

FINITE TIME-FREQUENCY (FTF) СИГНАЛЫ. ПРИЗРАК ИЛИ РЕАЛЬНОСТЬ?

Работа посвящена элементарным вопросам моделирования реальных сигналов, которые обладают очевидными свойствами ограниченности как во временной, так и в частотной области. Существующее представление о том, что если сигнал ограничен во временной области, то он обязательно неограничен в частотной области и, наоборот, сигнал с финитным спектром обязательно имеет неограниченную длительность – рассматривается в работе как математический парадокс, не имеющий отношения к реальности. Приводится пример математического аппарата, в рамках которого функции, моделирующие сигналы, обладают свойством финитности во временной и частотной области одновременно.

Ключевые слова: функция, сигнал, спектр, преобразование Фурье, устойчивость теорем анализа.

O.N. ODEGOV

Odessa A.S. Popov National Academy of Telecommunications

FINITE TIME-FREQUENCY (FTF) SIGNALS. GHOST OR REALITY?

Work is devoted the elementary questions of design of the real signals which possess obvious properties of narrow-mindedness both in temporary and in frequency realm. Existent picture that if a signal is limited in temporary realm, he is necessarily unlimited in frequency area and, vice versa, a signal with a finitary spectrum necessarily has unlimited duration – examined in-process as a mathematical paradox, not relating to reality. The proposals, which can be the basis for FTF-signal theory. Also, some paradoxes are considered related to the incorrect use of the mathematical apparatus. An example of mathematical vehicle, within the framework of which functions, designings signals possess property of finite in temporary and frequency realm simultaneously, is made. It is shown that for parts of the technical annexes is a simple structural model as a weighted sum of time-harmonic with a certain initial phase.

Keywords: function, signal, spectrum, transformation of Fourier, stability of theorems of analysis.

Постановка проблемы

В плане философии науки проблема сводится к исследованию взаимосвязи между явлениями материального мира и их математическими моделями в рамках частной задачи – спектрального анализа. Иногда неаккуратное применение математического аппарата вместо того, чтобы сократить объемы непосредственных измерений, приводит к неверным, с практической точки зрения, результатам. А, собственно, что нам, инженерам, надо от формальной математики?

Первое: математика – это лаконичный язык чисел и формул, который позволяет экономить бумагу.

Второе: физико-математические модели в ряде случаев позволяют заменить дорогостоящие экспериментальные исследования либо аналитическим анализом, либо косвенными измерениями. Прекрасный пример – закон Ома для линейного участка цепи: знаем напряжение, знаем сопротивление, а уж силу тока можно определить по элементарной формуле в виде линейной зависимости. При этом, что очень и очень хорошо: реальную электрическую цепь уже не надо разрывать, чтобы включить в нее амперметр.

Корректное применение математического аппарата для решения практических задач требует выполнения, как минимум, двух условий: **адекватности** и **устойчивости**, что нуждается в пояснении.

Математические предложения, которые составляют содержание формальной теории (тезаурус: аксиомы, леммы, теоремы) в самом общем виде формулируются примерно так: «Если выполнено A , то в условиях аксиоматики и ранее доказанного B следует C ». Условно это высказывание в теории формальных языков представляется оператором $B(A) \Rightarrow C$.

Адекватность. Применяя для решения практических задач оператор $B(A) \Rightarrow C$, мы должны быть уверены, что условия A выполнены хотя бы приблизительно, а также, что тезаурус используемой теории B все-таки более-менее согласуется с условиями решаемой задачи. Приведем два элементарных примера.

Первый: A -неадекватность. Тривиально, из школьной алгебры: $a+a+a+a = 4a$. К самой по себе алгебре никаких претензий нет. Жизнь, однако, вносит свои коррективы. Покупаем в магазине 4 пачки подакцизного товара. Каждая пачка вчера еще стоила a грн. Рассчитываем заплатить $4a$ грн. Не получается. Кассир обсчитывает каждую пачку отдельно. Почему? Почему, собственно, нельзя просто умножить a на 4? Оказывается, нельзя, поскольку имеется старая и новая партия этих пачек, из которых старая продается все еще по цене до повышения акцизного сбора, а новая уже после повышения.

Второй: B -неадекватность. Классический пример – неприменимость формул механики Ньютона к движению частиц, скорость которых составляет значимую часть скорости света. Неучет релятивистских поправок приводит в этих случаях к большим ошибкам. Причина: неадекватная аксиоматика.

Вопросы адекватности – это область ответственности инженеров и ученых, которые применяют существующий математический аппарат для решения практических задач. При этом выбор наиболее адекватной модели является, скорее, областью инженерного искусства и, даже, инженерной интуиции, нежели каким-то формальным алгоритмом.

Устойчивость. Поскольку условия A на практике, как правило, не совсем A , а суть приближение к ним с некоторой точностью (ошибки измерений, малые изменения параметров исследуемого объекта во времени и др.), поскольку четко представить, что реальное явление стопроцентно моделируется тезаурусом

формальной теории B , возникает справедливый вопрос: $[B+\Delta B](A+\Delta A) \Rightarrow (\text{приблизительно}) \Rightarrow C$?

Зададим тот же вопрос неформально: малые отклонения условий решения математической задачи или/и малые отклонения относительно тезауруса не приведут ли к некоторым катастрофическим отклонениям выводов от ожидаемых? Когда-то не приведут, а когда-то и приведут.

Приведем простой пример. Имеется система обыкновенных линейных уравнений, которую запишем в матричной форме $AX=Y$, где A – матрица коэффициентов, X – вектор неизвестных, Y – правая часть (условия решаемой задачи). Тривиально, имеем решение: $X = A^{-1}Y^T$. Казалось бы, задача решена, но если определитель матрицы A близок к 0 , то при ограниченности разрядной сетки ЭВМ, на которой численными методами решается задача, можем получить практически любой результат, вплоть до сообщения «*dividing error by a zero*». Решение этой проблемы привело к построению теории обусловленности матриц [1]. В более общей постановке речь идет об устойчивости теорем в геометрии и анализе [2].

Решение этой, собственно теоретической задачи – область исследований специалистов «чистой» математики. Инженеры, использующие математический аппарат, хотели бы увериться в том, что он в обозначенном смысле устойчив, что далеко не всегда очевидно. Собственно, рассуждая о применимости математических образов к физическим прообразам, мы и подошли к прикладной проблематике.

Приложение формальной теории рядов и преобразований Фурье *без достаточной*, на мой взгляд, аргументации привело к цитированию из учебника в учебник, из статьи в статью такой, приблизительно, фразы

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1: «Теоретически любой сигнал с конечной полосой неограничен во времени и, наоборот, сигнал конечной длительности обладает спектром, неограниченно протяженным по оси частот» [3]. При этом, заметим, в цитируемой работе осуществляется, как раз, попытка рассмотрения финитной модели.

В еще более романтической трактовке аналогичный постулат изложен, по сути, и совсем уж многообещающе

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2: «Однако спектры реальных информационных сигналов бесконечны» [3].

После слова «Однако» я бы поставил запятую, но дело не в этом.

Дело в понимании действительности, которое дано впитанными теориями, сложившейся в понимании автора физической картины мира, да и его же, автора, житейским опытом. В силу этого, был бы очень благодарен, если бы кто-то когда-то кому-нибудь и где-то продемонстрировал какое угодно средство измерений, способное в системе единиц измерения СИ (или СГС) продемонстрировать бесконечный результат. Автор о таких экспериментах не знает.

Что касается **ПРЕДЛОЖЕНИЯ 1**, то на некоторое время отнесем это к особенностям используемого формального математического аппарата, а случай **ПРЕДЛОЖЕНИЯ 2** отнесем, все-таки, к курьезам.

Чтобы резко отличать математические модели и материальные сущности, мы будем ниже говорить о *функциях* (понимая, что это – абстрактные математические образы), о *сигналах*, понимая, что это объекты физического мира и о «*сигналах*» - функциях (моделях), которые в рамках конкретной практической задачи не противоречат предположениям о свойствах исследуемых сигналов.

С учетом сложившегося мировоззрения автора, определим *сигнал* следующими **утверждениями** (которые следует рассматривать не как строгую аксиоматику некоторой теории, а как математическую запись ряда парадигм).

Утверждение 1. *Сигнал* – это материальный носитель информации. Безотносительно к способу формирования сигнала, следовательно, безотносительно к среде, в которой он распространяется, безотносительно к приемнику сигнала, который способен его детектировать и распознать, само понятие сигнала *бессмысленно*. В силу такого понимания процитированное **ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2** надо рассматривать как тавтологическую тавтологию в кубе. Будем стоять на том, что сигнал, если это сигнал, то он материален, то есть – реален. А если уж он – суть - сигнал, то он несет информацию. Иначе, зачем он вообще нужен?

Утверждение 2. Поскольку сигнал материален, то он имеет *конечную энергию*. Если сигнал моделируется некоторой математической зависимостью $s(t)$, где t – неуловимый абстрактный параметр (так называемая, независимая переменная – «время»), то это положение можно условно записать в виде формулы: $\int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)dt < \infty$. Математически это означает, что соответствующая функция имеет ограниченную норму.

Утверждение 3. Сигнал *конечен во времени*. Выражаясь близким к чистой математике языком, полагаем финитность соответствующей моделирующей функции: $s(t) = 0, t \notin [t_{\min}, t_{\max}]$. Внутри интервала $[t_{\min}, t_{\max}]$ функция $s(t)$ может принимать как ненулевые, так и нулевые значения. Сам интервал $[t_{\min}, t_{\max}]$, как это и принято в анализе, будем называть носителем функции $s(t)$. Здесь мы будем говорить только о непрерывных (интервальных) носителях. Тогда под *минимальным* носителем будем понимать такой интервал, который удовлетворяет приведенному выше определению и, кроме того, $s(t_{\min}) \neq 0$ и $s(t_{\max}) \neq 0$.

К сожалению, существующие представления о безусловной адекватности математического аппарата (**ПРЕДЛОЖЕНИЯ 1** и **2**), вынуждают даже серьезных авторов как-то обосновывать данное положение [4, с.41]. Обоснование финитности сигнала, как представляется, проще всего отыскать в биллинге любого оператора: сколько бы ни длился телефонный разговор, все равно будет зафиксирован момент его начала и момент его окончания. Что из этого следует хорошего?

Оператор не вправе требовать бесконечной оплаты за свои услуги. Ни с кого и никогда.

Утверждение 4. Сигнал *конечен в частотной области*. Аналогично предыдущему, определяем носитель спектра $[\Omega_{\min}, \Omega_{\max}]$: $S(\omega) = 0, \omega \notin [\Omega_{\min}, \Omega_{\max}]$. Данное утверждение нуждается в дополнительной конкретизации понятия «спектр», о чем речь идет ниже. Практически важно, что спектры сигналов ограничены некоторой полосой частот, если речь идет о разложениях по гармоническим функциям. Обоснование здесь еще более жесткое, нежели данное выше. Внеполосные излучения на основании «Закона Украины об РЧР» могут быть основанием для отзыва разрешений на эксплуатацию РЭС, а в еще худшем случае – прекращению действия лицензии на использование частот.

Утверждение 5. Сигнал обладает *инерционностью*. Физически это означает, что не существует реальных систем, способных мгновенно переходить из одного состояния в другое, если эти состояния различны. Один из вариантов математической записи этого предложения для непрерывных «сигналов» может выглядеть как ограничение существования ненулевых производных функции $s(t)$, начиная с некоторого (возможно, значительного) порядка N . То есть, по крайней мере, на носителе $[t_{\min}, t_{\max}]$ выполнено условие: $d^n s(t)/dt^n = 0, n > N, N < \infty$. Также, из физических соображений полагаем ограниченность производных низших порядков $d^n s(t)/dt^n < \infty, n \leq N$.

Таким образом, комплекс рассматриваемых в данной работе вопросов сводится к поиску математического аппарата, который удовлетворяет **Утверждениям 1-5**. Функции, наиболее полно удовлетворяющие данным утверждениям, для подчеркивания их необходимых свойств называются FTF (finite time-frequency) – сигналы. Англоязычный термин вводится здесь лишь для экономии бумаги. Отнюдь не ради засорения терминологического аппарата еще одной единицей.

Зачем вообще надо заниматься решением задачи в такой постановке? Во-первых, имеется потребность отобразить собственные представления о физическом мире в виде убедительных математических форм. Во-вторых, и это, пожалуй, главное: определить множество физически реализуемых «сигналов». В чисто теоретическом анализе можно получить блестящие результаты оптимизации сигналов, которые, однако, будут практически неприменимы вообще или применимы лишь с определенными оговорками.

Приведем элементарный, но наглядный пример. Пусть сигналы детектируются простейшим пороговым детектором, который а) интегрирует квадрат или модуль сигнала («энергию») за время $[t, t+\Delta t]$ и б) принимает решение о наличии значения 1, если интеграл превышает некоторый заданный порог. В противном случае принимается решение о значении 0. Для предельного упрощения будем даже полагать, что сигнал однополярный, т.е. $s(t) \geq 0$.

Исходя из **Утверждения 2** и определения интеграла Римана, элементарно следует, что при заданной максимальной амплитуде сигнала A его оптимальный идеальный образ – это просто прямоугольный импульс длительностью Δt и амплитудой A . Все прочие сигналы будут иметь меньшую энергию, соответственно, детектироваться с меньшей вероятностью.

Проблема заключается, однако в том, что такой идеальный сигнал физически реализовать не получается: об этом может сказать любой радиолюбитель, хоть однажды спаявший элементарный мультивибратор. Фронты импульсов при рассмотрении осциллограммы выглядят отнюдь не мгновенными скачками.

Современное состояние вопроса

Состояние вопроса трудно назвать современным. Со времени создания теории рядов Фурье и преобразований Фурье и Гильберта наиболее значительным результатом в области приложений можно считать теорему Котельникова [5], которая дает мощный инструмент анализа сигналов с ограниченным частотным носителем. Исследования в части расширения применимости данного результата проводились и в ближайшей ретроспективе. Так, имеются результаты обобщения этой теоремы на задачу совместной дискретизации в частотной и во временной области [6]. В других обобщениях в качестве атомарных функций отсчетов применяются δ -функции, сглаженные различными «фильтрами» [7].

Наиболее эффективным современным подходом к решению задач представления «сигналов» в виде разложений по системе ортогональных функций представляется секвентный анализ [8]. Используемые в его тезаурусе целочисленные функции Радемахера и Уолша и ступенчатые функции Хаара можно рассматривать как наиболее удачные модели сигналов, которые генерируются и обрабатываются цифровыми устройствами. Наиболее современным результатом в этом направлении, известном автору, является теоретическое обоснование и применение функций трансверсии [4].

Еще одно направление – использование финитных образов в приложениях вейвлет-преобразований [9]. Последние особенно эффективны для исследования кратковременных процессов типа «всплесков». При этом могут решаться задачи, как обнаружения сигналов, так и распознавания их тонкой структуры.

Проблема в классической постановке

Прежде, чем приступить к изложению конструктивных предложений, попытаемся сформулировать исследуемый вопрос в виде математического предложения (теоремы), доказательство которого автору **неизвестно**.

Рассмотрим функцию, ограниченную во времени и имеющую «длительность» T : $s(t)=0, t \notin [-T/2, T/2]$. За очевидностью, положим без доказательства, что любую такую функцию можно представить в виде произведения $s(t)=r(t)q(t)$, где $q(t)$ – некоторая функция, имеющая *любую* область определения,

а $r(t)$ – прямоугольный импульс, имеющий значения $1/T$ внутри интервала $[-T/2, T/2]$ и нулевые значения вне этого интервала. В известных обозначениях: $r(t)=rect[-T/2, T/2]$. Спектральные функции (образы Фурье) преобразов $s(t)$ и $q(t)$, будут, соответственно:

$$R(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} r(t)e^{-j\omega t} dt = \sin\left(\frac{\omega T}{2}\right) / \left(\frac{\omega T}{2}\right); \quad Q(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} q(t)e^{-j\omega t} dt. \quad (1)$$

Тогда, по теореме о свертке, из (1) следует, что спектральная функция $S(\omega)$ произведения $s(t)$:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\omega} Q(\omega - \omega') \sin\left(\frac{\omega' T}{2}\right) / \left(\frac{\omega' T}{2}\right) d\omega'. \quad (2)$$

Теорема несуществования. Не существует такой *нетривиальной* функции $q(t)$, которая имеет спектральный образ Фурье $Q(\omega)$ такой, что из выражения для свертки (2) следует: $S(\omega) = 0, \omega \notin [-\Omega, \Omega]$. Тривиальный контр-пример: функция $q(t)$, всюду равная нулю. Не интересно. По физической сути – нет сигнала, нет и спектра.

Повторим, автор **не знает** доказательства этой или подобной теоремы, которая математически обосновала бы **ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1**. Буду благодарен, если Читатель даст ссылку на подобный результат. Еще лучше, если **Теорема несуществования** в общем случае неверна. Тогда, в рамках классического аппарата преобразования Фурье можно было бы выделить класс функций, которые могут быть моделями физически реализуемых процессов.

Вместе с тем, и в классическом варианте давно найден прием, приближающий теорию к практике. Это – так называемый «эффе́ктивный базис сигнала» - некоторое множество значений «сигналов» в частотно-временной области, где сосредоточена значительная часть «энергии». Нас же интересуют «сигналы», 100% энергии которых сосредоточены в ограниченной частотно-временной области: FTF-сигналы.

Термины. Определения. Договоренности

Предполагается, что Читатель знаком с основами функционального анализа. Поэтому данные ниже дефиниции – это только выбор варианта определений нормы, скалярного произведения, метрики и др.

Ниже *скалярное произведение* функций $q_1(x)$ и $q_2(x)$ понимается в единственном варианте:

$$\langle q_1, q_2, X \rangle = \int_X q_1, q_2 dx, \quad (3)$$

где X – область определения функций $q_1(x)$ и $q_2(x)$.

Функции $q_1(x)$ и $q_2(x)$ *ортгонали́ны* на интервале $[x_1, x_2]$, если $\langle q_1, q_2, [x_1, x_2] \rangle = 0$.

Под *нормой* функции $q(x)$, определенной на интервале $[x_1, x_2]$, будем понимать число $\|q\| = \langle q, q, [x_1, x_2] \rangle$.

Функции $q_1(x), q_2(x), \dots, q_N(x)$ образуют на интервале *ортгонали́ный базис*, если все их взаимные скалярные произведения равны нулю. Базис является *ортонормальным*, а сама система функций *ортонормированной*, если нормы всех функций одинаковы. Далее принимается, что базисные функции ортонормированных систем имеют единичную норму:

$$\langle q_n, q_n, [x_1, x_2] \rangle = 1, n=1, 2, \dots, N.$$

Функции $q_1(x), q_2(x), \dots, q_N(x)$ образуют *почти ортгонали́ную* систему, если в условиях решаемой задачи найдется такое пренебрежимо малое число $\varepsilon > 0$, что

$$\langle q_n, q_m, [x_1, x_2] \rangle < \varepsilon, \quad n, m=1, 2, \dots, N, \quad n \neq m. \quad (4)$$

Обратим внимание, что в очень большом множестве приложений используются, на самом деле, не строго ортгонали́ные, а *почти ортгонали́ные* функции. Достаточно сказать, что значения функций в задачах, решаемых численными методами, вычисляются как частичные суммы соответствующих рядов. Точность представления не абсолютна и определяется методом интерполяции и разрядной сеткой ЭВМ.

Метрика (расстояние между функциями) определяется ниже по тексту. Один из вариантов метрики дается формулой (4).

Если некоторая функция $g(x)$ может быть представлена в виде взвешенной суммы ортонормальных функций $\langle q_n, q_m, X \rangle$:

$$g(x) = G_1 q_1(x) + G_2 q_2(x) + \dots + G_N q_N(x), \quad (5)$$

то набор коэффициентов G_1, G_2, \dots, G_N является *спектром* функции $g(x)$ в смысле системы $\langle q_n, q_m, X \rangle$.

Важно, что не обязательно $\langle q_n, q_m, X \rangle$ является системой гармонических функций. Можно говорить о

спектрах в смысле функций Уолша, ортогональных полиномов Чебышева и др. Известным фактом является *единственность* разложения (5), если такое разложение существует, и знак равенства понимается в строгом смысле.

В случае, если в данном представлении $N \rightarrow \infty$, то само разложение будем называть рядом Фурье, а коэффициенты G_1, G_2, \dots, G_N – бесконечным дискретным спектром. Соответственно, при конечном N будем говорить о сумме Фурье и *конечном* дискретном спектре.

Если представление (5) допускает предельный переход от счетного множества базисных функций к непрерывному (континуальному) множеству, будем говорить, соответственно, об интегральном преобразовании и непрерывном спектре.

Заметим, что исторически именно представление (5) для любой ортогональной системы получило название ряда (суммы) Фурье. Однако, понятие спектра в плане приложений, настолько прочно закрепилось за спектром в смысле гармонических функций, что в настоящее время авторам зачастую приходится вводить отдельный термин «обобщенный ряд Фурье» для общих представлений вида (5).

Элементарная модель FTF-сигналов

Рассмотрим классический вариант спектрального анализа, основанный на разложениях «сигналов» по системе гармонических функций $\{1, \sin(n\omega t), \cos(n\omega t)\}$, $n=1,2,\dots$. Данные функции ортогональны на любом интервале $[t_0, t_0+kT]$, $k=1,2,\dots$, если параметр $\omega = 2\pi/T$. Соответственно, функции

$$\frac{1}{\sqrt{kT}}, \sqrt{\frac{2}{kT}} \sin(n\omega t), \sqrt{\frac{2}{kT}} \cos(n\omega t), n=1,2,\dots \quad (6)$$

образуют ортонормированную систему.

В приложениях как-то особенно не акцентируется, что на самом деле речь идет об *абстрактном* интервале определения гармонических функций: $t \in [-\infty, \infty]$. Это видно хотя бы из формальной записи пары преобразований Фурье, где интегрирование выполняется по бесконечным пределам:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j\omega t} dt, \quad s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)e^{j\omega t} d\omega. \quad (7)$$

Представляется, что уже в определении бесконечного носителя кроются некоторые методологические трудности.

Первая из них – *бесконечная норма* гармоник, имеющих бесконечную продолжительность. С физической точки зрения это означает, что сигнал с конечной энергией представляется взвешенной суммой составляющих, каждая из которых имеет бесконечную энергию. Нормировка (6) лишь на первый взгляд устраняет эту трудность: в пределе мы все равно получаем неопределенность типа ∞/∞ . Аналитически эта неопределенность устранима, а с физической точки зрения оказывается, что каждая такая гармоника – ненаблюдаемый процесс.

Вторая – *начальная фаза* бесконечной гармоники *не определена*. Поэтому данная модель позволяет говорить лишь о некоторой *мгновенной* фазе. При этом мгновенная фаза составляющих реального сигнала не может быть определена иначе, как сравнением с некоторым периодическим или квазипериодическим процессом с известными фазовыми характеристиками. А такой процесс, очевидно, финитен во времени. Налицо парадокс: нечто бесконечное поверяется чем-то конечным. Что-то вроде того, как с помощью метровой линейки измерять размер бесконечно расширяющейся Вселенной.

Наличие таких и аналогичных методологических трудностей приводит к необходимости переосмысления самого базового понятия *частоты*. Один из возможных подходов в этой части изложен в теории «Фазочастотних вимірювань і перетворень радіосигналів» [4].

В данной работе в качестве базовой рассматривается модель, основанная на использовании гармонических функций с *ограниченным* носителем (финитных гармоник). Применительно к системе (6) это означает конечность k количества T -периодов.

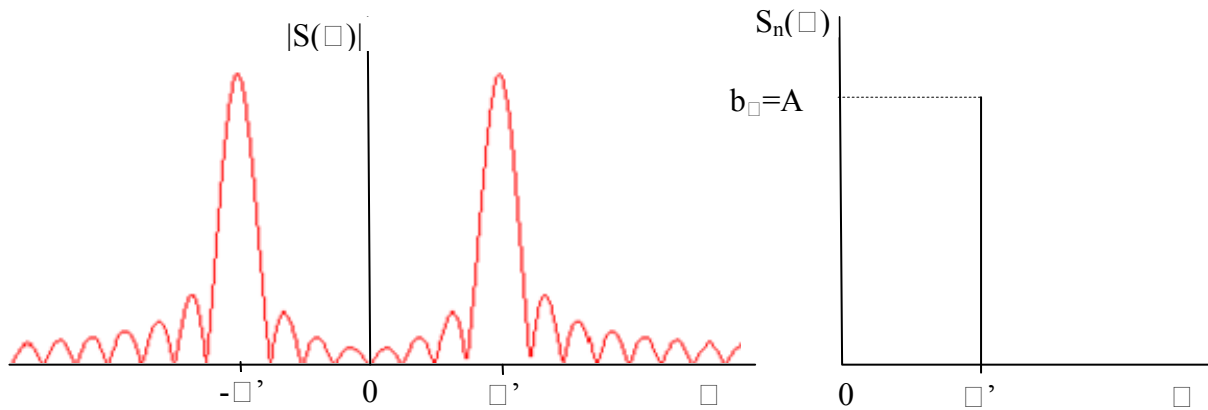
Несмотря на кажущуюся простоту такого представления, покажем, что пространство неограниченных во времени гармоник и пространство финитных гармоник – это *принципиально разные* системы функций. Для этого рассмотрим «сигнал» вида $s(t) = A \cos \omega' t$, $\omega' = 2\pi/T$ на интервале $[-T/2, T/2]$. Для финитной модели (5) полагаем, что все множество моментов времени ограничено данным интервалом, а для модели «неограниченного времени» (6) доопределим функцию $s(t) = 0$ вне интервала $[-T/2, T/2]$. На первый взгляд, никакой разницы между моделями нет. Рассмотрим, однако, спектральные представления для двух этих моделей.

Спектр финитной модели – это просто единственное число: $b_{\omega} = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} A \cos^2 \omega t dt = A$. Во втором случае получаем Фурье-образ прямоугольного *радиоимпульса* с П-образной огибающей и несущей частотой ω' . Иначе говоря, «сигнал» в данном случае представляется произведением функций со спектром (2), где $Q(\omega - \omega') = \delta(\omega - \omega')$. Пользуясь фильтрующим свойством δ -функции Дирака, получаем:

$$S(\omega) = 0,5 \sin c((\omega - \omega')T / 2) + 0,5 \sin c((\omega + \omega')T / 2).$$

то есть, непрерывный спектр в виде суммы двух функций типа $\sin(x)/x$, смещенных относительно начала координат на частоту несущей ω' .

Спектры для случаев неограниченных и финитных гармонических моделей показаны на рис.1 а и б. Как говорится, почувствуйте разницу. Финитная спектральная модель выглядит намного более лаконичной. Часть полученного эффекта объясняется той хитростью, что период гармоник финитной модели совпал с длиной носителя. Эффект, однако, очевидный: моночастотный «сигнал» в данном случае – пример FTF-сигнала, одновременно имеющий конечную длительность и ограниченный в частотной области спектр. Ниже показывается, что и в более общих случаях существуют модели в виде FTF-сигналов.



а) модуль спектра прямоугольного радиоимпульса б) дискретный спектр финитной гармоник
 Рис. 1. Альтернативные спектральные представления неограниченных и финитных моделей

Более общая модель FTF-сигналов – линейные многообразия, натянутые на ортонормированный базис (5), при ограниченном носителе $[0, T]$

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^N a_n \cos n\omega t + \sum_{n=1}^N b_n \sin n\omega t, \quad \omega = 2\pi / T. \tag{8}$$

Заметим, что поскольку гармонические функции могут быть разложены в сходящийся степенной ряд, то такие удобные формулы, как, например, формула Эйлера остаются справедливыми и для финитных гармоник.

Как видно, «полоса» частот функций (8) определяется нижней частотой ω и верхней частотой $N\omega$. Является ли такая модель излишне простой и не имеющей никакого отношения к практическим задачам? Простой – да, заведомо не соответствующей никаким реальным процессам – нет. Например, электромагнитное поле, создаваемое когерентным источником излучения (лазером) в некоторой точке пространства исключительно точно описывается зависимостью [10, с.41]:

$$E(t) = \sum_{m=-N}^N E_m e^{-j[(\omega_0 + m\Delta\omega)t + \phi_m]}. \tag{9}$$

В случае модели (9) носитель дискретного спектра ограничен полосой частот $[\omega_0 - N\Delta\omega, \omega_0 + N\Delta\omega]$, носитель сигнала во временной области должен быть кратен минимальному периоду $T = 2\pi / \Delta\omega$.

Наличие в зависимости (9) начальных фаз ϕ_m не влияет на свойство ортогональности базисных функций, что утверждает

Теорема 1. (Об инвариантности свойства ортогональности к начальной фазе)

Система тригонометрических функций $\{\sin(n\omega t + \phi_n^{\sin}), \cos(n\omega t + \phi_n^{\cos})\}$, где фазы ограничены $0 \leq \phi_n^{\sin}, \phi_n^{\cos} < \pi / 2$ ортогональна на любом носителе, длина которого кратна $T = 2\pi / \omega$.

Для доказательства воспользуемся формулами Эйлера

$$e^{jx} = \cos(x) + j \sin(x), \quad e^{-jx} = \cos(x) - j \sin(x) \tag{10}$$

и выражениями для гармонических функций, следующими из них:

$$\cos(x) = \frac{1}{2}(e^{jx} + e^{-jx}), \quad \sin(x) = \frac{1}{2j}(e^{jx} - e^{-jx}). \tag{11}$$

Рассмотрим скалярное произведение $Q = \langle \cos(n\omega t + \phi_n), \cos(k\omega t + \phi_k) \rangle, n \neq k$. По определению скалярного произведения (3) и с учетом формул (11)

$$Q = \frac{1}{4} \int_0^T \left[e^{j(n\omega t + \phi_n)} + e^{-j(n\omega t + \phi_n)} \right] \left[e^{j(k\omega t + \phi_k)} + e^{-j(k\omega t + \phi_k)} \right] dt. \quad (12)$$

Выполняя умножение под знаком интеграла, видим, что скалярное произведение (12) можно представить суммой четырех интегралов общего вида

$$Q_{sign} = \frac{1}{4} \int_0^T e^{\pm j[(k\omega t + \phi_k) \pm (n\omega t + \phi_n)]} dt. \quad (13)$$

Пренебрегая множителем, который не влияет на равенство нулю скалярного произведения, рассмотрим только один из этих интегралов:

$$Q_{++} = \int_0^T e^{j[(k\omega t + \phi_k) + (n\omega t + \phi_n)]} dt = e^{j(\phi_k + \phi_n)} \int_0^T e^{j(k+n)\omega t} dt = e^{j(\phi_k + \phi_n)} I(T). \quad (14)$$

Интеграл $I(T)$ в последнем выражении представим в виде суммы двух интегралов, применяя к подынтегральному выражению формулу Эйлера:

$$I(T) = \int_0^T \cos(k+n)\omega t dt + j \int_0^T \sin(k+n)\omega t dt, \quad (15)$$

откуда следует, что и $Q_{++} = 0$. Аналогичным образом доказывается, что все интегралы общего вида (13) равны 0.

Используя тот же прием, что и при выводе формулы (15), убеждаемся, что скалярные произведения

$$\langle \sin(n\omega t + \phi_n), \cos(k\omega t + \phi_k) \rangle = 0, n \neq k \text{ и } \langle \sin(n\omega t + \phi_n), \sin(k\omega t + \phi_k) \rangle = 0, n \neq k.$$

Теорема доказана.

Результат, конечно, простой. Спрашивается, зачем старались? Оказывается, на базе финитных гармоник можно построить неограниченное количество ортонормированных систем с различными начальными фазами для разных составляющих. При этом само понятие начальной фазы оказывается вполне определенным и конструктивным.

Рассмотрим множество «сигналов», которое может быть представлено линейным многообразием:

$$s(t) = \sum_{k=1}^K \left[a_k \sin\left(\frac{p_k}{q_k} \gamma t\right) + b_k \cos\left(\frac{p_k}{q_k} \gamma t\right) \right], \quad (16)$$

где γ - некоторый скалярный параметр, p_k/q_k - несократимые рациональные дроби (т.е. p_k и q_k - целые числа), причем $p_k < q_k$, если $k > 1$. Допускается, что $p_k = q_k$ если $k = 1$. Условие неравенства аргументов гармоник гарантирует линейную независимость соответствующих функций.

Покажем, что при соответствующем выборе параметра γ и носителя $[0, T]$ система опорных функций в разложении (16) является также и ортогональной.

Теорема 2. (О существовании носителя).

Найдутся два таких целых числа P и Q , что при выборе параметра γ в зависимости (16) в виде $\gamma = \omega Q/P$, что опорные функции в (16) будут ортогональны на носителе $[0, T]$, где $T = 2\pi/\omega$.

Доказательство Теоремы 2 элементарно. Положим $P = 1$, а в качестве Q возьмем произведение знаменателей: $Q = q_1 q_2 \dots q_K$. Очевидно, что $Q_k = Q/q_k$ - целые числа. Произведения целых чисел $p_k Q_k = n_k$ - также целые числа, что и доказывает Теорему 2.

Фактически, выбор значения $\gamma = \omega Q/P$ означает масштабирование. При этом система функций опорных функций оказывается частным случаем «обычной» ортогональной системы тригонометрических функций, если выполнено условие $n_k = k$. С другой стороны, данная Теорема не противоречит тому, что функции (16) будут периодически повторяться на носителе $[0, T]$. Справедливо следующее предложение.

Теорема 3. В условиях Теоремы 2 наименьший период ортогональности определяется такими числами Q и P для ряда коэффициентов при аргументах $p_k Q / (q_k P) = n_k$, что наибольший общий делитель чисел n_1, n_2, \dots, n_K равен 1.

Доказательство Теоремы 3 опустим за очевидностью. Отметим лишь, что необходимым условием ее выполнения является определение числа Q как *наименьшего* общего кратного знаменателей q_k и определение числа P как *наибольшего* общего делителя числителей p_k .

При всей простоте и очевидности, Теоремы 1 - 3 дают конструктивный алгоритм построения системы ортогональных финитных функций для «сигналов» состоящих из гармоник, частоты которых находятся в рациональных отношениях, а начальные фазы произвольны.

Итак, получено несколько представлений моделей FTF-сигналов, отвечающих сформулированным Утверждениям 2-4. Исчерпывается ли этим множество физически реализуемых «сигналов»? Конечно, нет. Модель - она и есть модель. А с другой стороны, почему бы и нет? Ведь реальные осцилляторы имеют

выраженные частоты колебаний. Это относится к спектрам излучения и поглощения атомов, а также к динамическим системам, описываемым линейными дифференциальными уравнениями. Решение уравнения второго порядка в условиях «малых колебаний», как известно, сводится к волновому уравнению, то есть, к гармонической функции. Еще один пример – почти периодическое изменение наблюдаемой мощности излучения пульсаров.

С абсолютной точностью модель в виде суммы финитных гармоник (16), конечно, не соответствует реальным процессам. Поэтому важно составить представление о потенциальных ошибках моделирования. Рассмотрим вариант несоответствия, когда в сумме (16) имеются гармоники с коэффициентом при аргументе, который не равен ни одной из рациональных дробей, например выражающийся иррациональным числом $\mu < 1$. Положим, что дробные коэффициенты в аргументах упорядочены так, что $p_k/q_k < p_{k+1}/q_{k+1}$, $k=1 \dots K-1$.

В соответствии с одним из фундаментальных предложений теории чисел [11, с. 112]: «Между двумя рациональными числами, разность которых может быть сделана сколь угодно малою (по абсолютной величине) может заключаться только одно число». Это означает, что существуют такие рациональные дроби, что $p_k/q_k < \mu < p_{k+1}/q_{k+1}$ и $|p_k/q_k - p_{k+1}/q_{k+1}| < \varepsilon$, где ε – любое малое число.

С учетом непрерывности гармонических функций, это означает, что при достаточно большом периоде $[0, T]$ можно найти достаточно точное приближение внеспектральной гармоники одной из базисных функций. Важно получить оценку порядка получающейся при этом ошибки. Приведем пример такой оценки для косинусоидальных составляющих (для синусоидальных составляющих получается аналогичный результат).

Пусть даны две функции, отличающиеся только некоторой k -й гармоникой:

$$\begin{aligned} s_1(t) &= b_1 \cos \omega t + b_2 \cos 2\omega t + \dots + b_k \cos k\omega t + \dots + b_K \cos K\omega t, \\ s_2(t) &= b_1 \cos \omega t + b_2 \cos 2\omega t + \dots + b_k \cos(k + \mu)\omega t + \dots + b_K \cos K\omega t, \end{aligned} \tag{17}$$

причем параметр девиации μ будем считать малой положительной величиной.

В качестве параметра, характеризующего ошибку модели $s_1(t)$ по отношению к модели $s_2(t)$, выбираем энергетический параметр. С учетом того, что суммы (17) отличаются только одним слагаемым, получим вариант метрики:

$$\|s_2(t) - s_1(t)\| = \int_0^T (s_2(t) - s_1(t))^2 dt = b_k^2 \int_0^T (\cos(k + \mu)\omega t - \cos k\omega t)^2 dt. \tag{18}$$

В подынтегральном выражении разложим первое слагаемое в ряд Тейлора в окрестности точки $k\omega t$:

$$\cos(k + \mu)\omega t = \cos k\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(k + \mu)\omega t - k\omega t]^n}{n!} \cos^{(n)}(x) \Big|_{x=k\omega t},$$

где $\cos^{(n)}$ – производная функции порядка n . Заметим, что все производные функции $\cos(x)$ суть синусы или косинусы со знаком «±», максимальное значение которых по модулю равно 1. Тогда из формулы для метрики (18) с учетом того, что $\omega T = 2\pi$, после элементарных преобразований следует:

$$\|s_2(t) - s_1(t)\| < b_k^2 \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\mu\omega t)^n}{n!} dt < b_k^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\mu\omega T)^n}{n!} \int_0^T dt = Tb^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2\pi\mu)^n}{n!}. \tag{19}$$

В цепочке неравенств (19) использован знак строго неравенства, поскольку ряд производных $\cos^{(n)}$ знакопеременный, и слагаемые под знаком суммы в формуле (18) частично компенсируются.

При малых значениях параметра девиации μ значение $2\pi\mu \ll 1$. Тогда сумма в выражении (19)

оказывается суммой табличного ряда [12, с. 705, сумма 21.5]: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x)^{n+1}}{n!(n+1)} = e^x - 1$.

С учетом последнего соотношения, получаем энергетическую интерпретацию для абсолютной погрешности модели по отношению к «сигналу», определенных парой зависимостей (17):

$$\Delta E_{abc} = \|s_2(t) - s_1(t)\| < Tb_k^2 (e^{2\pi\mu} - 1), \tag{20}$$

откуда с учетом того, что $\|s_2(t) - s_1(t)\| = \sum_{k=1}^K b_k^2$, следует оценка относительной ошибки:

$$\Delta E_{omn} = \|s_2(t) - s_1(t)\| / \|s_1(t)\| < Tb_k^2 (e^{2\pi\mu} - 1) / \sum_{k=1}^K b_k^2. \tag{21}$$

С учетом малости μ и разложения экспоненциальной функции $e^x = 1 + x/1! + \dots + x^n/n! + \dots$, на основании оценок (20) и (21) можно получить более «элегантные» неравенства:

$$\Delta E_{abc} < 2\pi\mu T b_k^2 + O(\mu^2); \quad \Delta E_{omn} < 2\pi\mu T b_k^2 / \sum_{k=1}^K b_k^2 + O(\mu^2). \tag{22}$$

Замечательно в полученных оценках (19-20) то, что ошибка в определении энергетических параметров сигнала зависит от девиации μ , периода системы опорных функций T , значения коэффициента b_k при неточно моделируемой гармонике, но **никак не зависит собственно от частоты** этой гармоники. То есть, ошибка в 1 Гц будет равным образом сказываться на адекватности модели (в смысле учета энергетических, а отсюда – и информационных) параметров сигнала, как если ее допустить по отношению к

частотной составляющей 100 МГц, так и по отношению к частотной составляющей 100 ТГц. Этот результат, если честно, для автора несколько обескураживающий.

Другой, следующий из этих оценок вывод – ошибаться лучше в области тех гармоник, амплитуды которых незначительны. Что же касается огромного множества сигналов, то мода их спектра находится вблизи несущей частоты. Таким образом, особую важность приобретают методы подстройки к несущей частоте сигнала на приемной стороне.

Рассмотрим более общую модель ошибки, чем данную формулами (17). Положим, что все частоты модели имеют некоторую паразитную девиацию по отношению к частотам «сигнала», приняв все-таки модель $s_1(t)$ за нечто условное, а «сигнал» $s_2(t)$ за нечто, похожее на реальность:

$$s_2(t) = b_1 \cos(1 + \mu_1)\omega t + b_2 \cos(2 + \mu_2)\omega t + \dots + b_k \cos(k + \mu_k)\omega t + \dots + b_K \cos(K + \mu_K)\omega t. \quad (23)$$

Среди коэффициентов разложения b_k и параметров девиации μ всегда найдется такая пара, что произведение: $B_{\max} = \mu_k b_k^2 \geq \mu_n b_n^2$, $k, n = 1, 2, \dots, K$. Тогда, пренебрегая малыми порядка $O(\mu^2)$, получим ошибку моделирования для зависимостей общего вида (23):

$$\Delta E_{\text{абс}} < 2\pi T B_{\max} K; \quad \Delta E_{\text{отн}} < 2\pi T B_{\max} K / \sum_{k=1}^K b_k^2. \quad (24)$$

Полученные оценки непосредственно распространяются на представление моделей (23) в комплексной форме:

$$s_1(t) = \sum_k C_k e^{jk\omega t}; \quad s_2(t) = \sum_k C_k e^{jk(\omega + \mu_k)t}. \quad (25)$$

При наличии предварительной информации о возможной тенденции значений параметра девиации μ_k можно решать задачу оптимизации модели $s_1(t)$ в смысле оценок (24). В ряде случаев такая информация имеется. Приведем два примера.

Пример 1. Полагаем, что все параметры девиации одинаковы: $\mu_k = \text{const}(k)$. Такая ситуация может иметь место в случае доплеровского смещения частот в радиолокации. Также, такой эффект может быть вызван нестабильностью частоты генератора, задающего несущую частоту сигнала.

При данном предположении, очевидно, что из всех возможных сигналов с одинаковой энергией наилучшей устойчивостью будет обладать сигнал, для которого $\mu_k C_k^2 = \text{const}(k)$. В данном случае спектр оптимального сигнала должен быть равномерным: $\mu_k C_k^2 = \text{const}(k) = C$. Тогда модель сигнала (25) приобретает очень простой вид: $s_1(t) C \sum_{k=-N}^N e^{jk\omega t}$. Поскольку здесь суммируются члены геометрической прогрессии, после несложных преобразований получим окончательный вид модели:

$$s_1(t) = C \frac{\sin[(2N+1)\omega t / 2]}{\sin(\omega t / 2)}. \quad (26)$$

Пример 2. Параметр девиации линейно зависит от частоты. Такое предположение в хорошем приближении моделирует явление хроматической дисперсии сигнала в волоконно-оптической среде. В этом случае условие $\mu_k C_k^2 = \text{const}(k)$ с учетом того, что $\mu_k = k\mu$ выполняется, если все $C_k = C/k^{1/2}$. Модель сигнала будет в этом случае иметь вид:

$$s_1(t) = C \sum_{k=1}^N \frac{e^{jk\omega t}}{\sqrt{k}}. \quad (27)$$

Заключение. Выводы

В статье рассмотрен один из возможных подходов к построению моделей FTF-сигналов, одновременно ограниченных как во временной, так и в частотной области.

Ограничение времени с практической точки зрения можно представлять как некоторый период существования сигнала. Например, при распространении сигнала по магистральным каналам волоконно-оптических систем передачи данных типичное расстояние между регенераторами может составлять 200 км. С учетом коэффициента преломления, скорость распространения светового импульса составляет приблизительно 200000 км/с. То есть, импульс пройдет это расстояние примерно за 10^{-3} с. Длительность самого импульса при этом составляет единицы пикосекунд. Таким образом, принимая интервал $[0, T]$ равным 10-2 с, получаем вполне достаточную для моделирования сигнала временную область.

Наряду с этим, сформулированы основные требования к разработке теорий FTF-сигналов.

Рассмотрена конкретная группа элементарных моделей в виде тригонометрических рядов. Получены некоторые оценки влияния девиации частоты на точность моделирования и получены выражения (26) и (27) для моделей сигналов, минимизирующих такие влияния для определенных условий.

В развитии темы представляет интерес получения соответствующих результатов для разложений по системам почти ортогональных функций. Кроме того, в рамках рассмотренной группы моделей интересно получить аналоги выражений для критериев Найквиста и замкнутые формулы для сигналов с известными дискретными спектрами.

Литература

1. Форсайт Дж. Численное решение систем линейных алгебраических уравнений / Форсайт Дж., Молер К. ; пер. с англ. – М. : Мир, 1969. – 168 с.
2. Решетняк Г.Ю. Теоремы устойчивости в геометрии и анализе / Решетняк Г.Ю. – М. : Наука, 1982. – 228 с.
3. Филиппов Б.И. Теория электрической связи : учебное пособие / Филиппов Б.И. – Сибирский ГУ телекоммуникаций и информатики, 2011. – 283 с.
4. Троцишин І.В. Вимірювання та перетворення фазочастотних параметрів радіосигналів / Троцишин І.В. – Хмельницький : ПП Ковальський В.В., 2002. – 382 с.
5. Котельников В.А. О пропускной способности «эфира» и проволоки в электросвязи : материалы к I Всесоюзному съезду по вопросам технической реконструкции дела связи и развития слаботочной промышленности / Котельников В.А. – М., 1933. – 289 с.
6. Калюжный Н.М. Обобщенная теорема отсчетов для реализации эффективной обработки сигналов в условиях априорной неопределенности / Н.М. Калюжный // Прикладная радиоэлектроника. – 2009. – Т. 8. № 4. – С. 542–548.
7. Кравченко В.Ф. Применение теоремы Кравченко-Котельникова к интерполяции случайных процессов / В.Ф. Кравченко, А.Р. Сафин // Тезисы доклада. III Всерос. конф. «Радиолокация и радиосвязь» / ИРЭ РАН, 26–30 октября 2009. – С. 836–841.
8. Хармут Х. Теория секвентного анализа / Хармут Х. – М. : Мир, 1980. – 576 с.
9. Daniel T.L., Lee and Akia Yamamoto. Wavelet analysis: Theory and Applications. Hewlet-Packard Journal. 1994. P. 44–52.
10. Макаров Т.В. Когерентные волоконно-оптические системы передачи / Макаров Т.В. – Одесса : ОНАС им. А.С. Попова, 2009. – 220 с.
11. Чезаре Э. Элементарный учебник алгебраического анализа и исчисления бесконечно малых / Чезаре Э. – Одесса : Книгоиздательство «Матезисъ», 1913. – 642 с.
12. Прудников А.П. Интегралы и ряды. Элементарные функции / Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. – М. : Наука, 1981. – 800 с.

Рецензія/Peer review : 6.1.2017 р. Надрукована/Printed :8.2.2017 р.
Рецензент: д.т.н., проф. Троцишин І.В.