

**ВИЗНАЧЕННЯ ФАКТИЧНИХ ЗНАЧЕНЬ ІНВАРІАНТІВ КІНЕМАТИЧНИХ ПАРАМЕТРІВ МЕХАНІЗМІВ ЧЕБИШЕВА ІЗ ЗУПИНКОЮ ВИХІДНОЇ ЛАНКИ ТА МОДЕЛЮВАННЯ ЇХ РОБОТИ У СИСТЕМІ SOLIDWORKS**

*В статті розглядається питання кінематичного синтезу шарнірно-важільних механізмів із зупинкою вихідної ланки на основі симетричного механізму Чебишева із наближенням верхньої ділянки шатунної кривої до дуги кола. Раніше встановлено, що фактичні значення тривалості зупинок, які забезпечують такі механізми, в більшості випадків значно перевищують теоретичні значення, що вибрані за умов найкращого наближення за Чебишевим. Таким чином, виникла задача визначення фактичних значень таких характеристик законів руху їх вихідної ланки як інваріанти швидкостей, прискорень та кінетичної потужності. З метою перевірки правильності визначення тривалості зупинки вихідної ланки у таких механізмах, проведено комп'ютерне моделювання їх роботи у системі SOLIDWORKS, з використанням SOLIDWORKS Motion.*

*Ключові слова: кінематичний синтез, механізми Чебишева, кругові напрямні механізми, зупинка вихідної ланки, найкраще наближення за Чебишевим.*

V.O.KHARZHEVSKYI  
Khmelnitskyi National University

**THE DETERMINATION OF ACTUAL VALUES OF KINEMATIC PARAMETERS' INVARIANTS OF CHEBYSHEV'S MECHANISMS WITH DWELL OF AN OUTPUT LINK AND THEIR MODELING IN SOLIDWORKS**

*Abstract – The kinematic synthesis of dwell linkage mechanisms which are based on symmetrical Chebyshev's mechanism with the approximation of the upper part of the coupler curve to the arc of the circle is considered in the article. It is known that the actual dwell values which are provided by such mechanisms, in the most cases significantly exceed theoretical values that are selected using the Chebyshev's best approximation conditions. So, it is an important task to define actual values of such characteristics of the motion laws of their output link as invariants of velocities, accelerations and kinetic power. Having a goal to verify the accuracy of dwell values determination, the computer modeling in SOLIDWORKS using SOLIDWORKS Motion was carried out.*

*Keywords: kinematic synthesis, Chebyshev's linkages, circular path generating linkages, dwell of the output link, Chebyshev's best approximation.*

Оптимальне проектування механізмів із періодичною зупинкою вихідної ланки є важливою практичною задачею, оскільки такі механізми, як відомо [1, 2, 5, 11,14], використовуються в багатьох галузях сучасного машинобудування. До сучасних технологічних машин, що використовуються в різних галузях машинобудування, зокрема у легкій промисловості, пред'являються наступні вимоги [5]: 1) висока швидкість руху робочих органів машини; 2) висока точність та узгодженість між собою різних робочих органів машини, що приводяться від головного вала машини відповідно до заданих технологічних циклограм; 3) складний характер руху деяких робочих органів, наприклад за один цикл потрібно забезпечити одну або декілька зупинок заданої тривалості у заданих положеннях; 4) відносно малі кутові або лінійні переміщення робочих органів. Таким вимогам, зокрема забезпечення високої швидкодії та точності роботи, відповідають важільні механізми. Крім цього, для розв'язання цієї задачі можуть використовуватись інші типи механізмів, зокрема кулачкові, кулачково-важільні, мальтійські, зубчасті механізми неповнозубих коліс тощо. Проте не дивлячись на те, що кулачкові механізми є універсальними за своїми кінематичними характеристиками та є значно простішими за синтезом, важільні механізми часто представляють собою більш досконалу конструкцію та широко впроваджені у машинобудуванні [1, 2, 5, 11,14].

В сучасних умовах, створення нових механізмів можливе лише на основі наукового фундаменту, що дозволяє забезпечувати їх високу ефективність вже на етапі проектування, оскільки подальші розрахунки на міцність, конструктивне оформлення, вибір матеріалів, як правило, вже не можуть суттєво змінити основні властивості механізмів [2].

Одним з наукових напрямків у синтезі важільних механізмів із зупинкою вихідної ланки є використання базових кругових та прямолінійно-напрямних механізмів. Таким чином, основною задачею синтезу механізмів із зупинкою є саме кінематичний синтез базових напрямних механізмів, а в цьому напрямку, як відомо [1, 2], існує два основних підходи до розв'язання цієї задачі:

1. Використання методів кінематичної геометрії, базові положення якої були започатковані німецьким вченим Бурместером та отримали подальший розвиток, зокрема, в роботах Ліхтенхельдта [6], Мюллера, Бейера, Відосіча, Тесара, Сандора, Ердмана та інших вчених. Базуючись на положеннях диференціальної геометрії та теорії кривизни, розроблено цілий ряд математичних методів синтезу вказаних механізмів, що полягають у пошуку певних особливих точок шатунної площини механізмів, які здатні викреслювати шатунні криві з ділянками наближено постійної кривизни. До таких точок належать точки Болла [11], точки Бурместера, точки Чебишева, а також знайдені та досліджені автором точки розпрямлення 4-го та 5-го порядків.

2. Використання умов найкращого наближення функцій за Чебишевим, що полягає у пошуку таких геометричних параметрів механізмів, які дозволяють отримати не лише найменше відхилення ділянки шатунної кривої від прямої чи кола наближення, але й отримати максимально можливу кількість вузлів інтерполяції між заданою та заміненою функціями на ділянці наближення. Таке наближення функцій за Чебишевим ще називають рівномірним [7]. Ідеї Чебишева отримали подальший розвиток в працях Блоха, Гассмана [14], Саркіяна [15], Гродзенської, Кіницького [2] та інших вчених. Огляд сучасного стану теорії синтезу важільних напрямних механізмів та побудованих на їх основі механізмів із зупинкою вихідної ланки наведено у роботі Уанга [16].

На рис. 1, а показано приклад симетричного лямбдоподібного механізму Чебишева. На протязі довгого часу вважалося [1], що чебишевське наближення можливе лише для нижньої вітки шатунної кривої механізму, проте в роботі [8] показано, що таке наближення можливе також для верхньої ділянки. Проте як встановлено в роботі [13], фактична величина тривалості зупинки механізмів, які побудовані на їх основі, значно відрізняється від теоретичних значень, що визначені за умовою найкращого наближення за Чебишевим, в результаті чого зупинка вихідної ланки фактично продовжується за межами теоретичного інтервалу.

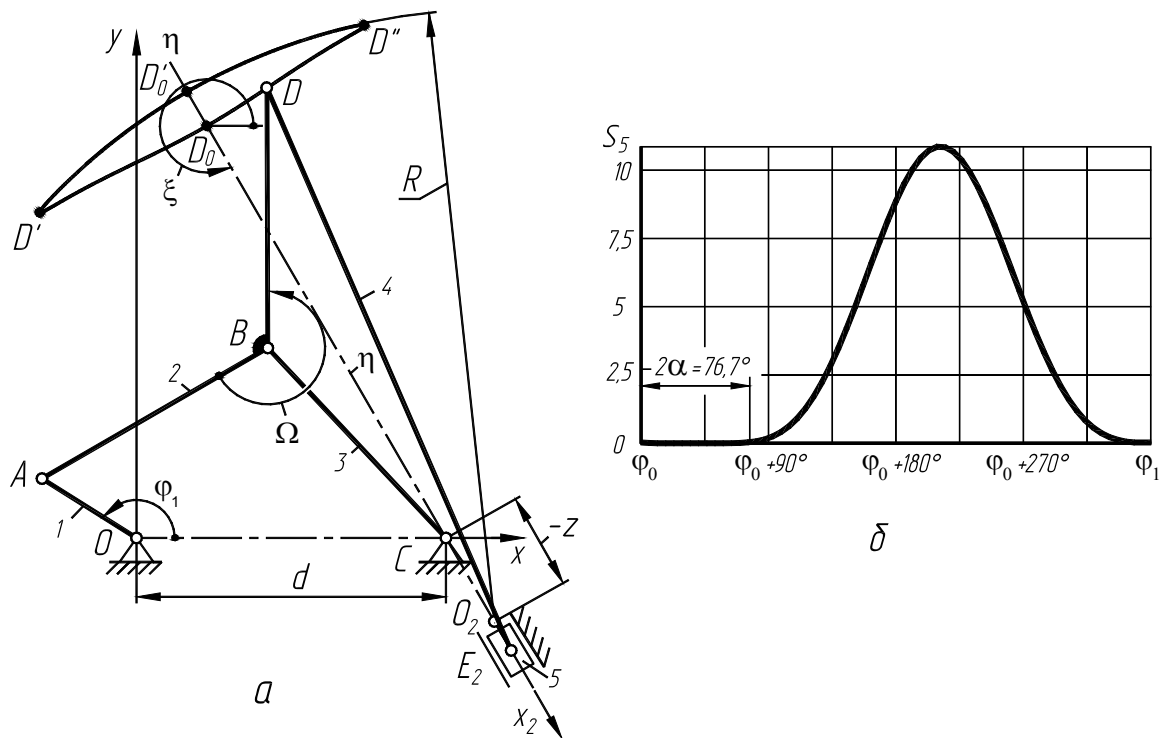


Рис. 1. Важільний механізм із зупинкою вихідної ланки на основі механізму Чебишева  $OABCD$ , що забезпечує наближення верхньої ділянки шатунної кривої до дуги кола (а) та діаграма переміщень його вихідної ланки (б)

Крім цього, в роботі [9] проводилось кінематичне дослідження таких механізмів з визначенням інваріантів законів руху їх вихідної ланки, зокрема інваріантів швидкостей, прискорень, кінетичної потужності та їх піків (максимальних значень), а оскільки фактичні значення тривалості зупинки можуть значно відрізнитись від теоретичних, виникає задача в проведенні уточненого розрахунку цих величин.

Таким чином, метою даної роботи є дослідження симетричних механізмів Чебишева з наближенням верхньої ділянки шатунної кривої та визначення фактичних значень інваріантів кінематичних характеристик їх вихідної ланки, з врахуванням величини фактичної тривалості зупинки вихідної ланки. Крім того, для перевірки правильності запропонованих теоретичних положень, необхідно провести комп'ютерне моделювання роботи таких механізмів.

В основі шарнірно-важільного механізму із зупинкою вихідної ланки (рис. 1, а) лежить шарнірний чотириланковий механізм  $OABC$ , шатунна точка  $D$  якого викреслює криву, що на ділянці  $D'D''$  наближається до дуги кола радіусом  $R$ . Відповідно до умов найкращого наближення за Чебишевим, на цій ділянці шатунної кривої спостерігається 6 спільних точок з колом наближення, що є максимально можливим для шатунної кривої шарнірного чотириланкового механізму, оскільки ця крива є алгебраїчною трициркулярною кривою 6-го порядку. Довжина шатуна приєднаної структурної групи 4-5 вибрана рівною радіусу наближення  $R$ . Таким чином під час проходження точкою  $D$  інтервалу наближення  $D'D''$  вихідна ланка 5 має наближену зупинку, тривалість якої визначається часом перебування шатунної точки  $D$  на цій ділянці та визначається як кут  $2\alpha$ , що відповідає куту повороту кривошипа 1 у фазі зупинки вихідної ланки.

В роботі [13] проведено визначення фактичних значень тривалості зупинки вихідної ланки механізмів Чебишева, у яких для наближення використовується верхня ділянка шатунної кривої та показано,

що в більшості випадків фактична тривалість зупинки перевищує теоретичні значення.

Відомо [2, 9], що для порівняння законів руху вихідних ланок різних циклових механізмів (кулачкових, шарнірних, в тому числі з коливальним або поступальним рухом вихідної ланки) доцільно використовувати інваріанти кінематичних величин, а саме: переміщень  $a_k$ , швидкостей  $b_k$ , прискорень  $c_k$ , кінетичної (динамічної) потужності  $d_k$  та їх константи піків (максимальних значень): швидкостей  $B = |b_k|_{\max}$  (рис. 2), прискорень  $C = |c_k|_{\max}$  (рис. 3) та кінетичної потужності  $D = |d_k|_{\max}$  (рис. 4).

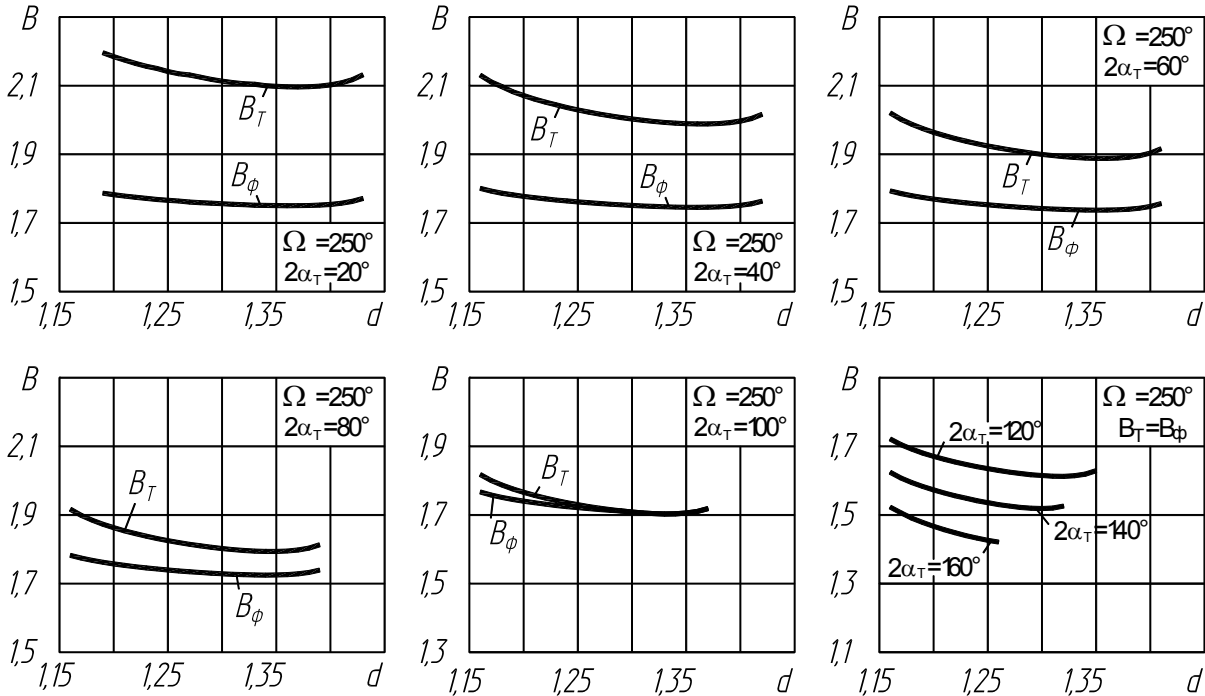


Рис. 2. Діаграми максимальних фактичних значень (піків) інваріантів швидкостей  $B_\phi$  досліджуваних механізмів для різних значень теоретичної тривалості зупинки  $2\alpha_T$  (теоретичні значення  $B_T$  наведені в роботі [9])

Інваріанти кінематичних величин  $a_k, b_k, c_k, d_k$  є безрозмірними числовими характеристиками та представляють собою функцію узагальненої координати  $k = t/T$ , де  $k$  – відносний час або фаза циклу,  $T$  – період прямого або зворотного ходу вихідної ланки;  $t$  – значення часу ( $0 \leq t \leq T$ ).

Константи піків  $B, C, D$  є об'єктивними критеріями якісної оцінки законів періодичного руху вихідної ланки механізмів [2]. Зокрема, константа піка швидкості  $B$  лімітує підвищення працездатності машин за відповідними технологічними причинами, визначає найбільшу кінетичну енергію рухомих мас, а при малих динамічних навантаженнях – сумарну потужність. Константа піка прискорення  $C$  визначає найбільші сили інерції  $F_{i\max}$ , константи піків кінетичної потужності  $D$  визначають максимальні значення відповідних складових розрахункових динамічних навантажень на всі ланки передаточних механізмів [2, 9].

Якщо прийняти, що період віддалення дорівнює періоду наближення, тобто коефіцієнт зміни середньої швидкості вихідної ланки  $K=1$  [2], то з врахуванням коливань вихідної ланки в період зупинки, запишемо [9]:

$$a_k = \frac{s_5}{S+2E}; b_k = \frac{\pi-\alpha}{S+2E} x'_5; c_k = \frac{(\pi-\alpha)^2}{S+2E} x''_5; d_k = b_k c_k, \quad (1)$$

де  $\alpha$  – кут повороту кривошипа  $I$ , що відповідає фазі зупинки вихідної ланки (половина від  $2\alpha$ , оскільки механізм є симетричним);  $x'_5, x''_5$  – відповідно аналоги швидкостей та прискорень ланки 5, що визначаються за методами, наведеними у [3];  $s_5 = x_{E_2} - x_{O_2}$ ,  $S = l_{D_0 D'_0}$ .

Використання інваріантів  $a_k, b_k, c_k, d_k$  та їх констант піків  $B, C, D$  дозволяє порівнювати закони руху вихідної ланки важільних механізмів із законами руху кулачкових механізмів, для яких відомі залежності  $a_k(k), b_k(k), c_k(k), d_k(k)$  та їх константи піків.

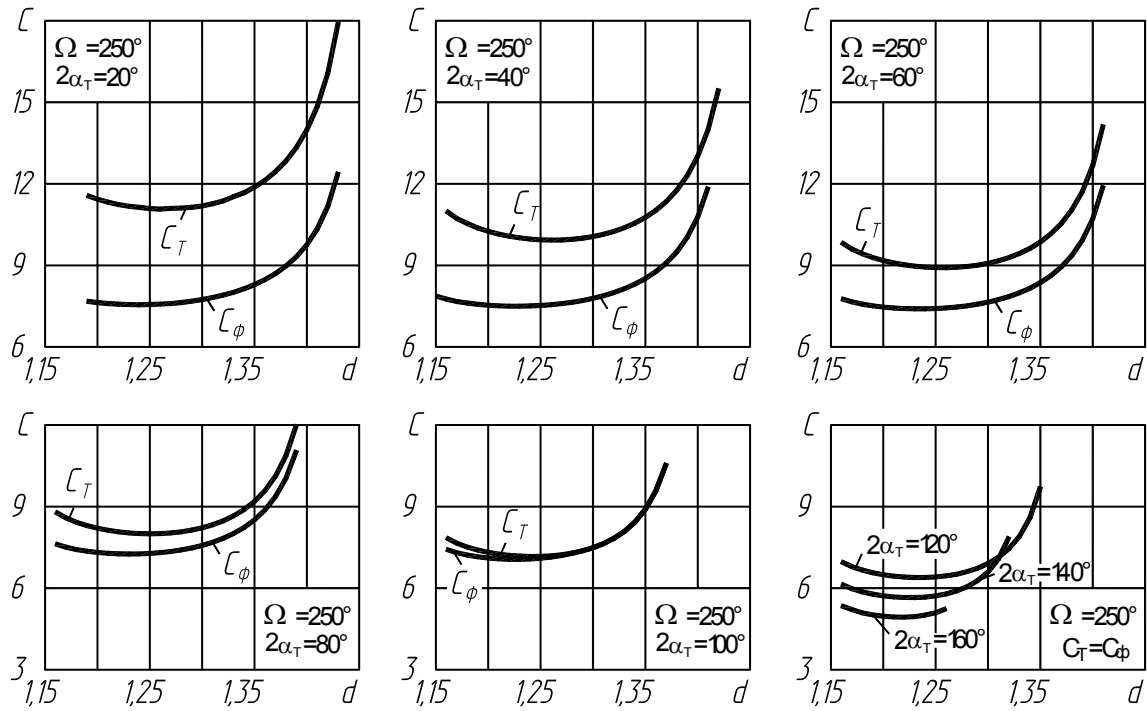


Рис. 3. Діаграми максимальних фактичних значень (піків) інваріантів прискорень  $C_\phi$  досліджуваних механізмів для різних значень теоретичної тривалості зупинки  $2\alpha_T$  (теоретичні значення  $C_T$  наведені в роботі [9])

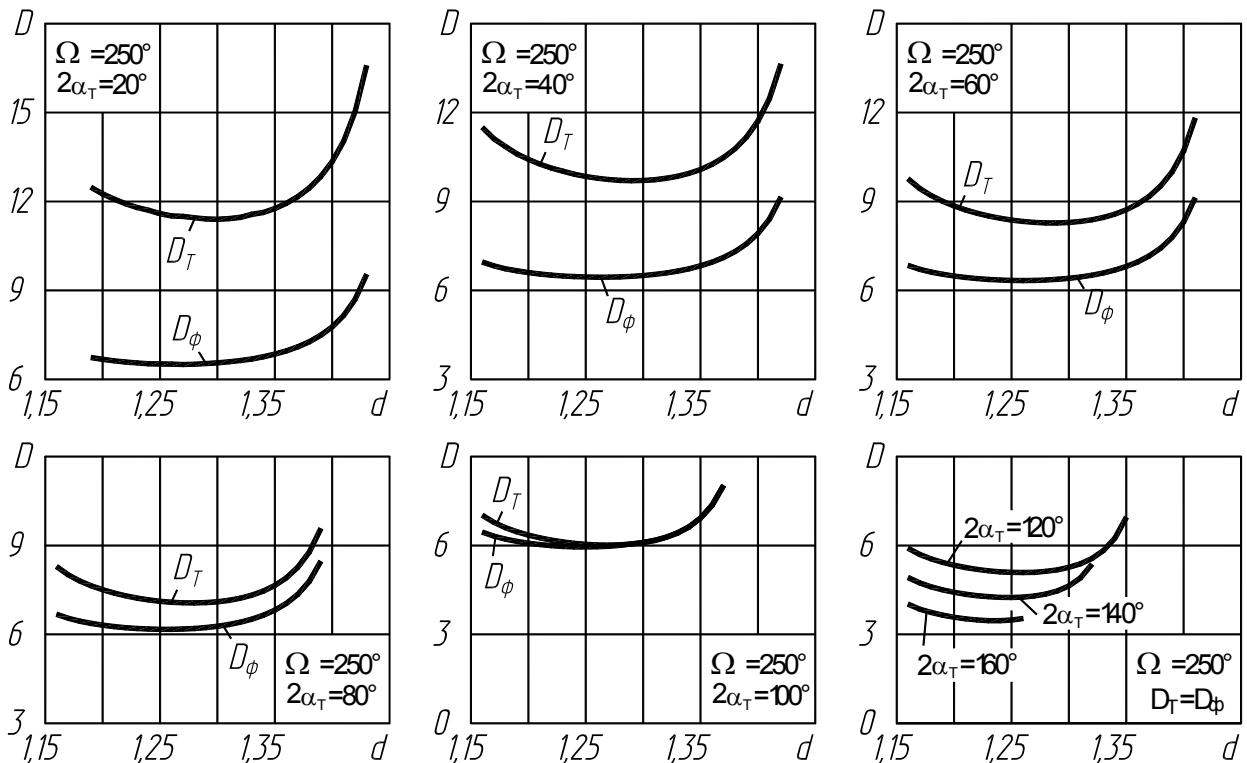


Рис. 4. Діаграми максимальних фактичних значень (піків) інваріантів кінетичної потужності  $D_\phi$  досліджуваних механізмів для різних значень теоретичної тривалості зупинки  $2\alpha_T$  (теоретичні значення  $D_T$  наведені в роботі [9])

Як видно з формул (1), інваріанти кінематичних величин залежать від тривалості зупинки вихідної ланки  $\alpha$ , а оскільки, як встановлено в роботі [13], фактичні значення тривалості зупинки для механізмів, що розглядаються, не завжди збігаються з теоретичними значення, то за формулами (1) було проведено розрахунок фактичних значень інваріантів. На рис. 2–4 показані діаграми зміни значень піків інваріантів кінематичних величин, з яких видно, що їх теоретичні значення збігаються з фактичними тільки для механізмів зі значною тривалістю зупинки ( $2\alpha_T \geq 100^\circ$ ). Причому слід зазначити, що в даному випадку

( $\Omega=250^\circ$ ) для механізмів з  $2\alpha_7=100^\circ$  теоретичні значення інваріантів збігаються з фактичними лише частково, для значень  $a > 1,28$

В роботі [9] вказано, що характер зміни інваріантів дозволяє вибирати оптимальні механізми за цими параметрами, оскільки відповідні криві для певних значень міжосьової відстані  $a$  мають чітко виражені мінімуми, проте, як видно, фактично оптимальні значення в більшості випадків не відповідають теоретичним, до того ж, фактичні значення тривалості зупинки  $2\alpha$  вихідної ланки у таких механізмах, як показано у роботі [13], будуть іншими (крім  $2\alpha = 120^\circ - 160^\circ$ ).

З наведених діаграм видно (рис. 2–4), що чим меншою є теоретична тривалість зупинки, тим більшою є різниця між теоретичними та фактичними значеннями інваріантів. Це пояснюється тим, що для верхньої ділянки шатунної кривої симетричного механізму Чебишева практично неможливо знайти механізми із невеликою тривалістю зупинки.

Таким чином, важливою є задача перевірки правильності визначення величини фактичної ділянки наближення в таких механізмах. В роботі Светловського О.Б. [10] для підтвердження правильності розрахунків проведено експериментальне дослідження механізму Чебишева з наближенням верхньої ділянки шатунної кривої шляхом виготовлення лабораторної експериментальної установки. Отримані ним результати підтвердили теоретичні положення, причому вказано, що отримані відхилення не перевищували 6% [10]. Проте аналіз отриманих діаграм переміщень дозволяє стверджувати, що для виготовлення лабораторної установки було виготовлено механізм з тривалістю зупинки  $2\alpha=130^\circ$ , тому очевидно, що фактична отримана тривалість зупинки відповідала теоретичним значенням, оскільки це справедливо для всіх таких механізмів з  $2\alpha > 100^\circ$ . Тому для проведення перевірочних розрахунків доцільно вибрати механізм з невеликою теоретичною тривалістю зупинки  $2\alpha$ . Параметри такого механізму, що забезпечує  $2\alpha_7=20^\circ$ , наведені у таблиці 1.

Таблиця 1

**Параметри механізму Чебишева з наближенням верхньої ділянки шатунної кривої**

Параметр	Значення	Параметр	Значення
Довжина кривошипа $r$	0,3380098	Початок зупинки $\varphi_0$ , град.	321,6354
Довжина шатуна $b$	1	Максимальний хід $S$	0,108553608959
Довжина коромисла $c$	1	Кут $\xi$ , град.	305
Друге плече шатуна $k$	1	Кут $\Omega$ , град.	250
Міжосьова відстань $a$	1,3	Радіус наближеного кола $R$ (шатун $l_{DE}$ )	2,58563393
$\alpha_\Sigma$ , град. (теоретичне)	20	$\alpha_\Sigma$ , град. (практичне)	76,7292
Максимальне відхилення $2E$ , (теоретичне, частка від $S$ )	$7,53 \cdot 10^{-8}$	Максимальне відхилення $2E$ , (практичне, частка від $S$ )	$2,597 \cdot 10^{-3}$

З метою перевірки правильності розрахунків, було проведено комп'ютерне моделювання вибраного механізму. Для цього була використана комп'ютерна 3D-модель шестиланкового механізму, побудованого на основі кругового напрямного механізму, що використовувалась раніше для дослідження механізмів, синтезованих на основі точок Бурместера [12]. Для зазначеної моделі були встановлені розміри ланок відповідно до табл. 1, при цьому отримана модель має вигляд, як показано на рис. 5. Зазначимо, що розміри моделі приймалися таким чином, що  $b = c = k = 100$  мм.

Кінематичне дослідження комп'ютерної моделі проводилось за допомогою системи інженерного аналізу SOLIDWORKS Motion, що інтегрована у САПР SOLIDWORKS. Результати проведеного моделювання показано на рис. 6, б–г. З отриманої діаграми переміщень (рис. 6, б) видно наявність зупинки вихідної ланки механізму, причому тривалість цієї зупинки значно перевищує теоретичне значення ( $2\alpha_7=20^\circ$ ).

Для проведення синтезу та аналізу важільних напрямних механізмів, а також побудованих на їх основі механізмів із зупинкою вихідної ланки було розроблено власне програмне забезпечення *LMechSynthesis*, причому для синтезу механізмів Чебишева з наближенням верхньої ділянки шатунної кривої в програмі використовуються методи, наведені в роботах [4, 8]. Визначення фактичної тривалості зупинки вихідної ланки проводилось за допомогою числового методу з використанням безрозмірного коефіцієнту граничної швидкості вихідної ланки, як описано в роботах [11, 13]. На рис. 6, а наведено програмне вікно у *LMechSynthesis* з результатами проведеного синтезу та аналізу механізму, параметри якого зведено у табл. 1. Причому діаграма переміщень вихідної ланки такого механізму, що отримана у програмі *LMechSynthesis*, показана на рис. 1, б.

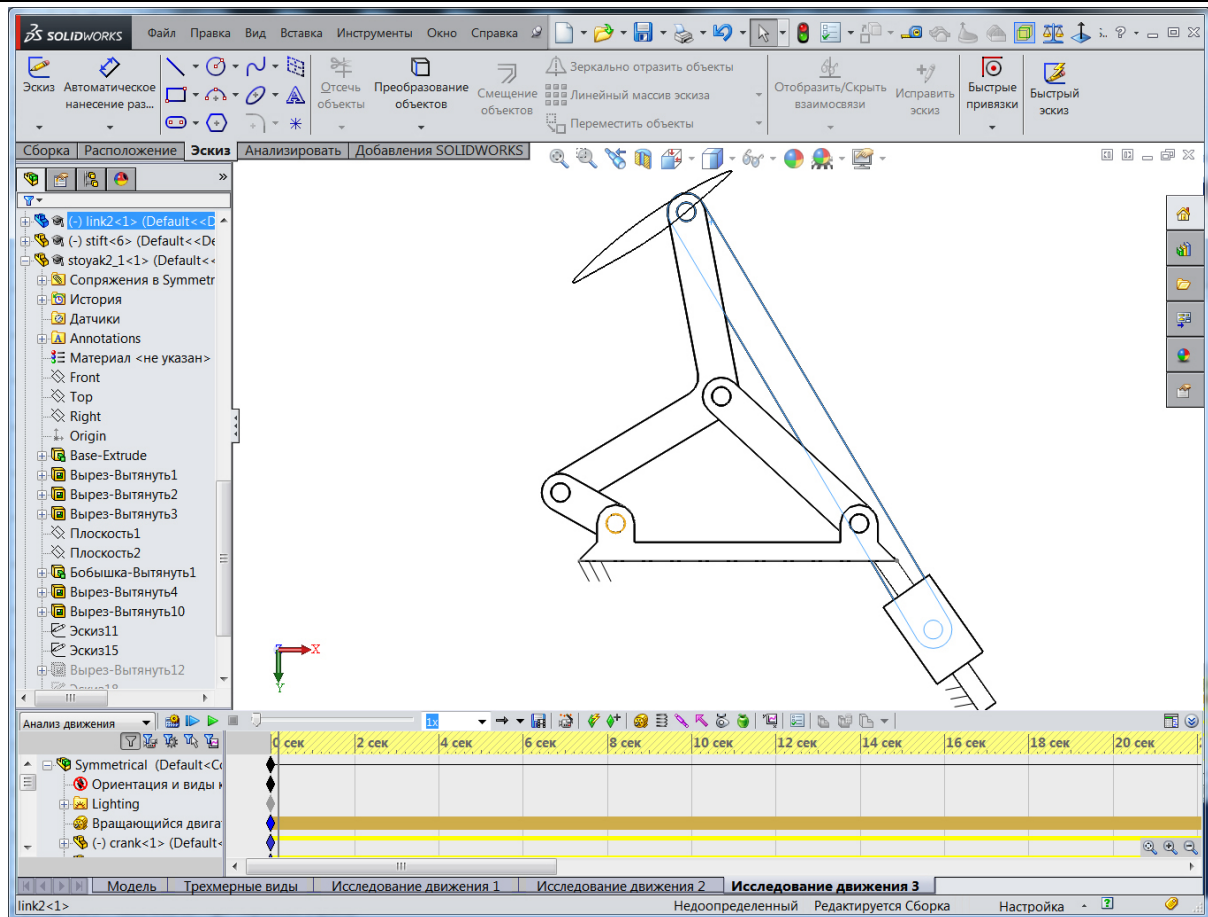


Рис. 5. Комп'ютерна 3D-модель синтезованого механізму у системі SOLIDWORKS (на схемі показана траєкторія руху шатунної точки)

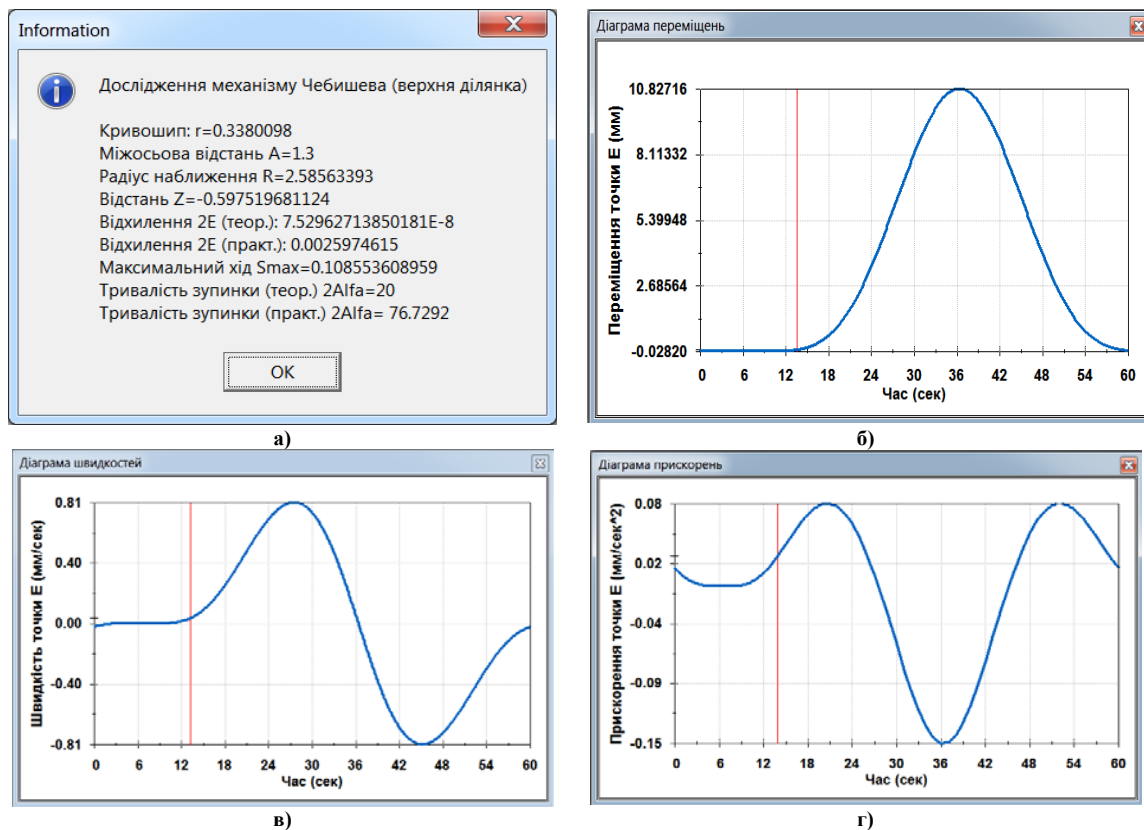


Рис. 6. Результати синтезу та дослідження механізму в програмі LMechSynthesis (а), а також кінематичного дослідження вихідної ланки механізму у SOLIDWORKS Motion: б) діаграма переміщень; в) діаграма швидкостей; г) діаграма прискорень

Зазначимо, що отримане значення тривалості зупинки  $2\alpha$  у 3,8 рази перевищує теоретичне значення, причому отримана у SOLIDWORKS Motion діаграма переміщень вихідної ланки (рис. 6, б) повністю відповідає розрахункам, проведеним у розробленій програмі *LMechSynthesis* (див. рис. 1, б), а середня похибка отриманих результатів склала  $7 \cdot 10^{-10}$ . Це дозволяє стверджувати, що проведений числовий експеримент у SOLIDWORKS підтвердив розрахунки, які вказували, що фактична тривалість зупинки вихідної ланки досліджуваних механізмів Чебишева значно відрізняється від теоретичних значень, а отже характер зміни інваріантів кінематичних величин буде іншим, як показано на рис. 2–4.

Таким чином, проведені в роботі дослідження показали, що закони руху вихідної ланки механізмів Чебишева, у яких для наближення використовується верхня ділянка шатунної кривої, в багатьох випадках характеризуються іншими значеннями інваріантів швидкостей, прискорень та кінетичної потужності порівняно зі значеннями, що розраховані для тривалості зупинки вихідної ланки, яка вибрана з умови найкращого наближення за Чебишевим. Числовий експеримент, проведений у системі SOLIDWORKS, підтвердив правильність вибору величини ділянки наближення у таких механізмах.

Дослідження планується продовжити в напрямку проведення оптимізаційного синтезу таких механізмів за різними критеріями.

### Література

1. Артоболевский И. И. Синтез плоских механизмов / И. И. Артоболевский, Н. И. Левитский., С. А. Черкудинов. – М. : Физматгиз, 1959. – 1084 с.
2. Киницкий Я.Т. Шарнирные механизмы Чебышева с выстоем выходного звена / Я. Т. Киницкий. – К. : Вища школа, 1990. – 232 с.
3. Кіницький Я.Т. Теорія механізмів і машин в системі Mathcad : навч. посібник / Я.Т. Кіницький, В.О. Харжевський, М.В. Марченко. – Хмельницький : РВЦ ХНУ, 2014. – 295 с.
4. Кіницький Я.Т. Геометричний синтез симетричних лямбдоподібних механізмів Чебишева чисельним методом / Я.Т. Кіницький, О.Б. Светловський, В.О. Харжевський // Вісник Технол. ун-ту Поділля. – 1999. – № 6. – С. 160–162.
5. Кикин А.Б. Разработка методов и средств для структурно-кинематического проектирования рычажных механизмов машин легкой промышленности : дисс. ... докт. техн. Наук : 05.02.13 / А.Б. Кикин ; Санкт-Петербургский государственный университет технологий и дизайна. – Санкт-Петербург, 2006. – 362 с.
6. Лихтенхельдт В. Синтез механизмов / В. Лихтенхельдт. – М. : Наука, 1964. – 228 с.
7. Научное наследие П.Л. Чебышева : вып. 2: Теория механизмов / [отв. ред. Н.Г. Бруевич, И.И. Артоболевский] / АН СССР. – М. ; Л. : Изд-во АН СССР, 1945. – 192 с.
8. Светловський О.Б. Геометричний синтез симетричних лямбдоподібних механізмів Чебишева за заданою тривалістю зупинки вихідної ланки чисельним методом / О.Б. Светловський, Я.Т. Кіницький // Вісник Технол. ун-ту Поділля. – 2001. – № 1, Ч. 1. – С. 20–24.
9. Светловський О. Б. Кінематичне дослідження симетричних лямбдоподібних механізмів Чебишева, у яких для наближення до дуги кола використовується верхня ділянка шатунної кривої / О. Б. Светловський, Я. Т. Кіницький // Вісник Технологічного університету Поділля. Технічні науки. – 2001. – № 3, Ч. 1. – С. 73–77.
10. Светловський О.Б. Експериментальне дослідження кінематики шарнірно-важільних механізмів із зупинкою декількох вихідних ланок / О.Б. Светловський // Збірник наукових праць. – Хмельницький : Вид-во Національної академії прикордонних військ України (НАПВУ), 2002. – № 19, част. II (спец. випуск). – С. 34–37.
11. Харжевський В. О. Синтез важільних прямолінійно-напрямних механізмів та механізмів із зупинкою вихідної ланки на базі шарнірного чотириланкового механізму : дис. ... канд. техн. Наук : 05.02.02 / Харжевський В'ячеслав Олександрович. – Хмельницький, 2004. – 262 с.
12. Харжевський В.О. Комп'ютерне моделювання та аналіз важільних механізмів із зупинкою вихідної ланки, що побудовані за допомогою точок Бурместера / В.О. Харжевський // Вісник Хмельницького національного університету. – 2006. – № 3 (80). – С. 30–34.
13. Харжевський В.О. Дослідження законів руху вихідної ланки механізмів, побудованих на основі механізму Чебишева з наближенням верхньої ділянки шатунної кривої / В.О. Харжевський // Вісник Хмельницького національного університету. – 2017. – №1 (245). – С. 10–16.
14. Gassmann V. Synthese von Geradfürungen mit ebenen Viergelenkgetrieben, Hamburg, Universität der Bundeswehr Diss., 2000. – 102 p.
15. Sarkissyan Y.L. Approximations in Synthesis of Mechanisms / State Engineering University of Armenia Proceedings, series “Mechanics, Machine Science, Machine-building”, Issue 15, #2, 2012, pp. 9–21.
16. Wang D. Kinematic Differential Geometry and Saddle Synthesis of Linkages / Wang D., Wang W. – John Wiley & Sons Singapore Pte. Ltd., 2015. – 484 p.

Рецензія/Peer review : 2.3.2017 р. Надрукована/Printed : 19.4.2017 р.

Рецензент: д.т.н., проф. Кіницький Я.Т.