DOI 10.31891/2307-5732-2019-273-3-137-141
УДК 389:681.2

А.А. ВИШЕНСКИЙ
Национально-технический университет Украины «Киевский политехнический институт им. И. Сикорского»

О ПОГРЕШНОСТИ КОРРЕЛЯЦИОННОГО МЕТОДА ИЗМЕРЕНИЙ, ИСПОЛЬЗУЮЩЕГО ПСЕВДОСЛУЧАЙНЫЕ СИГНАЛЫ

Корреляционный метод определения характеристик динамических систем является весьма важным методом анализа, который рассматривается в статье. В частности, решается задача оценки погрешностей, которые возникают при его использовании. Исследован погрешности, обусловленные не идеальностью характеристик при идентификации случайного процесса. Решение этой задачи заключается в получении необходимых требований к генератору шума. В итоге получено количественное соотношение для каждого конкретного случая, оценивающее погрешность определения импульсной характеристики исследуемой системы.

Ключевые слова: корреляционный метод, корреляционная функция, М-последовательности, дискретизация спектра, уравнение Винера-Хопфа, свертка

ALEKSANDR ALEKSANDROVITSH VISHENSKIY
National Technical University of Ukraine "I. Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute"

ON THE ERROR OF THE CORRELATION METHOD OF MEASUREMENT USING A PUSH-SUCCESSIVE SIGNALS

Correlation method for determining the characteristics of dynamic systems is a very important method of analysis, which is considered in the article. In particular, the problem of estimating the errors that arise when using the correlation method is solved. The investigated errors due to non-ideal characteristics when identifying a random process. The solution to this problem is to obtain the necessary requirements for the noise generator. The initial premise of the stated material is an imitation of a random process using pseudo-random numerical M-sequences. The solution to this problem is to obtain the necessary requirements for the noise generator. The initial premise of the stated material is an imitation of a random process using pseudo-random numerical M-sequences. The use of these sequences causes specific errors of two types, among which there is an error due to the periodic repetition of sections in them. The second error is caused by the presence of a correlation between the elements of the sequence, i.e. it is actually due to the finite transmission bandwidth of the process. At a qualitative level, based on a priori information about the possible values of the parameters of the estimated impulse response of the system, the conditions that the test sequence of random numbers must satisfy are determined. The first such condition, which is determined, is that the period of repetition of sections of a sequence is obviously a larger integral, on which the impulse response is nonzero. The second is that the test sequence has a uniform portion of the energy spectrum, the width of which exceeds the frequency band with frequency characteristics other than zero. These conditions obtained on the basis of the physical meaning of the correlation method are approximate. As a result, a quantitative ratio, for each specific case, was obtained, evaluating the error in determining the impulse response of the system under study. Based on this assessment, it is easy to determine the required characteristics of the test sequence for practical purposes.

Keywords: correlation method, correlation function, M-sequences, spectrum discretization, Wiener-Hopf equation, convolution.

Введение

Корреляционный метод определения характеристик динамической системы является весьма эффективным. Эта особенность проявляется при идентификации физической системы путем определения ее импульсной переходной функции сигнала, который возбуждал бы систему почти также, как идеальный. В частности, при реализации корреляционного метода требуется случайный δ-коррелированный сигнал. Трудности использования физических генераторов белого шума в этом случае заставляют прибегать к применению тестовых псевдослучайных испытательных сигналов. Преимущественное распространение получили псевдослучайные последовательности максимальной длины (M-последовательности), генерируемые сдвиговыми регистрами [1]. Однако отличия их спектральных и статистических характеристик от белого шума приводят к искажениям при идентификации системы, которые необходимо оценить и уменьшить до требуемого предела путем надлежащего выбора параметров тестового сигнала. При этом имеют место два типа трудностей связанных с погрешностью периодичности последовательности (дискретизации спектра) и погрешностью отличия корреляционной функции тестового сигнала в пределах периода от идеальной δ-функции (погрешности «окраски» спектра).

Таким образом, возникает задача оценки погрешности корреляционного метода, обусловленной не идеальностью характеристик случайного процесса, используемого в практической метрологии. Решение этой задачи предлагается в настоящей работе.

1. Анализ возникающих погрешностей при использовании корреляционного метода.

Как уже отмечалось, использование корреляционного метода для определения характеристик динамической системы сопровождается двумя типами погрешностей. Известно, что этот метод основан на измерении импульсной переходной функции $h(\tau)$ с помощью подаваемого на коррелометр псевдослучайного цифрового сигнала с корреляционной функцией $R(\tau)$, имеющей период T. Как известно, взаимная корреляционная функция входного и выходного процессов связана с автокорреляционной функцией входного процесса уравнением Винера-Хопфа. Исходя из этого уравнения, оценку импульсной переходной характеристики получаем путем приравнивания ее к взаимно-корреляционной функции, которая имеет вид

$$\widetilde{h}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)R(t)dt. \quad (1)$$

Выполняя затем с (1) преобразование Фурье на основании теоремы о свертке, находим

$$\widetilde{H}(\omega) = H(\omega)\rho(\omega), \quad (2)$$

где $\widetilde{H}(\omega)$ – спектр сигнала на выходе устройства; $H(\omega)$ – частотная характеристика исследуемой системы; $\rho(\omega)$ – спектр мощности тест-сигнала. Таким образом, отличие $H(\omega)$ от частотной характеристики исследуемой системы определяется отличием $\rho(\omega)$ от единичной функции. Для тестового сигнала в виде *М*-последовательности такие отличия определяются двумя характерными особенностями $\rho(\omega)$, которые будут рассмотрены далее.

Раскладывая функцию $R(\tau)$ в ряд Фурье и подставляя ее в выражение для $\rho(\omega)$ как Фурье-образа функции $R(\tau)$, получаем

$$\rho(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n \delta(\omega - n\Omega), \Omega = \frac{1}{T}.$$

Тогда, использовав фильтрующее свойство δ-функции выражение (2) примет вид.

$$\widetilde{H}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n H(n\Omega)\delta(\omega - n\Omega). \quad (3)$$

И поскольку

$$R_n = \frac{1}{T}\rho_T(n\Omega),$$

где $\rho_T(\omega)$ – преобразование Фурье-функции

$$R_T(\tau) = \begin{cases} R(\tau); & 0 \le \tau \le T; \\ 0; & \tau > T, \end{cases}$$

то равенство (3) будет

$$\widetilde{H}(\omega) = H(\omega)\rho_T(\omega)S_\Omega(\omega). \quad (4)$$

В правой части этого равенства множитель $S_\Omega(\omega) = \Omega\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega - n\Omega)$, который называется функцией идеальной дискретизацией или функцией гребенки [2], обусловлен периодичностью $R(\tau)$.

На основании теоремы о свертке с учетом коммутативности свертки из (4) получим эквивалентное равенство во временной области

$$\widetilde{h}(\tau) = h(\tau) * R_T(\tau) * S_T(\tau) \quad (5)$$

Множитель $\rho_T(\omega)$, в правой части (4), определяет отличие одного импульса корреляционной функции от δ-функции и приводит к окраске спектра используемого текст-сигнала.

Таким образом, анализ погрешности корреляционного метода измерений при использовании псевдослучайных сигналов можно разделить на два этапа, учитывая, что в результирующем равенстве (4) оба этих фактора входят равноправно в виде независимых множителей.

1.1. Искажения дискретизации спектра.

Пусть $\rho_T \equiv 1$, тогда

$$\widetilde{H}(\omega) = H(\omega)S_\Omega(\omega) \quad (6)$$

Для анализа этого вида погрешности учтем, что преобразование Фурье-функции $S_\Omega(\omega)$ является также функцией гребенки [2]. Тогда

$$S_T(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\tau - nT) \quad (7)$$

Подставляя (7) в (5) с учетом (6), получим

$$\widetilde{h}(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(\tau - nT) \quad (8)$$

Таким образом, идеальная дискретизация спектра приводит к преобразованию повторения, заключающемуся в том, что в (8) функции $h(\tau - nT)$ при различных *n* могут перекрываться. Выделяя в (8) слагаемое, описывающее неискаженную характеристику, находим $\widetilde{h}(\tau) \equiv h(\tau + nT)$. В частности, для причинных линейных систем погрешность дискретизации тест-сигнала имеет вид

$$\delta_g(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} h(\tau + nT) \tag{9}$$

Это соотношение в принципе позволяет оценить необходимый период *М*-последовательности, при котором погрешность не превышает заданного значения. Так, например, аппроксимируя «хвосты» импульсной функции с временем реакции τ_0 экспоненциальной зависимости

$$h(\tau) \approx \exp(-\frac{\tau}{\tau_0})$$

из (9) получим $\delta_d(\tau) \approx \dfrac{[\exp(-\frac{\tau}{\tau_0})]}{[(\frac{T}{\tau_0}) - 1]}, 0 \le \tau \le T$, что обеспечивает во всей области наблюдения ошибку,

не превышающую значения $\delta_{\max} = \dfrac{1}{[\exp(\frac{T}{\tau_0}) - 1]}$, откуда находим необходимую оценку для периода *М* – последовательности равную $T \ge \tau_0 Ln(1 + \dfrac{1}{\delta_{d\max}})$.

1.2. Оценка погрешности идентификации, обусловленной неравномерностью спектра.

Из соображений о качестве ясно, что искажения, обусловленные неравномерностью спектра, тем меньше чем медленнее изменяется импульсный отклик исследуемой системы, т.е. чем уже ее полоса пропускания. Понятно также, что снижению этой погрешности будет способствовать уменьшение длительности импульсов генератора *М*-последовательности. Задача заключается в получении количественных соотношений между рассматриваемой погрешностью и указанными выше факторами.

Для оценки погрешности в определении $h(\tau)$, обусловленной неравномерностью спектральной плоскости $S_T(\omega)$ М-последовательности, будем считать, что погрешности дискретизации пренебрежимо малы, так что

$$\widetilde{H}(\omega) = S_T(\omega) H(\omega) \tag{10}$$

Используя явное выражение для автокорреляционной функции *М*-последовательности

$$R_T(\tau) = a^2 \begin{cases} 1 - \dfrac{|\tau|}{\theta}(1 + \dfrac{1}{N}); |\tau| \le \theta; \\ 1 - \dfrac{1}{N}; 0 \le |\tau| \le (N-1)\theta, \end{cases}$$

Непосредственным подсчетом получаем

$$S_T(\omega) = a^2((1 + \frac{1}{N})(\frac{2\sin\frac{\omega\theta}{2}}{\omega\theta})^2 - \frac{2\sin\frac{\omega T}{2}}{\omega T}), \tag{11}$$

где a^2 –амплитуда корреляционной функции; θ – период повторения тактовых импульсов; T=2^n -1 (*n* – число ячеек регистра сдвига).

Приравнивая мощность тестовой последовательности к единице

$$(\frac{N+1}{N} a^2 \theta = 1),$$

представляем равенство (10) в виде $\widetilde{H}(\omega) + \delta_c(\omega)$, где $\delta_c(\omega) = H(\omega)[S_T(\omega) - 1]$ – спектральная плотность эффективных аддитивных искажений.

Используя разложение в ряд Тейлора функции

$$\frac{\sin^2 x}{x^2}$$

в (11), получаем выражение для $\delta_c(\omega)$ в виде

$$\delta_c(\omega) \equiv \delta_c^1(\omega) + \delta_c^2(\omega) \tag{12}$$

Выполняя обратное преобразование Фурье, будем иметь

$$\delta_c(\tau) = \delta_c^1(\tau) + \delta_c^2(\omega) \tag{13}$$

Оценим каждое из слагаемых, используя (12) и учитывая соотношение

$$F^{-1}\left[\omega^{2n} H(\omega)\right] = (-1)^n \frac{d^{2n}}{d_{\tau^{2n}}} h\tau ,$$

находим

$$\delta_c^1(\tau) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \theta^{2n}}{(2n+2)!} \frac{d^{2n} h(\tau)}{d_{\tau^{2n}}} \tag{14}$$

Определяя норму погрешности $\delta_c^1(\tau)$ и учитывая неравенство Минковского, получаем оценку относительной погрешности

$$\frac{\left\|\delta_c^{(1)}(\tau)\right\|}{\left\|h(\tau)\right\|} \le 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta^{2n}}{(2n+2)!} \frac{\left\|h^{2n}(\tau)\right\|}{h(\tau)} \tag{15}$$

Соотношения (14), (15) подтверждают соображения о качестве, приведенные выше.

Для оценки вклада второго слагаемого в погрешность (13) заметим, что

$$\delta_c^2(\tau) = P(\tau, \frac{T}{2}) * h(\tau) ,$$

где

$$P(\tau, \frac{T}{2}) = \begin{cases} 1; |\tau| < \frac{T}{2}; \\ 0; |\tau| > \frac{T}{2}. \end{cases}$$

Таким образом,

$$\delta_c^{(2)}(\tau) = \frac{N}{2T(N+1)} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} h(\tau - t) dt . \tag{16}$$

Как видно из выражения (16), по характеру искажений это слагаемое определяет почти постоянную величину (при больших *T)* таких, что

$$T >> \frac{1}{\Delta\omega} ,$$

где $\Delta\omega$ – полоса пропускания исследуемой системы) добавку, которая может рассматриваться как систематическая погрешность для всего диапазона изменений аргумента τ. Действительно, в этом приближении и предположении о физической реализуемости системы (в частности абсолютной интегрируемости $h(\tau)$) найдем

$$\left|\delta_c^2\right|(\tau) < \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} \left|h(\tau)\right| dt = \frac{W}{2T} , \tag{17}$$

так что относительная погрешность

$$\frac{\left|\delta_c^2(\tau)\right|}{\left\|h(\tau)\right\|} < \frac{1}{2T} \frac{W}{\left\|h(\tau)\right\|} . \tag{18}$$

Таким образом, выражения (17), (18) устанавливают количественные соотношения между вторым слагаемым погрешности окраски спектра и периодом *М*-последовательности. Кроме того, по своему характеру это слагаемое, как уже отмечалось, близко к систематической постоянной погрешности и не играет большой роли в задачах идентификации характеристик линейных систем.

Выводы

Подытоживая изложенное в настоящей работе, отметим, что поставленная задача получения количественных соотношений, позволяющих в каждом конкретном случае оценить погрешности определения импульсной характеристики исследуемой системы, и, исходя из этих значений, определить требуемые характеристики тестовой последовательности, решена. Получены выражения, связывающие значения погрешности с параметрами системы.

Литература

1. Грановский В.А. Динамические измерения. Основы метрологического обеспечения / В.А. Грановский. – Л. : Энергоатомиздат, 1984. – 224 с.
2. Сороко Л.М. Основы голографии и когерентной оптики / Л.М. Сороко. – М. : «Наука» Главная редакция физико-математической литературы, 1971. – 616 с.

References

1. Granovskij V.A. Dinamicheskie izmereniya. Osnovy metrologicheskogo obespecheniya / V.A. Granovskij. – L. : Energoatomizdat, 1984. – 224 s.
2. Soroko L.M. Osnovy golografii i kogerentnoj optiki / L.M. Soroko. – M. : «Nauka» Glavnaya redakciya fiziko-matematicheskoj literatury, 1971. – 616 s.

Рецензія/Peer review : 2.5.2019 р. Надрукована/Printed : 2.6.2019 р.
Рецензент: д.т.н. Вышинский В.А.