$\beta_{5,0}(x) = \left(\frac{x}{l}\right)^4 \sum_{j=0}^{s+g} \frac{F_j}{(j+3)(j+4)} \left(\frac{x}{l}\right)^j; \quad \tilde{\beta}_{5,0}(x) = \left(\frac{x}{l}\right)^3 \sum_{j=0}^{s+g} \frac{F_j}{j+3} \left(\frac{x}{l}\right)^j;$$

$$\hat{\beta}_{5,0}(x) = \left(\frac{x}{l}\right)^2 \sum_{j=0}^g \frac{C_j}{(j+1)(j+2)} \left(\frac{x}{l}\right)^j; \quad \hat{\beta}_{5,0}(x) = \frac{x}{l} \sum_{j=0}^g \frac{C_j}{j+1} \left(\frac{x}{l}\right)^j;$$

де

$$F_j = \sum_{v=0}^j \frac{C_v A_{j-v}}{(v+1)(v+2)},$$

причому $C_v = 0$, якщо $v > g$ та $A_{j-v} = 0$, якщо $j - v > s$.

Для твірних функцій справедливі представлення:

$$\beta_{n,k}(x) = \left(\frac{x}{l}\right)^{4k+n-1} \sum_{j=0}^{k(p+s)+\lambda_n-n+1} c_{k,j}^{(n)} \left(\frac{x}{l}\right)^j; \quad (13)$$

$$\tilde{\beta}_{n,k}(x) = \left(\frac{x}{l}\right)^{4k+n-2} \sum_{j=0}^{k(p+s)+\lambda_n-n+1} \frac{e_{k-1,j}^{(n)}}{4k+j+n-2} \left(\frac{x}{l}\right)^j; \quad (14)$$

$$\hat{\beta}_{n,k}(x) = \left(\frac{x}{l}\right)^{4k+n-3} \sum_{j=0}^{k(p+s)+\lambda_n-s-n+1} \frac{d_{k-1,j}^{(n)}}{(4k+j+n-4)(4k+j+n-3)} \left(\frac{x}{l}\right)^j; \quad (15)$$

$$\hat{\beta}_{n,k}(x) = \left(\frac{x}{l}\right)^{4k+n-4} \sum_{j=0}^{k(p+s)+\lambda_n-s-n+1} \frac{d_{k-1,j}^{(n)}}{4k+j+n-4} \left(\frac{x}{l}\right)^j, \quad (16)$$

де $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = s + 2, \lambda_4 = s + 3, \lambda_5 = s + g + 4$.

Коефіцієнти многочленів (13) – (16) обчислюються за формулами:

$$c_{0,0}^{(n)} = 1 \quad (n = 1, 2); \quad c_{0,j}^{(n)} = \frac{A_j}{(j+n-2)(j+n-1)} \quad (n = 3, 4) \quad (j = 0, 1, 2, \dots, s);$$

$$c_{0,j}^{(5)} = \frac{F_j}{(j+3)(j+4)} \quad (j = 0, 1, 2, \dots, s+g);$$

$$c_{k,j}^{(n)} = \frac{e_{k-1,j}^{(n)}}{(4k+j+n-2)(4k+j+n-1)}$$

$$(k = 1, 2, 3, \dots) \quad (j = 0, 1, 2, \dots, k(p+s) + \lambda_n - n + 1)$$

$$e_{k-1,j}^{(n)} = \sum_{m=0}^j \frac{A_{j-m} d_{k-1,m}^{(n)}}{(4k+m+n-4)(4k+m+n-3)};$$

$$d_{k-1,j}^{(n)} = \sum_{r=0}^j B_{j-r} c_{k-1,r}^{(n)},$$

причому $A_{j-m} = 0$, якщо $j-m > s$ та $d_{k-1,m}^{(n)} = 0$, якщо $m > k(p+s) + \lambda_n - s - n + 1$; $B_{j-r} = 0$, якщо $j-r > p$ та $c_{k-1,r}^{(n)} = 0$, якщо $r > (k-1)(p+s) + \lambda_n - n + 1$.

Розглянемо циліндричну оболонку у вигляді резервуара зі змінною товщиною стінок (рис. 1) під дією осесиметричного гідростатичного тиску. Товщина стінок змінюється тут за лінійним законом від значення h_0 , на дні резервуара, до значення h_1 , на верхньому краї. У такому випадку для товщини стінки, на відстані x від дна резервуара одержимо

$$h(x) = h_0 \left(\alpha + (1-\alpha) \frac{x}{l} \right), \quad (17)$$

де $\alpha = \frac{h_1}{h_0}$ – числовий параметр, причому $0 \leq \alpha \leq 1$.

Врешті приходимо до висновку, що $B(x) = \alpha + (1-\alpha) \frac{x}{l}$.

Тиск рідини на внутрішні стінки оболонки виразиться рівністю $Z(x) = -\gamma x$, де γ – вага одиниці об'єму рідини. Тоді знаходимо: $Z_0 = -\gamma l$; $C(x) = \frac{x}{l}$, де Z_0 – тиск на дні резервуара.

Як видно, для даного прикладу функції $B(x)$ й $C(x)$ за умовою вже з самого спочатку є многочлени. Тому формули (11), (12) тут будуть точними, причому в них слід прирівняти:

$$p = 1; \quad B_0 = \alpha; \quad B_1 = 1 - \alpha; \quad g = 1; \quad C_0 = 0; \quad C_1 = 1.$$

Оскільки нижній край резервуара затиснений в абсолютно твердий фундамент, а верхній край вільний, то маємо наступні граничні умови:

$$M(0) = 0; \quad Q(0) = 0; \quad w(l) = 0; \quad \varphi(l) = 0.$$

Отже, два початкові параметри $M(0), Q(0)$ відомі. Для двох, що залишилися $w(0), \varphi(0)$ за допомогою (4), (5) одержуємо систему

$$\begin{cases} X_1(l)w(0) + lX_2(l)\varphi(0) = \gamma \frac{l^5}{D_0} X_3(l); \\ \frac{1}{l} \tilde{X}_1(l)w(0) + \tilde{X}_2(l)\varphi(0) = \gamma \frac{l^4}{D_0} \tilde{X}_5(x). \end{cases}$$

Звідси знаходимо: $w(0) = \gamma \frac{l^5}{D_0} S_1$; $\varphi(0) = \gamma \frac{l^4}{D_0} S_2$, де S_1, S_2 – безрозмірні константи,

$$S_1 = \frac{X_3(l)\tilde{X}_2(l) - \tilde{X}_5(l)X_2(l)}{X_1(l)\tilde{X}_2(l) - \tilde{X}_1(l)X_2(l)}, \quad S_2 = \frac{X_1(l)\tilde{X}_5(l) - \tilde{X}_1(l)X_5(l)}{X_1(l)\tilde{X}_2(l) - \tilde{X}_1(l)X_2(l)}.$$

У результаті, розрахункові формули для параметрів стану можна представити в остаточному вигляді:

$$w(x) = \gamma \frac{l^5}{D_0} (S_1 X_1(x) + S_2 X_2(x)) + w^*(x);$$

$$\varphi(x) = \gamma \frac{l^4}{D_0} (S_1 \tilde{X}_1(x) + S_2 \tilde{X}_2(x)) + \varphi^*(x);$$

$$M(x) = -\gamma l^3 (S_1 \hat{X}_1(x) + S_2 \hat{X}_2(x)) + M^*(x);$$

$$Q(x) = -\gamma l^2 (S_1 \hat{X}_1(x) + S_2 \hat{X}_2(x)) + Q^*(x).$$

де

$$w^*(x) = -\gamma \frac{l^5}{D_0} X_5(x); \quad \varphi^*(x) = -\gamma \frac{l^4}{D_0} \tilde{X}_5(x); \quad M^*(x) = \gamma l^3 \hat{X}_5(x); \quad Q^*(x) = \gamma l^2 \hat{X}_5(x). \quad (18)$$

Рівності (18) виражають прогин, нахил, згинальний момент і поперечну силу, що відповідають частинному розв'язку рівняння (1). Розв'язок $w^*(x)$ являє собою радіальне розширення оболонки з вільними краями під внутрішнім тиском [6].

Розглянемо розрахунки оболонки змінної товщини двома методами – на основі викладеного вище алгоритму й методом скінченних елементів у програмі ANSYS [11], при наступних вихідних даних:

Радіус оболонки $a = 17,1i$; висота $l = 6i$; товщина змінюється за лінійним законом (17), причому, $h_0 = 0,024i$, $h_1 = 0,012i$; матеріал – сталь із пружними характеристиками $E = 2 \cdot 10^8 \text{ еІ } \text{а}$; $\mu = 0,3$. Оболонка повністю заповнена рідиною з питомою вагою $\gamma = 6,867 \text{ еІ } / i^3$.

Результати розрахунків двома методами представлені в табл. 1.

Таблиця 1

x, м	Прогини, м			Напруження, МПа		
	Авторський метод	ANSYS	Похибка, %	Авторський метод	ANSYS	Похибка, %
0,0	0,0032	0,0033	3,03	29,24	29,03	0,72
0,6	0,0038	0,0039	2,56	39,88	40,06	0,45
1,2	0,0043	0,0045	4,44	47,86	48,14	0,58
1,8	0,0046	0,0048	4,17	56,28	56,68	0,71
2,4	0,0047	0,0049	4,08	62,11	62,17	0,08
3,0	0,0049	0,0050	2,00	69,00	68,89	0,16
3,6	0,0051	0,0052	1,92	72,61	72,37	0,33
4,2	0,0053	0,0053	0,00	76,54	76,11	0,56
4,8	0,0045	0,0044	2,22	79,11	78,83	0,35
5,4	0,0030	0,0031	3,22	80,65	80,62	0,04
6,0	0,0000	0,0000	0,00	73,88	73,65	0,31

На рис. 2 представлені графіки залежності прогинів від координати перерізу оболонки змінної товщини, побудовані на основі результатів, отриманих двома методами, а на рис. 3 – графіки залежності напружень від координати перерізу.

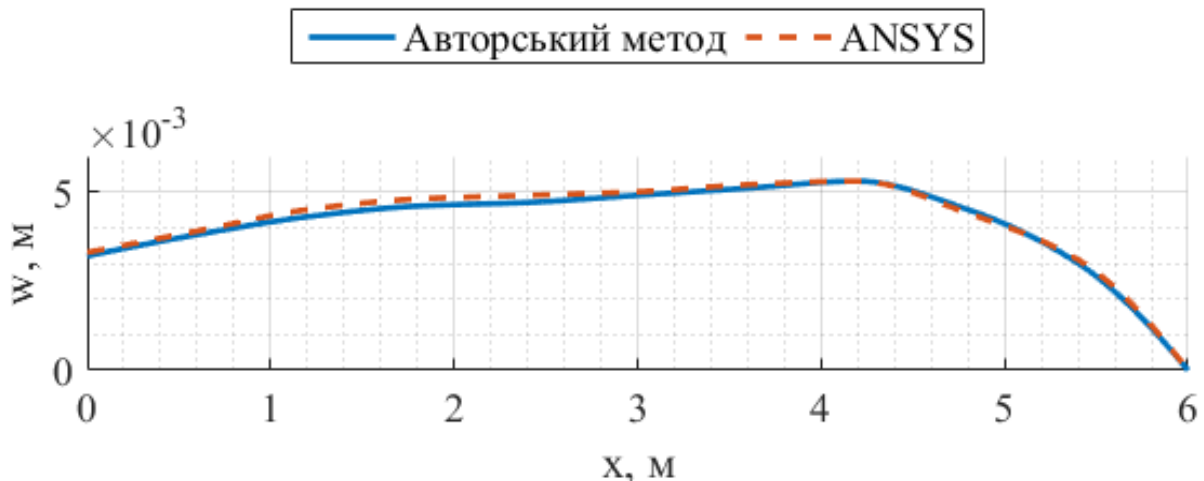


Рис. 2. Графіки зміни прогинів в оболонці змінної товщини

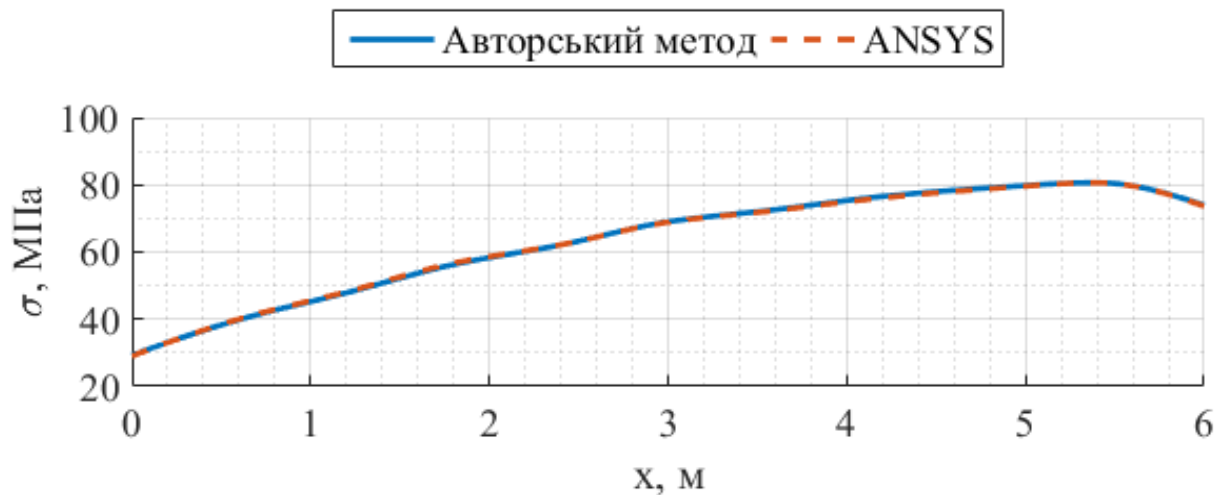


Рис. 3. Графіки зміни напружень в оболонці змінної товщини

Висновки. В ANSYS максимальний прогин $w = 0,0053 \text{ м}$ отриманий у перерізі з координатою $x = 4,2 \text{ м}$, а максимальне напруження $\sigma = 80,62 \text{ МПа}$ – у перерізі з координатою $x = 5,4 \text{ м}$. При розв'язку авторським методом відповідні значення в зазначених перерізах склали $w = 0,0053 \text{ м}$ й $\sigma = 80,65 \text{ МПа}$.

Література

1. Meissner E. Das elastizitäts problem für dünne Schalen von Ringflächen / E. Meissner. – Kugel-oder Kegel form, Physikalische Zeitschr. – 1913. – 14. – P. 41 – 52.
2. Бурмистров Е. Ф. Изгиб цилиндрической ортотропной оболочки переменной толщины / Е. Ф. Бурмистров // Тр. конф. по теор. пластин и оболочек, Казанский гос. ун-т. – Казань, 1961. – С. 46 – 52.
3. Григоренко Я. М. Основи теорії пластин та оболонок з елементами магнітопружності : підручник / Я. М. Григоренко, Л. В. Мольченко. – К. : Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2009. – 403 с.
4. Тюреходжаев А. Н. Исследование осесимметрично нагруженной цилиндрической оболочки [Электронный ресурс] / А. Н. Тюреходов, В. Б. Растигунова. – 2011. – Режим доступа : <http://www.rusnauka.com/6PNI2011/Tecnic/280217.doc.htm>.
5. Кырыкбаев Б. Ж. Изгиб цилиндрической оболочки переменной толщины / Б. Ж. Кырыкбаев // Актуальные проблемы механики и машиностроения : материалы IV Международной научной конференции, Алматы, 2014. – Т. I. – С. 330 – 337.
6. Тимошенко С. П. Пластины и оболочки / С. П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. – М. : Наука. 1966. – 636 с.
7. Крутий Ю. С. Собственные поперечные колебания консольного стержня с переменными, непрерывно распределенными параметрами / Ю. С. Крутий // Будівельні конструкції : міжвідомчий науково-технічний збірник наукових праць (будівництво). – К. : ДП НДІБК, 2012. – Вип. 76. – С. 205–214.
8. Крутий Ю. С. Новый метод исследования поперечных колебаний стержня с переменными, непрерывно распределенными параметрами / Ю. С. Крутий // Строительная механика и расчет сооружений. – 2013. – № 2. – С. 48 – 55.
9. Крутий Ю. С. Роль метода прямого интегрирования в современной механике / Ю. С. Крутий // Сучасні проблеми механіки та математики. – Львів : Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України. – 2013. – Т. 1. – С. 146 – 148.
10. Крутий Ю. С. Точное решение дифференциального уравнения устойчивости равновесия упругого стержня с произвольной непрерывной переменной жесткостью / Ю. С. Крутий, Н. Г. Сурьянинов // Вісник Київського національного університету технологій та дизайну. Сер. Технічні науки. – 2016. – № 1(94). – С. 72–84.
11. Дашенко А.Ф. ANSYS в задачах инженерной механики / А.Ф. Дашенко, Д.В. Лазарева, Н.Г. Сурьянинов / под ред. Н. Г. Сурьянинова. – Изд. 2-е, перераб. и доп. — Одесса : Пальмира, 2011. — 505 с.

Рецензія/Peer review : 21.3.2016 р.

Надрукована/Printed : 19.4.2016 р.

Рецензент : д.т.н., проф. Параска Г.Б.