

**ОЦІНКА СТІЙКОСТІ ЗАМКНУТОЇ СИСТЕМИ АВТОМАТИЧНОГО РЕГУЛЮВАННЯ ЗА ДОПОМОГОЮ ЧАСТОТНИХ КРИТЕРІЇВ**

В роботі представлено результати оцінки стійкості системи автоматичного регулювання (САР) шафи холодильника за допомогою частотних критеріїв Михайлова та Найквіста. Стійкість системи є необхідною умовою можливості САР вирішувати поставлені перед нею завдання. Оцінка стійкості системи за даними критеріями виконується на основі характеристики, тобто побудови годографа. Розглянуто розв'язання поставленої задачі з використанням різних програмних середовищ, таких як LabVIEW, MathCad, MatLab.

Ключові слова: частотні критерії, годограф, Михайлов, Найквіст, LabVIEW, MathCad, MatLab.

P.S. MAIDAN, G.F. VORONIN, E.O. ZOLOTENKO, A.V. BURYAK  
Khmelnyskiy National University

**EVALUATION OF THE STABILITY OF THE AUTOMATIC CONTROL SYSTEM BY FREQUENCY CRITERIA**

The paper presents the results of the evaluation of the stability of the automatic control system (ACS) of the refrigerator cabin using the frequency criteria of Mikhailov and Nyquist. Stability of the system is a prerequisite for the ability of the ACS to solve its tasks. The evaluation of the stability of the system according to the criteria is performed on the basis of the characteristic, that is, the construction of the hodograph. Solving the problem using a variety of software environments such as LabVIEW, MathCad, MatLab is considered. The availability of mathematical packages enables the use of PCs for the construction of hodographs, including the Mikhailov and Nyquist hodographs. The MathCAD software package has built-in functions that will allow us to perform the necessary calculations and decompose the equation into real and imaginary parts. In the LabVIEW program environment, the program is a cyclic block with a limited number of iterations (calculated from the Nyquist criterion frequency and step), and separately the numerator and denominator coefficients in the form of a one-dimensional array of data, which, in turn, are calculated according to the formulas given in the elements of the calculation. Elements of the calculation are standard subprograms of polynomial calculations, in which numbers are considered in the complex form and after mathematical actions are decomposed into real and imaginary parts, after which according to the coefficients of the actual and imaginary part a graph is drawn on the front panel. In the Matlab software environment, there are necessary built-in functions for calculating the Nyquist criterion, but to find the Mikhailov criteria, the program needs to be written completely from scratch. The analysis of ACS in various ways has shown that the use of software environments such as LabVIEW, MathCad, and Matlab increases the accuracy of system stability determination. However, it requires not only to know the basics of programming to write the necessary file-programs, but also to have basic knowledge of the theory of automatic control, in order to bring the equation of the transfer function of the ACS to the desired type of program.

Key words: frequency criteria, hodograph, Mikhailov, Nyquist, LabVIEW, MathCad, MatLab.

**Вступ**

Під стійкістю систем автоматичного регулювання (САР) в загальному випадку розуміють [1, 2] її властивість повертатися в початкове (або близьке до того) положення після зникнення дії факторів (збуджень), які вивели систему із стану початкової рівноваги. Стійкість системи є необхідною умовою здатності САР вирішувати поставлені перед нею завдання.

Відомо [1–3], що при виведенні рівняння замкнутої САР в багатьох випадках використовується лінеаризація нелінійних залежностей за допомогою ряду Тейлора. Виведене таким чином рівняння називається рівнянням першого наближення.

При  $n > 4$  немає аналітичного розв'язку характеристичного рівняння. Знаходити корені при більш високих порядках важко, тому було розроблено методи аналізу стійкості з критеріїв без знаходження коренів.

Існують два основних види критеріїв стійкості: алгебраїчні та частотні.

**Аналіз останніх джерел**

До частотних критеріїв стійкості САР відносять: Михайлова, Найквіста, метод D-розбиття та інші.

Критерій Михайлова був запропонований в 1938 році і є дуже зручним для аналізу лінійних систем, особливо високого порядку ( $n \geq 5$ ).

Оцінка стійкості системи за даним критерієм виконується на основі характеристики або годографа Михайлова, яка будується наступним чином:

В поліномі характеристичного рівняння замкнутої системи:

$$a_0 \cdot p^n + a_1 \cdot p^{n-1} + \dots + a_{n-1} \cdot p + a_n = L(p) \quad (1)$$

виконують підстановку  $p = j \cdot \omega$ , після чого вираз годографа Михайлова отримують у вигляді:

$$L(j\omega) = a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_{n-1}(j\omega) + a_n.$$

Вираз  $L(j\omega)$  ділять на дві частини – дійсну  $A(\omega)$  і уявну  $jB(\omega)$ , тобто:

$$L(j\omega) = A(\omega) + jB(\omega), \quad (2)$$

де  $A(\omega) = a_n - a_{n-2}\omega^2 + a_{n-4}\omega^4 - a_{n-6}\omega^6 + \dots$ ;

$$B(\omega) = a_{n-1}\omega - a_{n-3}\omega^3 + a_{n-5}\omega^5 - \dots$$

Задаючи значення  $\omega$  в межах від 0 до  $+\infty$  на комплексній площині в координатах  $A(\omega)$ ,  $jB(\omega)$  будують годограф Михайлова, радіус-вектор  $L(j\omega)$  якого при зміні  $\omega$  від 0 до  $+\infty$  обертається проти годинникової стрілки.

Оцінка стійкості здійснюється за виглядом і розміщенням кривої  $L(j\omega)$  відносно квадрантів площини  $A(\omega) - jB(\omega)$  (рис. 1).

Формула критерію: для стійкості замкнутої системи необхідно і достатньо, щоб годограф почавши обертання з точки, яка лежить на дійсній вісі праворуч від нуля, обертаючись проти годинникової стрілки і ніде не перетворюючись в нуль, пройшов послідовно  $n$  квадрантів комплексної площини, повернувшись на кут  $\frac{\pi}{2} \cdot n$  [1].

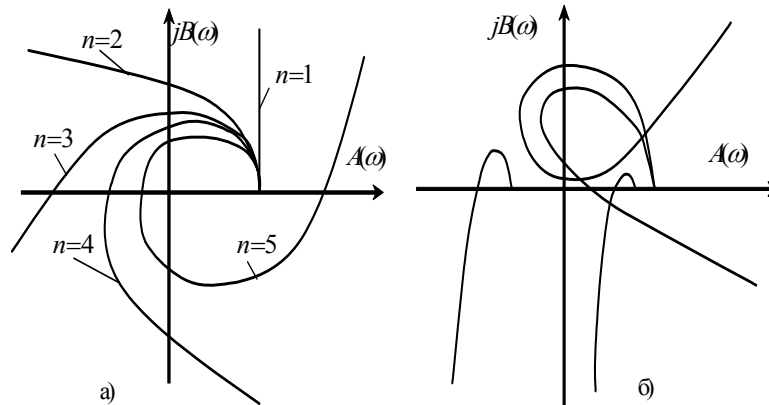


Рис. 1. Приклади годографа Михайлова для стійких (а) та нестійких (б) систем

Американський вчений розробив критерій стійкості для дослідження електронних підсилювачів зі зворотним зв'язком. Особливість критерію Найквіста в тому, що він дає змогу:

- оцінювати динамічні властивості замкнутих систем за частотними характеристиками відповідних розімкнутих систем;
- досліджувати динамічні властивості замкнутої системи за відсутності рівнянь динаміки системи або її окремих елементів.

У цьому разі достатньо мати експериментальні частотні характеристики системи або відповідних ланок, які можуть бути визначені на реальних елементах системи або на їхніх моделях [1, 2].

Формула критерію [2]: для стійкості замкнутої лінійної САР необхідно і достатньо, щоб при русі точки  $N$  вздовж амплітудно-фазової частотної характеристики розімкнутої системи при зміні  $\omega$  від 0 до  $+\infty$  вектор  $CN$ , початок якого лежить у точці  $C$  з координатами  $(-1, j0)$ , повернувся на кут:

$$\varphi_{CN} = (n - n_1 + 2m) \frac{\pi}{2}, \quad (3)$$

де  $n$ ,  $n_1$  – відповідно степені характеристичних рівнянь замкнутої і розімкнутої систем;

$m$  – кількість додатних коренів у характеристичному рівнянні розімкнутої системи.

На практиці, як правило,  $n = n_1$ , і тому при  $m = 0$  умова стійкості замкнутої системи матиме вигляд  $\varphi_{CN} = 0$  [1].

На рис. 2 показано АФХ двох систем у розімкнутому стані, які після замикання будуть стійкою (крива 1) та нестійкою (крива 2).

При наявності  $k$  нульових коренів у характеристичному рівнянні розімкнутої системи початкова точка АФХ з  $\omega = 0$  не лежить на правій половині дійсної вісі. Тому для застосування критерію Найквіста АФХ в цьому випадку доповнюється дугою нескінченно великого радіуса-вектора кута  $\pi/2 \cdot k$  (рис. 3) [1–3].

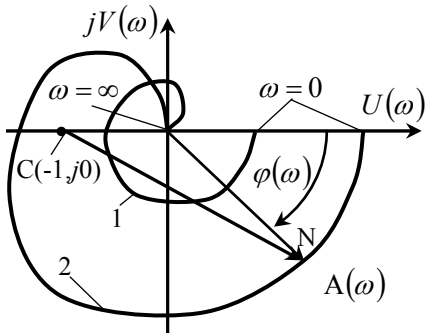


Рис. 2. АФХ стійкої (1) та нестійкої (2) замкнутих систем у розімкнутому стані

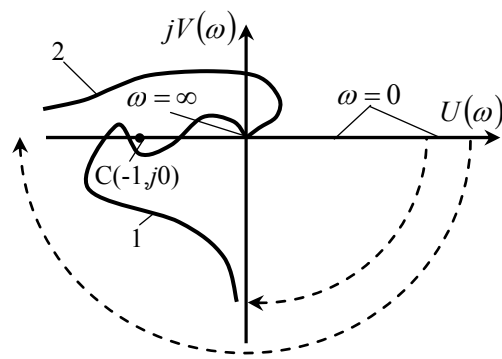


Рис. 3. АФХ стійкої (1) та нестійкої (2) замкнутих систем у розімкнутому стані при одному (1) та двох (2) нульових коренях характеристичного рівняння розімкнутого стану

**Виклад основного матеріалу**

В якості прикладу для оцінки стійкості обираємо САР шафи холодильника.

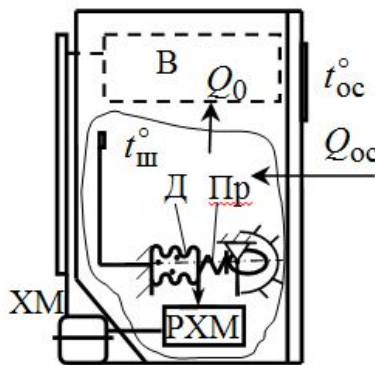


Рис. 4. Конструктивна схема САК температурою в шафі холодильника

Герметична шафа (рис.4) побутового холодильника охолоджується випарником (В) холодильної машини (ХМ), який забирає тепло з шафи потужністю  $Q_0$ . Тепло з'являється в шафі переважно за рахунок теплового потоку  $Q_{oc}$  ззовні всередину через стінки шафи. В сталому режимі кількість тепла, що заходить з кімнати в шафу за одиницю часу буде дорівнювати кількості тепла, яке відбирається холодильною машиною з шафи за одиницю часу. При зміні зовнішньої температури  $t_{oc}^{\circ}$  температура  $t_{ш}^{\circ}$  в шафі буде мінятися, чого не повинно бути.

В САР температурою всередині шафи використовується пневматичний датчик (Д) температури. Тиск пари в ньому прямо пропорційний температурі повітря всередині шафи. Тиск пари датчика створює силу натискання на порівнювальний елемент, на який в протилежному напрямку діє пружина (Пр). Зміщення порівнювального елемента механічно підсилюється і змінює пропорційно холодопродуктивність холодильної машини через регулятор (РХМ) (насправді в побутових машинах частіше використовується релейна залежність холодопродуктивності від зміщення порівнювального елемента, однак релейні САК відносяться до нелінійних систем і аналіз їх більш складний) [4].

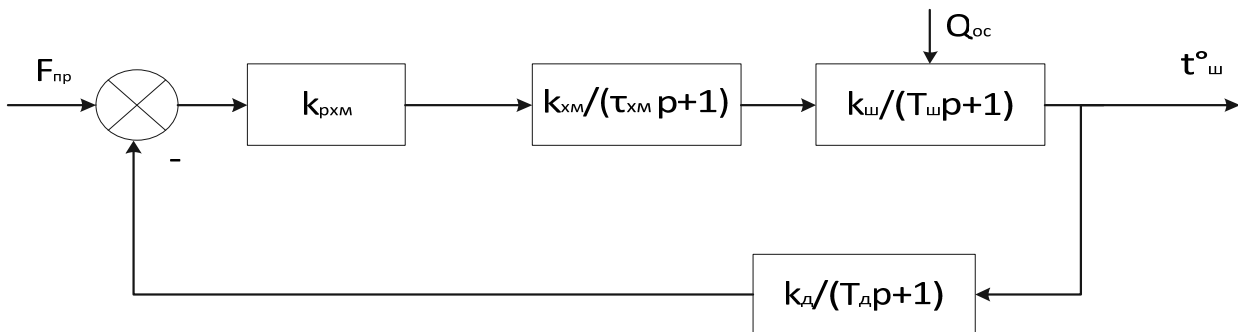


Рис. 5. Структурна схема САР шафи холодильника

САР описується наступним рівнянням:

$$W(p) = \frac{k_p}{(\tau_{xm} \cdot p + 1) \cdot (T_{ш} \cdot p + 1) \cdot (T_{\delta} \cdot p + 1)}, \quad (4)$$

де  $\tau_{xm}$  – час запізнення спрацювання холодильної машини,  $\tau_{xm} = 0,004[c]$ ;

$T_{ш}$  – стала часу шафи,  $T_{ш} = 0,01[c]$ ;

$T_{\delta}$  – стала часу пневмодатчика,  $T_{\delta} = 0,003[c]$ ;

$k_p$  – коефіцієнт передачі розімкнутої системи,  $k_p = 350$  [4].

Використаємо декілька способів оцінки стійкості САР шафи холодильника за наведеними вище критеріями Михайлова та Найквіста.

### 1. Спосіб «ручний» [4]

Для подальшого обчислення нам необхідний лише знаменник рівняння (4), який ми змінюємо до вигляду:

$$L(p) = (\tau_{xm} \cdot p + 1) \cdot (T_{ш} \cdot p + 1) \cdot (T_{\delta} \cdot p + 1) + k_p \quad (5)$$

Виконуємо підстановку значень в рівняння та заміну  $p \rightarrow j \cdot \omega$ .

$$L(j\omega) = 0,00000012(j\omega)^3 + 0,000082(j\omega)^2 + 0,017(j\omega) + 351. \quad (6)$$

Згідно рівняння (2) виконуємо розподіл рівняння (6) на дійсну та уявну частину

$$L(j\omega) = (351 - 0,000082\omega^2) + j(0,017\omega - 0,00000012\omega^3).$$

При  $\omega = 0$  поліном приймає значення 351. Це означає, що при  $\omega = 0$  початкова точка годографа Михайлова лежить на дійсній вісі у точці із значенням 351. Крім того точка годографа буде лежати на дійсній вісі і при значенні  $\omega = \sqrt{0,017/0,00000012} = 376,4$  і її абсциса буде дорівнювати  $351 - 0,000082 \cdot 376,4^2 = 339,4$ . При  $\omega = \sqrt{351/0,000082} = 2069$  дійсна частина дорівнює нулю і точка годографа займе місце на уявній вісі з ординатою  $0,017 \cdot 2069 - 0,00000012 \cdot 2069^3 = -1027,6$ . Збільшення частоти призведе до від'ємної дійсної частини та від'ємної уявної частини. Всі ці розрахунки остаточно оформлено у вигляді годографа Михайлова на рис.6.

Перевіримо необхідні і достатні умови стійкості за годографом Михайлова. По-перше, початок годографа – точка на дійсній вісі праворуч від нуля з координатами (350,0) – співпадає з першою вимогою критерію. По-друге, годограф обертається проти годинникової стрілки, що і потрібно. По-третє, годограф не проходить через точку (0,0), що також необхідно для стійкості системи. Номери квадрантів, які послідовно проходить годограф – 1 і 4, ці номери – не послідовні. Вимоги до вигляду годографа Михайлова щодо стійкості САР не задовольняються і вся система при таких значеннях параметрів буде не стійкою.

Критерій Найквіста застосуємо до АФХ розімкнутої системи на рис.5. Характеристичне рівняння розімкнутої системи має один нульовий корінь. Тому АФХ розімкнутої системи при  $\omega = 0$  має  $A = \infty$ ,  $\varphi = -\pi/2$ . Доповнюємо АФХ дугою  $\pi/2$  як на рис. 3 і оцінюємо кут повороту вектора CN із зміною  $\omega$  від 0 до  $\infty$ . Він складе в нашому випадку  $180^0$  або  $\pi$ . Цей кут не дорівнює нулю, і з критерію Найквіста замкнута система буде нестійкою.

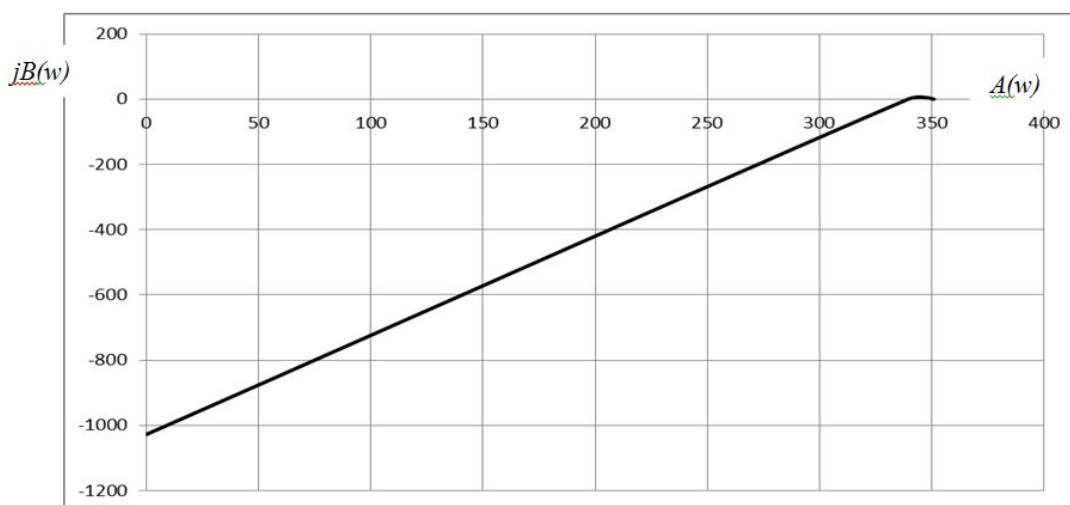


Рис. 6. Годограф Михайлова

### 2. Спосіб автоматизований

Наявність математичних пакетів дає можливість використати ПК для побудови годографів, у тому

числі і годографів Михайлова та Найквіста.

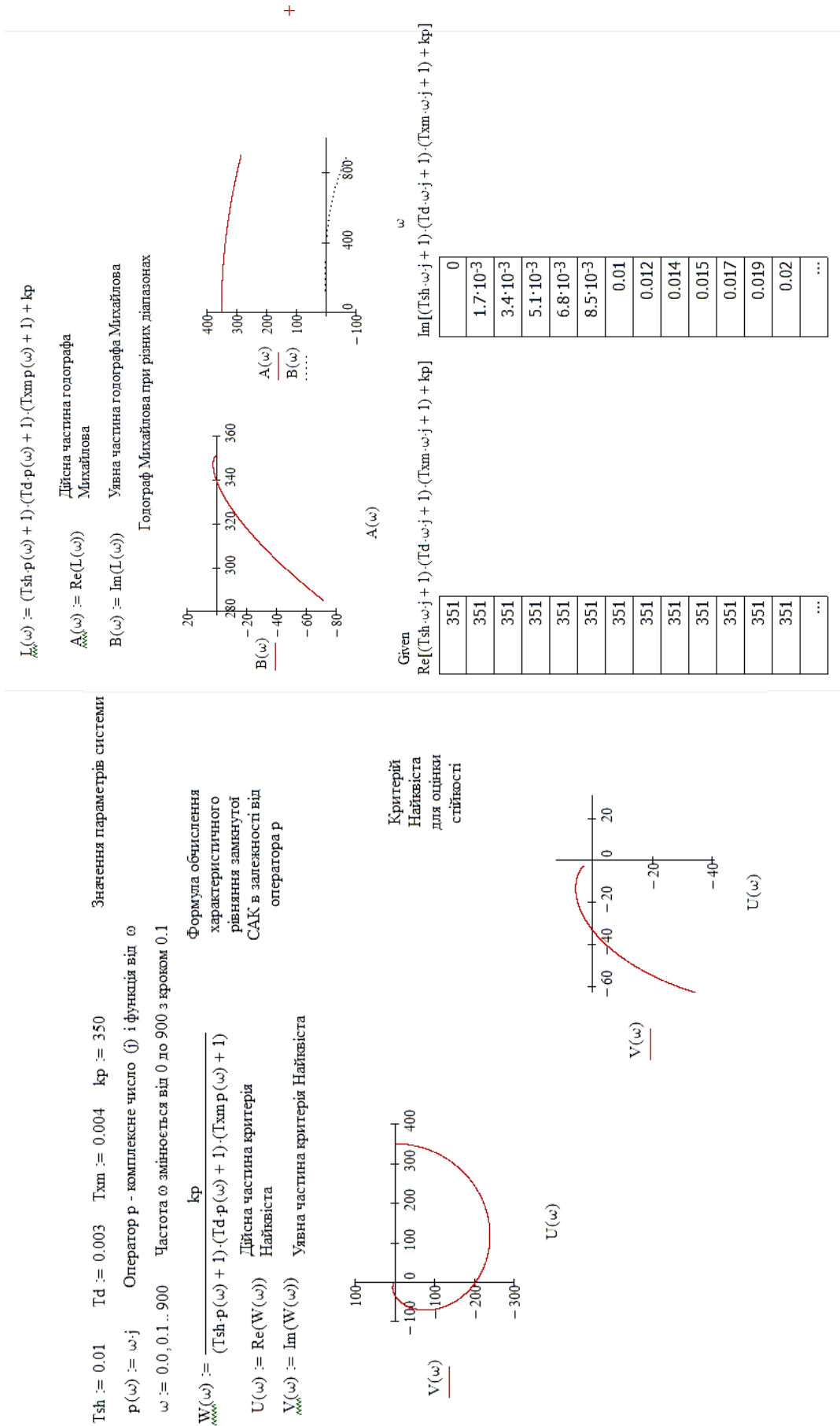


Рис. 7. Файл Mathcad для побудови голографа Михайлова та критерія Найквіста

2.1.3 використання програмного продукту MathCad [4]

Як приклад на рис. 7 наведено побудову такого годографа, з визначенням дійсної (Re) та уявної (Im) частин годографа Михайлова.

Система не стійка так як не виконуються умови стійкості, годограф обертається проти годинникової стрілки, але не проходить послідовно  $n$  квадрантів.

Критерій Найквіста застосуємо до АФХ розімкнутої системи на рис. 7. Характеристичне рівняння розімкнутої системи має один нульовий корінь. Тому АФХ розімкнутої системи при  $\omega = 0$  має  $A = \infty$ ,  $\varphi = -\pi/2$ . Довплюємо АФХ дугою  $\pi/2$  як на рис.7 і оцінюємо кут повороту вектора CN із зміною  $\omega$  від 0 до  $\infty$ . Він складе в нашому випадку 180 або  $\pi$ . Цей кут не дорівнює нулю, годограф охоплює точку  $\{-1; j0\}$  на комплексній площині, тому і з критерію Найквіста замкнута система буде нестійкою.

2.2 З використанням програмного середовища LabVIEW [5]

Для перевірки стійкості системи по критерію Найквіста напишемо програму в середовищі LabVIEW та використаємо наступне рівняння:

$$W^{Qoc}(p) = \frac{k_{ш}(T_{\delta} \cdot p + 1) \cdot (\tau_{хм} \cdot p + 1)}{[(\tau_{хм} \cdot p + 1) \cdot (T_{ш} \cdot p + 1) \cdot (T_{\delta} \cdot p + 1)] + k_p}, \quad (7)$$

де  $k_{ш}$  – коефіцієнт передачі шафи,  $k_{ш} = 0,7$  [град/Вм] [4].

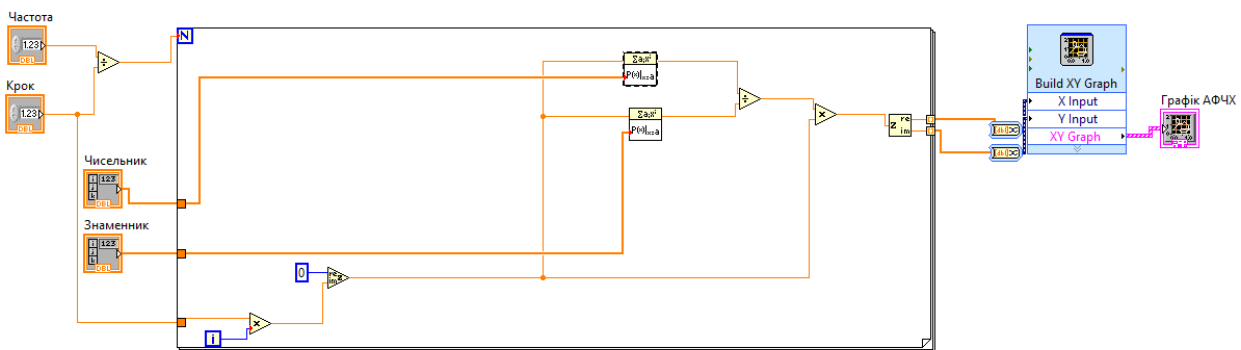


Рис. 8. Блок-схема програми для обранку стійкості САР

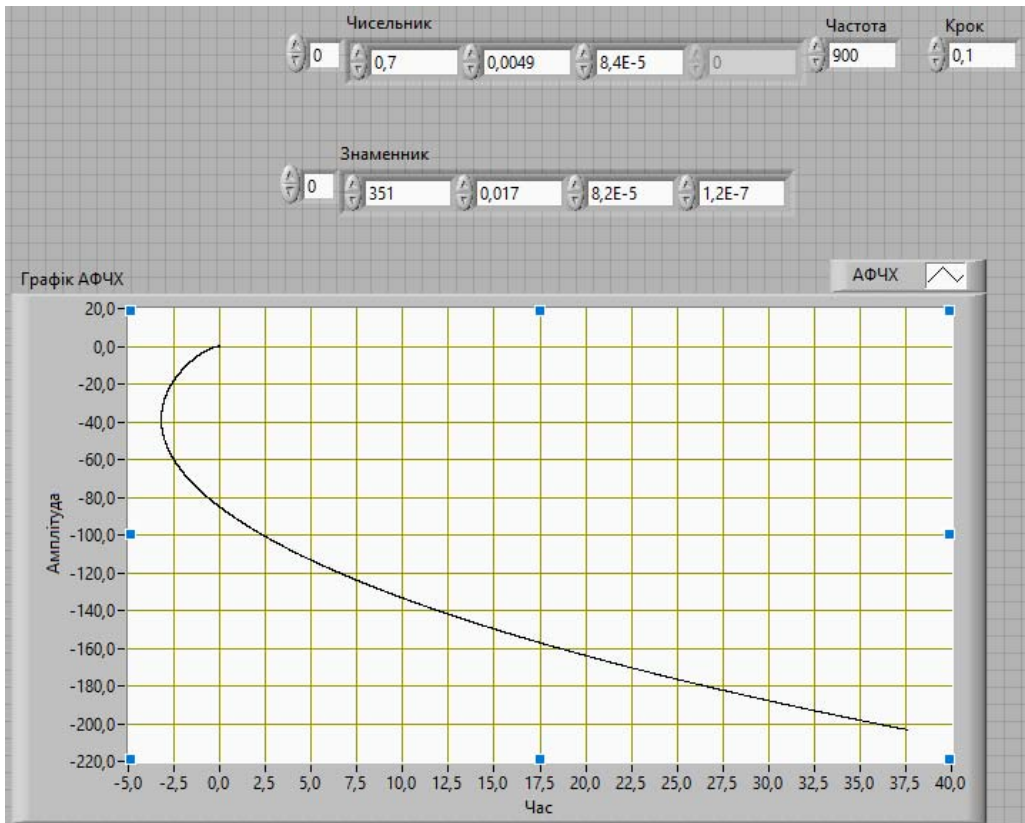


Рис. 9. Передня панель програми для обранку стійкості

Програма представляє собою циклічний блок з обмеженою кількістю ітерацій (яка вираховується з

показників критерію Найквіста частотою та кроком) та окремо коефіцієнти чисельника та знаменника у вигляді одновимірного масиву даних, котрі, в свою чергу, обраховуються за заданими в елементах обрахунку формулами. Елементи обрахунку представляють собою стандартні підпрограми поліноміальних обрахунків, в яких числа розкладаються в комплексному вигляді та після математичних дій розкладаються на дійсну та уявну частини, після чого по коефіцієнтам дійсної та уявної частини будується графік, що виводиться на лицюву панель.

АФЧХ розімкнутої системи обертається проти годинникової стрілки та не охоплює точку  $\{-1; j0\}$  на комплексній площині. Отже, замкнута система стійка.

### 2.3 З використанням програмного середовища MatLab [6]

Для одержання АФЧХ конкретної САР слід використовувати можливості програмування файлу-сценарію. Відповідний скрипт для файлу САР матиме наступний вигляд:

```
% Введення передаточних функцій блоків
W1=tf([0.000084 0.0049 0.7], [0.00000012 0.000082 0.017 351])
% Передаточна функція САР по задаючому впливу у мінімальній реалізації
Wekv= minreal(W1)
% Приведення передаточної функції до стандартної форми запису
[cisl,znam]=tfdata(Wekv,'v'); n=length(znam);
Wekv=tf(cisl/znam(n),znam/znam(n))
% Одержання значень W(jw) у вигляді одновимірного масиву при зміні частоти від 0.1 до 900 рад/с
w=linspace(0.1,900,400000); W=freqresp(Wekv,w); W=W(:);
% Побудова осей координат і АФЧХ із анімацією
plot(real(W),imag(W),'w'); xlabel('P(w)'); ylabel('jq(w)'); title('АФЧХ');
dx=1.1; x1=dx*min(real(W)); x2=dx*max(real(W)); y1=dx*min(imag(W));
y2=50;
line([x1 x2],[0 0],'Color','k','Linewidth',2); line([0 0],[y1 y2],'Color','k','Linewidth',2)
grid on; hold on; comet(real(W),imag(W),0);
plot(real(W),imag(W),'b','Linewidth',3)
```

Transfer function:

$$8.4e-005 s^2 + 0.0049 s + 0.7$$

---


$$1.2e-007 s^3 + 8.2e-005 s^2 + 0.017 s + 351$$

Transfer function:

$$700 s^2 + 4.083e004 s + 5.833e006$$

---


$$s^3 + 683.3 s^2 + 1.417e005 s + 2.925e009$$

Transfer function:

$$2.393e-007 s^2 + 1.396e-005 s + 0.001994$$

---


$$3.419e-010 s^3 + 2.336e-007 s^2 + 4.843e-005 s + 1$$

Тут функція  $\omega=linspace(a,b,n)$  формує лінійний масив рівновіддалених значень частоти розміру  $1 \times n$ , початковим і кінцевим елементами якого є точки  $a$  і  $b$ . Функція  $W=freqresp(sys,w)$  формує на сітці частот  $\omega$  тримірний масив значень функції комплексної змінної  $W(j\omega)$ . Це пов'язане з тим, що вона застосовна і для багатомірних моделей (з декількома входами і виходами),  $W(j\omega)$  яких представляє собою матрицю. Перші два індекси позначають рядок і стовпець у цій матриці, а третій – номер точки АФЧХ. Для системи з одним входом і одним виходом зручно перетворити тримірний масив в одновимірний командою  $W=W(:)$ . Функція *comet* служить для анімації представлення результатів розрахунків. Результуюча АФЧХ матиме вигляд, наведений на рис. 10.

АФЧХ замкнutoї системи обертається проти годинникової стрілки та не охоплює точку  $\{-1; j0\}$  на комплексній площині. Отже, замкнута система стійка.

Використавши рівняння (7) та розбивши його на дійсну та уявну частини отримаємо:

$$P(j\omega) = 0,000082\omega^2 + 351$$

$$Q(j\omega) = 0,00000012\omega^3 + 0,017\omega$$

Використовуючи вбудовану функцію plot() в MatLab побудуємо годограф Михайлова та визначимо стійкість системи:

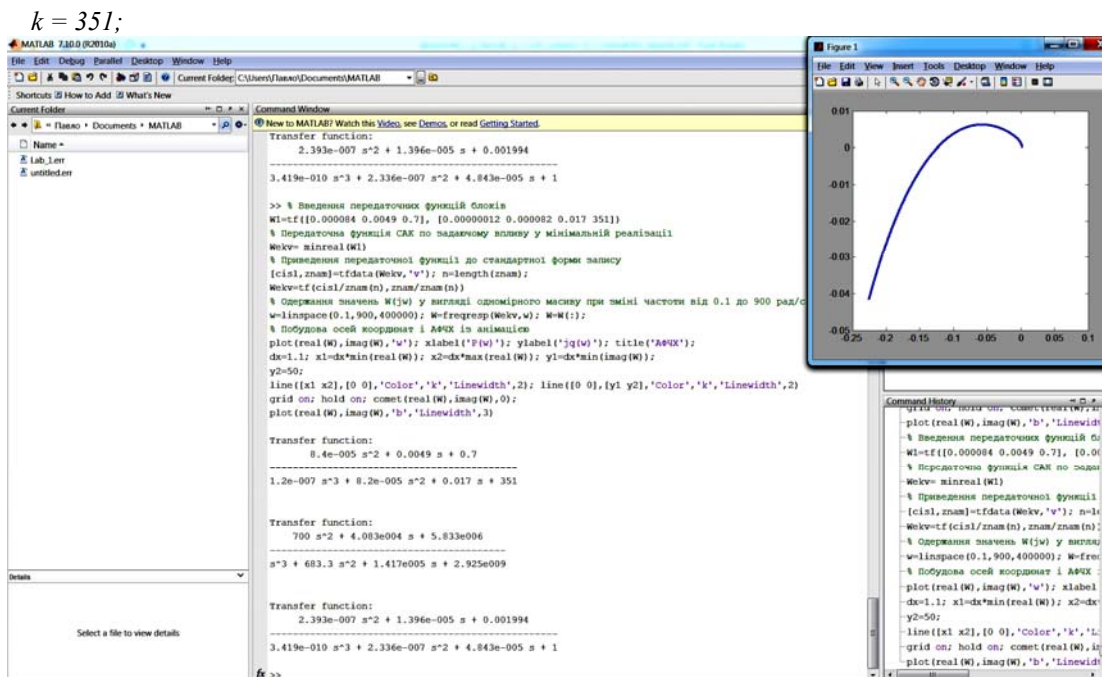


Рис. 10. АФЧХ САК, отримана після виконання файлу-сценарію

$$\begin{aligned}
 a1 &= 0.00000012; \\
 a2 &= 0.000082; \\
 a3 &= 0.017;
 \end{aligned}$$

```

for w=0:0.01:900,
    Njw= a1*((w*i)^3) + a2*((w*i)^2) + a3*(w*i) + k;
    Re = real(Njw);
    Im = imag(Njw);
    plot(Re, Im, 'x')
    hold on
end
hold off
grid on
axis([-20 360 -80 120])
    
```

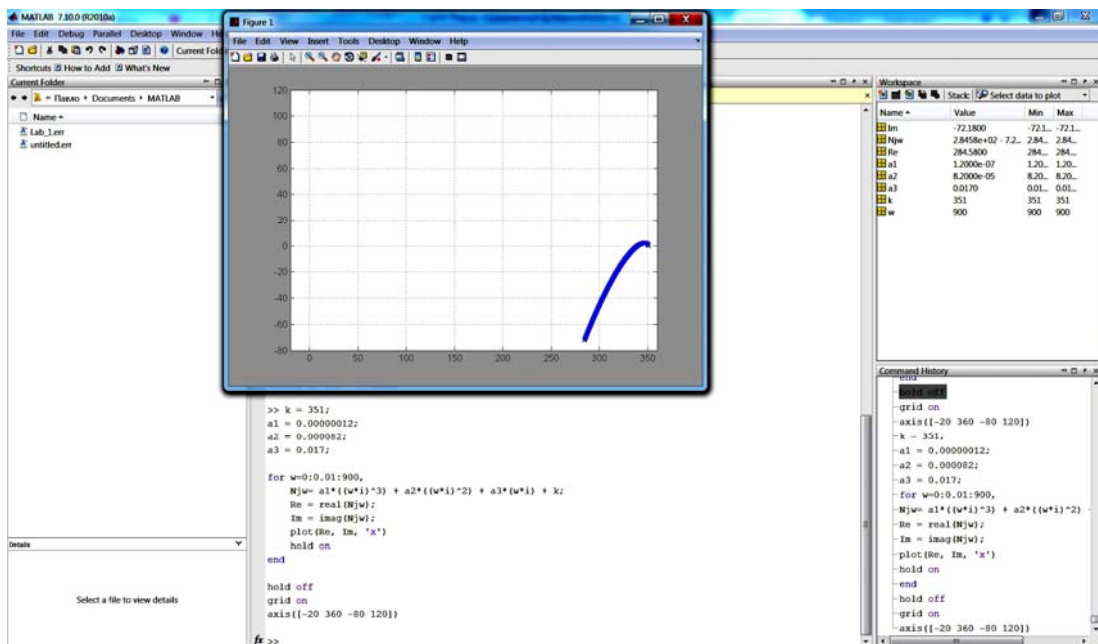


Рис. 11. Годограф Михайлова отриманий у програмному середовищі MatLab



Система не стійка так як не виконуються умови стійкості, годограф обертається проти годинникової стрілки, але не проходить послідовно  $n$  квадрантів.

### Висновки

Найпростішим, на наш погляд, є користування програмним продуктом MathCad, для якого необхідно знати лише передавальну функцію розімкнутої САР та значення коефіцієнтів. За допомогою вбудованих функцій програмний продукт MathCad самостійно знайде уявну та дійсну частини рівняння та побудує необхідні нам графічні залежності.

При використанні програмного середовища LabVIEW треба мати навички роботи з побудови блоксхем та користування циклами та математичними функціями, крім того запис коефіцієнтів потрібно виконувати в оберненому порядку. Визначити стійкість за критерієм Михайлова неможна через відсутність вбудованих функцій в програмному середовищі.

В програмному середовищі Matlab є необхідні вбудовані функції для обрахунку критерію Найквіста, але для знаходження критерію Михайлова програму необхідно писати повністю з нуля.

Аналіз САР різними способами показав, що використання програмних середовищ, типу LabVIEW, MathCad, Matlab, підвищує точність визначення стійкості систем. Проте вимагає не тільки знати основи програмування для написання необхідних файл-програм, але і володіти базовими знаннями із теорії автоматичного керування для того, щоб привести рівняння передавальної функції САР до необхідного програми виду.

### Література

1. Попович М.Г., Ковальчук О.В. Теорія автоматичного керування / Попович М.Г., Ковальчук О.В. – К. : Либідь, 1997. – 544 с.
2. Власов К.П. Теория автоматического управления : учебное пособие / Власов К.П. – Х. : Изд-во Гуманитарный центр, 2007. – 526 с.
3. Теорія автоматичного керування : конспект лекцій для студентів спеціальності „Обладнання легкої промисловості та побутового обслуговування” / Г.Ф. Воронін. – Хмельницький : ТУП, 2002. – 50 с.
4. Теорія автоматичного керування : лабораторний практикум для студентів спеціальностей „Обладнання легкої промисловості та побутового обслуговування” і „Електропобутова техніка”. Частина 1. «Аналіз лінійних систем автоматичного керування» / Г.Ф. Воронін, С.Л. Горященко. – Хмельницький : ТУП, 2003. – 60 с.
5. Васильев В.Г. LabVIEW для изучающих теорию автоматического управления : учебное пособие. / В.Г. Васильев. – Тверь, 2012. – 159 с.
6. Борисевич А.В. Теория автоматического управления: элементарное введение с применением MATLAB / Борисевич А.В. – СПб : Изд-во Политехн. ун-та, 2011. – 200 с.

### References

1. Popovych M.H., Koval'chuk O.V. Teoriya avtomatichnoho keruvannya. – K.: Lybid', 1997.– 544s.
2. Vlasov K.P. Teoriya avtomaticheskoho upravleniya. Uchebnoe posobie. - X.: Yzd-vo Humanytarnyy tsentr, 2007. - 526 s.
3. Teoriya avtomatichnoho keruvannya. Konspekt lektsiy dlya studentiv spetsial'nosti „Obladnannya lehkoyi promyslovosti ta pobutovoho obsluhovuvannya” / H.F.Voronin. – Khmel'nyts'kyu: TUP, 2002.– 50 s.
4. Teoriya avtomatichnoho keruvannya. Laboratornyy praktikum dlya studentiv spetsial'nostey „Obladnannya lehkoyi promyslovosti ta pobutovoho obsluhovuvannya” i „Elektropobutova tekhnika”. Chastyna 1. «Analiz liniynykh system avtomatichnoho keruvannya» / H.F. Voronin, S.L. Horyashchenko. – Khmel'nyts'kyu: TUP, 2003.– 60 s.
5. Vasy'ev V.H. LabVIEW dlya yzuchayushchykh teoryyu avtomaticheskoho upravleniya. Uchebnoe posobie. / V.H. Vasy'ev. - Tver', 2012. – 159 s.
6. Borysevych A.V. Teoriya avtomaticheskoho upravleniya: elementarnoe vvedeniye s prymeneniyem MATLAB. - SPb.: Yzd-vo Polytekh. un-ta, 2011. - 200 s.

Рецензія/Peer review : 04.11.2017 р.

Надрукована/Printed :05.12.2017 р.  
Рецензент: к.т.н., проф. Кармаліта А.К.