

МОДЕЛЮВАННЯ ТА ПРОЕКТУВАННЯ ТЕХНІЧНИХ СИСТЕМ

DOI 10.31891/2307-5732-2021-297-3-208-215

УДК 519.688; 616-001.17

Ю. В. ШТЕФУРА

Київський національний університет технологій та дизайну

К. Л. ШЕВЧЕНКО, О. В. КОЗИР, О. В. СТАЦЕНКО

Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського"

**МОДЕЛЮВАННЯ РОЗПОДІЛУ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ
ПРИ ТЕРМІЧНИХ УРАЖЕННЯХ БІОЛОГІЧНИХ ТКАНИН**

Своєчасне визначення ступеня термічного ураження прискорює процес лікування і підвищує його ефективність. Ступінь термічного ураження можна оцінювати шляхом визначення різниці температур здорового і ураженого ділянок біологічної тканини. Для забезпечення можливості такої оцінки біологічна тканина представлена у вигляді багатощарової структури, на основі якої отримана модель стаціонарного теплового режиму фрагмента біологічної тканини у вигляді узагальненої теплової моделі і математичної моделі розподілу температурного поля у фрагменті. У статті описані принципи побудови математичної моделі розподілу температурного поля в зоні термічного ураження біологічної тканини в стаціонарному режимі. Дана модель дозволяє отримати числову оцінку різниці поверхневої температури здорових і уражених ділянок тканини і на її основі оцінювати ступінь термічного ураження.

Ключові слова: біологічна тканина, математична модель, розподіл температурного поля, ступінь термічного ураження.

Yu. V. SHTEFURA

Kyiv National University of Technologies and Design

K. L. SHEVCHENKO, O. V. KOZYR, O. V. STATSENKO

National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute"

MODELLING OF TEMPERATURE FIELD DISTRIBUTION IN BIOLOGICAL TISSUE THERMAL LESION

Early determination of the thermal lesion degree in case of scald accelerates the treatment process and increases its effectiveness. The thermal lesion degree can be evaluated by determining the temperature difference between healthy and injured areas of biological tissue. For this purpose, a model of biological tissue in the form of a multilayer structure can be used. Heat exchange processes in such a structure are described by a generalized thermal model. Such structure contains conditionally flat heat sources located in each layer, which have the form of a developed network of blood vessels. The considered model of biological tissue quite accurately describes the heat exchange processes in body tissues.

The article considers heat exchange processes that take place in biological tissue and a number of assumptions that should be used to mathematically describe these processes were identified. During the analysis of heat transfer process, the equations of temperature distribution in the tissue layers and the boundary conditions that describe the thermal interaction of the model with the environment are determined. As a result, the model of the stationary thermal regime of a biological tissue fragment in the form of a generalized thermal model and a mathematical model of the temperature field distribution in this fragment is obtained. This model is determined by many parameters, which are divided into 3 groups: thermophysical parameters; structural and topological parameters; parameters of the blood vascular system. Models of the particular fragment thermal regime are unequivocally determined by a combination of these parameters.

For the analysis of temperature in any point of biological tissue modelled part mathematical model of temperature field distribution in stationary mode was developed. This model allows reasonable approach to the thermal lesion degree evaluation on the basis of the surface temperature difference between healthy and injured areas of tissue.

Keywords: biological tissue, mathematical model, temperature field distribution, lesion degree evaluation.

Постановка проблеми

При впливі на біологічну тканину зовнішніх теплових полів та її нагріванні до температури вище 45°C утворюється термічна травма. Вона проявляється у руйнуванні шарів біологічної тканини як під час впливу травмуючого агенту, так і після його дії [1]. Ступінь термічної травми залежить від багатьох факторів, серед яких фізико-механічні параметри травмуючого агенту, тривалість контакту з біологічною тканиною, властивості біологічної тканини та ін. Особливістю глибоких термічних уражень є можливість значного поширення зони ураження вже після припинення контакту з травмуючим агентом [2]. Це суттєво ускладнює процес лікування та збільшує його тривалість. Тому важливим є своєчасне визначення ступеню термічного ураження та визначення правильної методики лікування.

Аналіз останніх джерел

Аналіз сучасного стану ситуації в області апаратного забезпечення оцінки термічних впливів на біологічні тканини свідчить про відсутність спеціалізованих засобів для визначення ступеню термічних уражень в Україні і за її межами. В той же час, роботи ряду авторів [3–5] свідчать про перспективність використання з цієї метою тепловізійних приладів. Можливість їх використання обумовлена тим, що при термічних ураженнях відбувається коагуляція кровоносних судин і припиняється або значно погіршується перфузія крові. Це, в свою чергу, призводить до припинення теплопередачі поверхневим шарам біологічної тканини, обумовленої саме перфузією крові, та відповідному зменшенню поверхневої температури

уражених ділянок біологічної тканини. Таким чином, існує можливість оцінювання ступеню термічних уражень шляхом визначення різниці температур здорової та ураженої ділянок біологічної тканини, але необхідним при цьому є отримання моделі розподілу температурного поля в області термічного ураження.

Метою роботи є отримання математичного опису розподілу температурного поля в зоні термічного ураження біологічної тканини в стаціонарному режимі, що дозволить отримати розв'язок задачі розподілу теплових полів у біологічній тканині, як складній біологічній структурі з можливістю подальшої чисельної оцінки та візуалізації при різних параметрах термічних уражень.

Виклад основного матеріалу

Фізичне представлення біологічної тканини. Відомо, що шкіряний покрив людини (а саме через нього у абсолютній більшості випадків відбувається вплив термічного агента) складається з декількох шарів, а саме епідермісу, дерми, гіподерми, жирових та м'яких тканин. Тому при моделюванні біологічна тканина може бути представлена у вигляді складної багатошарової структури, як показано на рис. 1.

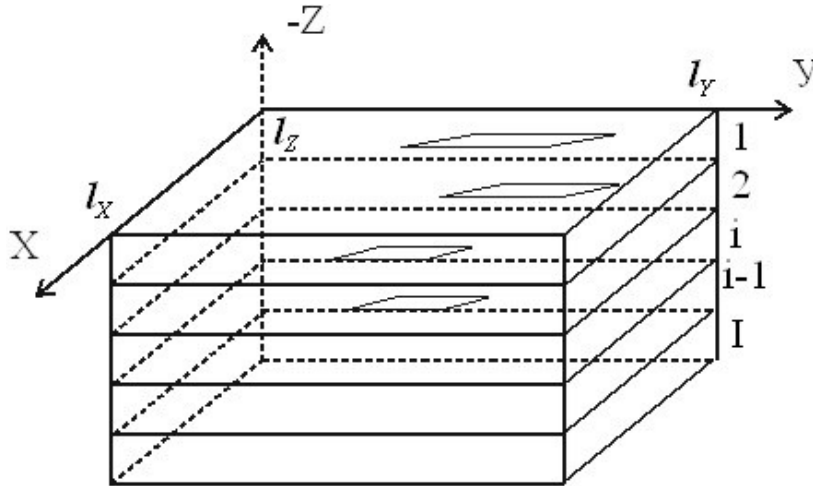


Рис. 1. Умовна структура біологічної тканини, як об'єкта моделювання (прямокутниками умовно показані джерела теплового випромінювання)

Всередині кожного шару розташовані джерела теплового випромінювання у вигляді розвиненої мережі кровоносних судин. Тепловий режим такої структури досить точно описується за допомогою узагальненої теплової моделі [6], в основі якої лежать процеси теплообміну в шаруватих структурах.

Припустимо, що фрагмент досліджуваного об'єкта являє собою паралелепіпед, який складається з I шарів, пронумерованих зверху вниз, з розташованими у кожному шарі умовно-плоскими джерелами тепла у вигляді розвиненої мережі кровоносних судин. Але, слід зазначити, що збільшення кількості врахованих в моделі шарів визначає в загальному випадку точність опису розподілу температури.

Беручи до уваги складність структури джерел тепла (кровоносних судин), в базову теплову модель [7] доцільно ввести умову розташування джерел тепла, які в кожному шарі моделі можуть бути розташовані як в середині кожного шару, так і на його поверхні.

В реальних умовах досліджувані фрагменти біологічної тканини можуть мати форму, відмінну від прямокутної, вони в загальному випадку можуть бути представлені у вигляді багатокутників або трикутників, що примикають до основної моделі. Для коректного математичного опису поширення тепла у фрагменті шкіряного покриву за аналогією з [8] введемо ряд припущень, які базуються на результатах аналізу особливостей структури біологічних тканин:

- поперечні розміри шарів моделі є однаковими;
- шари моделі знаходяться в тісному контакті, тобто тепловий контактний опір наближається до нуля;
- на верхньому шарі структури відбувається теплообмін з навколишнім середовищем за законом Ньютона;

- кожен шар моделі однорідний і ізотропний;
- теплофізичні характеристики матеріалу шарів моделі не залежать від температури.

При умові, що конвективна і радіаційна теплопередача на межах шарів моделі мала, тепло переноситься тільки за рахунок теплопровідності.

Нижня поверхня моделі, яка являє собою кісткову тканину, може вважатися ізотермічною і її температура збігається або близька до температури організму в цілому. В організмі людини це забезпечується наявністю постійного кровообігу неушкодженими ділянками тканини.

Необхідно зазначити, що деякі з припущень не є принциповими обмеженнями і використовуються з метою спрощення вирішення задачі без значної втрати точності.

Оскільки шари, що утворюють біологічну тканину, мають анізотропну теплопровідність, а їх теплофізичні характеристики в діапазоні температур 20–40 °С не залежить від температури, прийняті допущення не вносять значних похибок в побудову моделі.

Модель процесу теплопереносу у біологічній тканині. Поширення тепла в біологічних тканинах підкоряється закону Фур'є. Ґрунтуючись на цьому, стаціонарний розподіл температури у створюваній моделі можна описати диференціальним рівнянням другого порядку з частковими похідними і відповідними граничними умовами.

З метою спрощення рішення задачі розрахунку температурного поля введемо наступну систему координат таким чином, що:

$$T(x, y, z) = \begin{cases} T_1(x, y, z_1), 0 \leq x \leq l_x, 0 \leq y \leq l_y, 0 \leq z_1 \leq l_1, \\ T_2(x, y, z_2), 0 \leq x \leq l_x, 0 \leq y \leq l_y, 0 \leq z_2 \leq l_2, \\ \vdots \\ T_i(x, y, z_i), 0 \leq x \leq l_x, 0 \leq y \leq l_y, 0 \leq z_i \leq l_i, \\ \vdots \\ T_I(x, y, z_I), 0 \leq x \leq l_x, 0 \leq y \leq l_y, 0 \leq z_I \leq l_I \end{cases},$$

де l_x, l_y, l_z – відповідно ширина, довжина та товщина моделі; $l_z = \sum_{i=1}^I l_i$; l_i – товщина шару з номером i ; I – число шарів моделі; x, y, z – просторові змінні; $T(x, y, z)$ – значення температури в точці з координатами (x, y, z) .

Під координатою z маємо на увазі відстань від верхньої поверхні шару, до якого вона належить. У загальному випадку розподіл температури в кожному шарі моделі підпорядковується рівнянню Пуассона:

$$\Delta T_i(x, y, z_i) = -\frac{1}{\Delta \lambda_i} F_i(x, y, z_i), \tag{1}$$

де $\Delta T_i(x, y, z_i)$ – відхилення температури i -го шару моделі від температури середовища; $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа; $F_i(x, y, z_i)$ – об'ємна щільність потужності тепловиділення в i -му шарі, що визначається розташуванням, геометричними розмірами і станом кровоносних судин:

$$F_i(x, y, z_i) = \sum_{j=1}^{J_i} \frac{f_{ij}}{V_{ij}} g_j(x) g_j(y) g_j(z), \quad (i = \overline{1, I}), \tag{2}$$

де f_{ij} – значення потужності; $V_{ij} = \alpha_{ij} \cdot \beta_{ij} \cdot \delta_{ij}$ – об'єм; $\alpha_{ij}, \beta_{ij}, \delta_{ij}$ – відповідно ширина, довжина та товщина j -го джерела тепла, розташованого в i -му шарі; I_i – кількість джерел тепла в i -му шарі; $g_j(x), g_j(y), g_j(z)$ – координати функції, що приймають значення I в області j -го джерела та 0 поза ним.

З визначення функції $F_i(x, y, z_i)$ випливає, що при відсутності джерел тепла в i -му шарі $F_i = 0$. Це має місце при порушенні кровопостачання, викликаному некрозом тканин та тромбуванням судин внаслідок теплового впливу.

Сформуємо граничні умови, що визначають теплову взаємодію моделі з навколишнім середовищем.

Граничні умови верхньої і нижньої поверхні моделі мають вигляд:

$$\left(\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial z_1} - \alpha_1 T_1 \right)_{z_1=0} = -P_1(x, y), \tag{3}$$

$$\left(\lambda_I \frac{\partial T_I}{\partial z_I} - \alpha_2 T_I \right)_{z_I=l_I} = -P_{I+1}(x, y), \tag{4}$$

де α_1, α_2 – коефіцієнти тепловіддачі з верхньої і нижньої поверхні моделі відповідно; $P(x, y)$ – функція, що описує поверхневу щільність теплового потоку.

Значення функції $P(x, y)$ визначається аналогічно функції об'ємної щільності потужності тепловиділення $F_i(x, y, z_i)$:

$$P_i(x, y) = \sum_{r=1}^{R_i} \frac{P_{ir}}{S_{ir}} g_r(x) g_r(y), \tag{5}$$

де R_i – кількість джерел тепла, розташованих на поверхні i -го шару моделі.

У разі нормального кровообігу і його стаціонарному режимі можна знехтувати теплопередачею з бокових поверхонь моделі, тоді

$$\left. \frac{\partial T_i(x, y, z_i)}{\partial x} \right]_{x=0, l_x} = \left. \frac{\partial T_i(x, y, z_i)}{\partial y} \right]_{y=0, l_y} = 0. \quad (6)$$

При ідеальному тепловому контакті між шарами моделі, що має місце при непошкодженій структурі тканин і кровоносних судин, отримуємо:

$$T_i(x, y, z_i) \Big|_{z_i=l_i} = T_{i+1}(x, y, z_{i+1}) \Big|_{z_{i+1}=0}. \quad (7)$$

При ураженні структури тканини під дією теплового агента, або пошкодженні кровоносних судин, тепловий контакт між шарами порушується.

В цьому випадку

$$T_{I-1}(x, y, z_{I-1}) \Big|_{z_{I-1}=l_{I-1}} = T_I(x, y, z_I) \Big|_{z_I=0} + R_I^k \lambda_I \left. \frac{\partial T_I}{\partial z_I} \right]_{z_I=0}. \quad (8)$$

Оскільки теплові потоки в складній структурі в стаціонарному стані пов'язані, цю умову можна записати в наступному вигляді

$$\lambda_I \left. \frac{\partial T_i(x, y, z_i)}{\partial z_i} \right]_{z_i=l_i} - \left. \frac{\partial T_{i+1}(x, y, z_{i+1})}{\partial z_{i+1}} \right]_{z_{i+1}=0} = P_{i+1}(x, y). \quad (9)$$

Таким чином, математична модель стаціонарного теплового режиму фрагменту біологічної тканини організму людини може бути представлена узагальненою тепловою моделлю і математичною моделлю розподілу температурного поля у фрагменті. Така модель визначається безліччю параметрів, які можна розділити на 3 групи: теплофізичні параметри; структурно-топологічні параметри; параметри кровоносної системи. Розглянемо основні складові кожної з груп параметрів моделі.

Позначимо множину теплофізичних параметрів як Φ . До основних складових цієї множини можна віднести наступні показники: теплопровідність λ різних шарів моделі (підмножина Φ_λ); умови теплообміну з навколишнім середовищем або граничні умови (підмножина Φ_y); коефіцієнти тепловіддачі з граничних поверхонь (підмножина Φ_x); умови теплового контакту між різними шарами (підмножина Φ_k).

Основними складовими множини K структурно-топологічних параметрів будемо вважати наступні: об'ємно-масові характеристики поверхневих шарів організму людини (підмножина K_T); параметри шарів просторової структури (підмножина K_c); топологічні параметри кровоносних судин, які є елементами тепловиділення (підмножина K_e).

До третьої групи безлічі параметрів кровоносної системи E з урахуванням розмірів кровоносних судин і особливостей їх тепловиділення віднесемо наступні складові: параметри тепловиділення периферійних, найбільш дрібних кровоносних судин, які можна віднести до джерел поверхневого тепловиділення (підмножина E_f); параметри тепловиділення кровоносних судин середнього розміру, які можна віднести до джерел об'ємного тепловиділення (підмножина E_p).

З урахуванням запропонованого розподілу параметрів можна стверджувати наступне:

– якщо $M = \{m\}$ – безліч математичних моделей стаціонарного теплового режиму всіх можливих фрагментів шкіряного покриву людини, то кожна з моделей $m \in M$ теплового режиму конкретного фрагмента однозначно визначається комбінацією параметрів H :

$$H = \Phi \cdot K \cdot E. \quad (10)$$

При цьому, якщо позначити $\Omega = \{T\}$ безліч об'ємних температурних полів всіх можливих фрагментів покривної тканини, існує взаємно однозначна відповідність:

$$M \sim \Omega.$$

Кожен елемент множини $T \in \Omega$ – об'ємна термограма конкретного фрагменту поверхневої тканини буде визначатися наступним чином:

$$T = \{T(x, y, z), 0 \leq x \leq l_x, 0 \leq y \leq l_y, 0 \leq z \leq l_z\}, \quad (11)$$

де $T(x, y, z)$ – значення температури в точці; l_x, l_y, l_z – відповідно ширина, довжина і товщина фрагменту поверхневої тканини.

Розглянемо задачу побудови об'ємної термограми T досліджуваного фрагмента біологічної тканини.

Модель стаціонарного теплового поля біологічної тканини. Якщо модель нестаціонарного теплового режиму фрагменту тканини повністю визначена, об'ємна термограма T цього фрагмента може бути побудована шляхом вирішення граничної задачі теплопровідності з використанням отриманих вище рівнянь. За допомогою методу інтегральних перетворень Фур'є побудуємо розв'язання даної задачі у вигляді подвійного ряду Фур'є за власними функціями відповідного плоского однорідного середовища:

$$\Delta \psi(x, y) = 0, \tag{12}$$

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|_{x=0, l_x} = \left. \frac{\partial \psi}{\partial y} \right|_{y=0, l_y} = 0. \tag{13}$$

Власні функції даної задачі визначаються як:

$$\psi_{nm}(x, y) = \psi_n(x) \cdot \psi_m(y) = \cos \frac{n\pi x}{l_x} \cdot \cos \frac{m\pi y}{l_y}, \tag{14}$$

з нормою

$$\|\psi_{nm}(x, y)\|^2 = \frac{(\delta_{n0} + 1) \cdot l_x}{2} \cdot \frac{(\delta_{m0} + 1) \cdot l_y}{2}, \tag{15}$$

де $n, m \geq 0$, δ_{n0} , δ_{m0} – дельта-функції Кронекера [9].

З огляду на це, рішення задачі побудови об'ємної термограми можна представити в наступному вигляді:

$$T_I(x, y, z_i) = T_{cp} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} T_{i,n,m}(z_i) \cdot \psi_{n,m}(x, y), \tag{16}$$

де $T_{i,n,m}(z_i)$ – рішення звичайного диференціального рівняння другого порядку

$$\frac{d^2 T_{i,n,m}}{dz_i^2} - \gamma_{nm}^2 T_{i,n,m} = -\frac{1}{\lambda_i} F_{i,n,m}(z_i), \tag{17}$$

яке задовольняє граничним умовам:

$$\left(\lambda_1 \frac{dT_{1,n,m}}{dz_1} - \alpha_1 T_{1,n,m} \right)_{z_1=0} = -P_{i,n,m}, \tag{18}$$

$$\left(\lambda_I \frac{dT_{I,n,m}}{dz_I} - \alpha_I T_{I,n,m} \right)_{z_I=0} = -P_{i,n,m}; \tag{19}$$

$$T_{i,n,m} \Big|_{z_i=l_i} - T_{i+1,n,m} \Big|_{z_i=l_i} = 0, \quad (i = \overline{1, I-1}); \tag{20}$$

$$\lambda_1 \frac{dT_{i,n,m}}{dz_i} \Big|_{z_i=l_i} - \lambda_{i+1} \frac{dT_{i+1,n,m}}{dz_{i+1}} \Big|_{z_{i+1}=0} = P_{i+1,n,m}, \quad (i = \overline{1, I-1}). \tag{21}$$

У рівняннях (17) – (21) $F_{i,n,m}$ и $P_{i,n,m}$ – Фур'є зображення функцій $F_i(x, y, z_i)$ та $P_i(x, y)$:

$$F_{i,n,m}(z_i) = \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} F_i(x, y, z_i) \psi_{n,m}(x, y) \|\psi_{n,m}\|^2 dx dy, \tag{22}$$

$$P_{i,n,m}(z_i) = \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} P_i(x, y, z_i) \psi_{n,m}(x, y) \|\psi_{n,m}\|^2 dx dy, \tag{23}$$

а значення $\gamma_{n,m}^2$ визначається співвідношенням:

$$\gamma_{n,m}^2 = \left(\frac{n\pi}{l_x} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{l_y} \right)^2. \tag{24}$$

Відповідно до формули Коші спільне рішення неоднорідного диференціального рівняння (17) при $n = m = 0$ визначається виразом:

$$T_{i,00}(z_i) = A_{i,00} + B_{i,00} z_i - \frac{1}{\lambda_i} \int_0^{z_i} (z_i - \xi) F_{i,00}(\xi) d\xi, \tag{25}$$

де $A_{i,00}$, $B_{i,00}$ – довільні постійні.

Коли m та n не дорівнюють нулю, рішення (17) має вигляд:

$$T_{inn}(z_i) = A_{inn} ch\gamma_{nm}(z_i) + B_{inn} ch(z_i) - \frac{1}{\lambda_i \gamma_{nm}} \int F_{inn}(\xi) sh\gamma_{nm}(z_i - \xi) d\xi, \quad (26)$$

де A_{inn} , B_{inn} – довільні постійні.

Для визначення постійних A_{inn} , B_{inn} складемо систему алгебраїчних рівнянь, використовуючи граничні умови (18) – (21) та запишемо їх у матричній формі:

$$D(n, m) \cdot C(n, m) = \Phi(n, m), \quad (27)$$

Матриця $D(n, m)$ визначається наступним чином:

$$D(nm) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & -\lambda_1 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & . & . \\ 1 & l_1 & -1 & 0 & 0 & . & . & . & . & . \\ 0 & \lambda_1 & 0 & -\lambda_2 & 0 & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 1 & l_2 & -1 & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & \lambda_{I-1} & 0 & -\lambda_I & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & 0 & \alpha_2 & \lambda_I - \alpha_2 l_I & . \end{pmatrix}; \quad (28)$$

$$D(nm) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & -\lambda_1 \gamma_{nm} & 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 & 0 & 0 \\ ch\gamma_{nm} l_1 & sh\gamma_{nm} l_1 & -1 & 0 & 0 & . & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_1 sh\gamma_{nm} l_1 & \lambda_1 ch\gamma_{nm} l_1 & 0 & -\lambda_2 & 0 & . & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ch\gamma_{nm} l_2 & sh\gamma_{nm} l_2 & -1 & . & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & 0 & \lambda_1 \gamma_{nm} sh\gamma_{nm} l_I + \alpha_2 ch\gamma_{nm} l_I & \lambda_1 \gamma_{nm} ch\gamma_{nm} l_I + \alpha_2 sh\gamma_{nm} l_I & . \end{pmatrix}. \quad (29)$$

У виразі (27) $C(n, m)$ та $\Phi(n, m)$ – це матриці-стовпці невідомих коефіцієнтів A_{inn} , B_{inn} , а також вільних членів Φ_{inn} :

$$C(n, m) = (A_{1nm}, B_{1nm}, A_{2nm}, B_{2nm}, \dots, A_{Inm}, B_{Inm})^T, \quad (30)$$

$$\Phi(n, m) = (\Phi_{1nm}, \Phi_{2nm}, \dots, \Phi_{(2I-1)nm}, \Phi_{2Inm})^T. \quad (31)$$

Елементи матриць-стовпців Φ_{inn} ($i = \overline{1, 2I}$); ($n, m = 0, 1, 2, 3, \dots$) розраховуються за формулами, отриманими при задоволенні граничних умов (18) – (21):

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{1nm} &= P_{1,n,m}, \\ \Phi_{2i,0,0} &= \frac{l_i^2}{2\lambda_i} F_{i,0,0}, (i = \overline{1, I-1}), \\ \Phi_{(2i+1),0,0} &= P_{(i+1),0,0} + F_{i,0,0} l_i, (i = \overline{1, I-1}), \\ \Phi_{2i,0,0} &= P_{(i+1),0,0} + F_{i,0,0} l_i + \frac{\alpha_2 l_I^2}{2\lambda_i} F_{I,0,0}, \\ \Phi_{2i,n,m} &= \frac{F_{i,n,m}}{\lambda_i \gamma_{nm}^2} (ch\gamma_{nm} l_i - 1) = \frac{sh^2 \gamma_{nm} l_i}{\lambda_i \gamma_{nm}^2} - F_{i,n,m}, \\ \Phi_{(2i+1),n,m} &= \frac{P_{i,n,m}}{\gamma_{nm}} + \frac{F_{i,n,m}}{\gamma_{nm}^2} sh\gamma_{nm} l_i, (i = \overline{1, I-1}), \\ \Phi_{(2i+1),n,m} &= P_{(I+1),n,m} + \frac{F_{i,n,m}}{\gamma_{nm}} sh\gamma_{nm} l_I + \frac{\alpha_2}{\lambda_i \gamma_{nm}^2} ch\gamma_{nm} l_{I-1} F_{i,n,m} \end{aligned} \right\}, \quad (32)$$

Фур'є-зображення P_{inn} та F_{inn} функцій P_i та F_i визначаються формулами:

$$\left. \begin{aligned} P_{i00} &= \sum_{r=1}^{R_i} \frac{P_{ir}}{l_x l_y}; \\ P_{in0} &= \frac{4}{n\pi l_y} \sum_{r=1}^{R_i} \frac{P_{ir}}{\alpha_{ir}} \cos \frac{n\pi x_{ir}}{l_x} \sin \frac{n\pi \alpha_{ir}}{2l_x}; \\ P_{i0m} &= \frac{4}{m\pi l_x} \sum_{r=1}^{R_i} \frac{P_{ir}}{\beta_{ir}} \cos \frac{m\pi y_{ir}}{l_y} \sin \frac{m\pi \beta_{ir}}{2l_y}; \\ P_{inm} &= \frac{16}{nm\pi^2} \sum_{r=1}^{R_i} \frac{P_{ir}}{\alpha_{ir} \beta_{ir}} \cos \frac{n\pi x_{ir}}{l_x} \sin \frac{n\pi \alpha_{ir}}{2l_x} \cos \frac{m\pi y_{ir}}{l_y} \sin \frac{m\pi \beta_{ir}}{2l_y}; \end{aligned} \right\}, \quad (33)$$

де x_{ir}, y_{ir} – координати r -го джерела теплового випромінювання, розташованого в площині i -го шару моделі.

$$\left. \begin{aligned} F_{i00} &= \sum_{j=1}^{J_i} \frac{f_{ij}}{\delta_{ij} l_x l_y}; \\ F_{in0} &= \frac{4}{n\pi l_y} \sum_{j=1}^{J_i} \frac{f_{ij}}{\alpha_{ij} \delta_{ij}} \cos \frac{n\pi x_{ij}}{l_x} \sin \frac{n\pi \alpha_{ij}}{2l_x}; \\ F_{i0m} &= \frac{4}{m\pi l_x} \sum_{j=1}^{J_i} \frac{f_{ij}}{\beta_{ij} \delta_{ij}} \cos \frac{m\pi y_{ij}}{l_y} \sin \frac{m\pi \beta_{ij}}{2l_y}; \\ F_{inm} &= \frac{16}{nm\pi^2} \sum_{j=1}^{J_i} \frac{f_{ij}}{\nu_{ij}} \cos \frac{n\pi x_{ij}}{l_x} \sin \frac{n\pi \alpha_{ij}}{2l_x} \cos \frac{m\pi y_{ij}}{l_y} \sin \frac{m\pi \beta_{ij}}{2l_y}; \end{aligned} \right\}, \quad (34)$$

де x_{ij}, y_{ij} – координати j -го об'ємного джерела випромінювання, розташованого в i -му шарі моделі.

Використовуючи визначення зворотної матриці, перепишемо рівняння (25) та (26) в наступному вигляді:

$$T_{i00}(z_i) = \sum_{S=1}^{2i} g_{(2i-1),S}^{00} \Phi_{S,00} + z_i \sum_{S=1}^{2i} g_{2i,S}^{00} \Phi_{S,00} - \frac{1}{\lambda_i} \int_0^{z_i} (z_i - \xi) F_{i00}(\xi) d\xi, \quad (35)$$

$$\begin{aligned} T_{inm} &= ch\gamma_{nm} z_i \sum_{S=1}^{2i} g_{(2i-1),S}^{00} \Phi_{Snm} + sh\gamma_{nm} z_i \sum_{S=1}^{2i} g_{2i,S}^{00} \Phi_{Snm} - \\ &- \frac{1}{\lambda_i \gamma_{nm}} \int_0^{z_i} F_{inm}(\xi) sh\gamma_{nm}(z_i - \xi) d\xi \end{aligned}, \quad (36)$$

де $g_{K,S}^{n,m}$, ($K, S = 1, 2I; n, m = 0, 1, 2, \dots$) – елементи зворотних матриць

$$G(n, m) = D^{-1}(n, m). \quad (37)$$

Отримані в результаті перетворень вирази визначають всі коефіцієнти ряду. Це свідчить про те, що в аналітичному вигляді отримано рішення граничної задачі теплопровідності. На його основі можна визначити значення температури у будь-якій точці модельованого фрагменту біологічної тканини

$$T = \left\{ T_i(x, y, z), i = \overline{1, I}; 0 \leq xl_x; 0 \leq yl_y; l_{i-1} \leq z_i \leq l_i; \sum_{i=1}^I l_i = l_z \right\}. \quad (38)$$

Висновки

Отримана математична модель розподілу температурного поля дозволяє отримати чисельні значення температури в модельованому об'ємі біологічної тканини як за умов нормального кровообігу, так і при його порушенні внаслідок термічного ураження. Це, в свою чергу, дозволяє візуалізувати розподіл температурного поля в досліджуваному фрагменті біологічної тканини як по об'єму, так і на його поверхні та здійснити оцінку різниці поверхневої температури здорових та уражених ділянок тканини від ступеню термічного ураження.

Література

1. Термические и химические повреждения. Электротравма : учебное пособие для студентов, врачей интернов, клинических ординаторов, работников практического здравоохранения / [Лаврешин П.М., Владимиров О.В., Гобеджишвили В.К. и др.]. – Ставрополь : Изд-во СтГМУ, 2017. – 144 с.
2. Ожоговый шок : моногр. / [В. П. Шано, В. К. Гринь, Э. Я. Фисталь, О. И. Миминошвили, Ю. В. Заяц] ; Ин-т неотлож. и восстанов. хирургии им. В.К. Гусака АМН Украины, Донец. гос. мед. ун-т им. М. Горького. – Донецк : Юго-Восток, 2006. – 175 с.
3. Ніколаєва К. Д. Інформаційно-вимірвальна система оцінки характеристик опіків на базі технологій штучного інтелекту / К. Д. Ніколаєва, Ю. В. Штефура // Матеріали XIX міжнар. наук.-техн. конференції «Вимірвальна та обчислювальна техніка у технологічних процесах». – Одеса, 14-17 червня, 2019. – С. 45-46.
4. Медицинское тепловидение : учебное пособие / [Ачкасов Е.Е., Воловик М.Г., Долгов И.М., Колесов С.Н.]. – М. : ИНФРА-М, 2019. 218 с., илл. – (Серия «Высшее образование. Специалитет»). – ISBN: 978-5-16-015293-6. www.dx.doi.org/10.12737/textbook_5ce64de5707d59.18786697.
5. Патент РФ № 2339300. Способ диагностики глубины ожоговой раны (с помощью тепловизионного исследования) / Кислицин П.В., Аминев В.А., Прилучный М.А., Колесов С.Н. – Оpubл. 27.11.2008, бюл. 22.
6. Огороднейчук И.Ф. Расчет температурного поля в слоистой среде с тепловыделяющими источниками, расположенными между двумя слоями / И.Ф. Огороднейчук, М.Я. Житомирский, В.В. Семенец // Автоматизация проектирования в электронике. – К. : Техніка, 1983. – Вып. 27. – С. 129–135.
7. Власов В.А. Аналитический расчет температурных полей твердых схем в статическом режиме / В.А. Власов, П.И. Попов // Изв. Вузov СССР. Радиоэлектроника. – 1968. – № 7. – С. 775–779.
8. Закс Д.И. Параметры теплового режима полупроводниковых микросхем / Закс Д.И. – М. : Радио и связь, 1983. – 128 с.
9. Медведев Б. В. Начала теоретической физики. Механика, теория поля, элементы квантовой механики / Медведев Б. В. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2007. – С. 186.

References

1. Termicheskie i himicheskie povrezhdeniya. Elektrotravma : uchebnoe posobie dlya studentov, vrachej internov, klinicheskikh ordinatov, rabotnikov prakticheskogo zdoravoohraneniya / [Lavreshin P.M., Vladimirova O.V., Gobedzhishvili V.K. i dr.]. – Stavropol : Izd-vo StGMU, 2017. – 144 s.
2. Ozhogovyy shok : monogr. / [V. P. Shano, V. K. Grin, E. Ya. Fistol, O. I. Miminoshvili, Yu. V. Zayac] ; In-t neotlozh. i vosstanov. hirurgii im. V.K. Gusaka AMN Ukrainy, Donec. gos. med. un-t im. M. Gorkogo. – Donec : Yugo-Vostok, 2006. – 175 s.
3. Nikolaieva K. D. Informatsiino-vymiriuvalna sistema otsinky kharakterystyk opikov na bazi tekhnologii shtuchnoho intelektu / K. D. Nikolaieva, Yu. V. Shtefura // Materialy KhIKh mizhnarodnoi naukovо-tekhnichnoi konferentsii «Vymiriuvalna ta obchysliuvalna tekhnika u tekhnolohichnykh protsesakh». – Odesa, 14-17 chervnia, 2019. – S. 45-46.
4. Medicinskoe teplovidenie : uchebnoe posobie / [Achkasov E.E., Volovik M.G., Dolgov I.M., Kolesov S.N.]. – M. : INFRA-M, 2019. 218 s., ill. – (Seriya «Vyshee obrazovanie. Specialitet»). – ISBN: 978-5-16-015293-6. www.dx.doi.org/10.12737/textbook_5ce64de5707d59.18786697.
5. Patent RF № 2339300. Sposob diagnostiki glubiny ozhogovoy rany (s pomoshyu teplovizionnogo issledovaniya) / Kislicin P.V., Aminev V.A., Priluchnyj M.A., Kolesov S.N. – Opubl. 27.11.2008, byul. 22.
6. Ogorodnejchuk I.F. Raschet temperaturnogo polya v sloistoy srede s teplovydelyayushimi istochnikami, raspolozhennymi mezhdvu dvumya sloyami / I.F. Ogorodnejchuk, M.Ya. Zhitomirskij, V.V. Semenec // Avtomatizaciya proektirovaniya v elektronike. – K. : Tehnika, 1983. – Vyp. 27. – S. 129–135.
7. Vlasov V.A. Analiticheskij raschet temperaturnyh polej tverdyyh shem v staticheskom rezhime / V.A. Vlasov, P.I. Popov // Izv. Vuzov SSSR. Radioelektronika. – 1968. – № 7. – S. 775–779.
8. Zaks D.I. Parametry teplovogo rezhima poluprovodnikovyyh mikroshem / Zaks D.I. – M. : Radio i svyaz, 1983. – 128 s.
9. Medvedev B. V. Nachala teoreticheskoy fiziki. Mehanika, teoriya polya, elementy kvantovoy mehaniki / Medvedev B. V. – M. : FIZMATLIT, 2007. – S. 186.

Ю. В. ШТЕФУРА
К. Л. ШЕВЧЕНКО
О. В. КОЗИР
О. В. СТАЦЕНКО

ORCID ID: 0000-0002-7222-9352
 ORCID ID: 0000-0002-9285-5940
 ORCID ID: 0000-0001-8730-2789

yuliosa@gmail.com
 k.shevchenko@kpi.ua
 oleg.kozyr@aer.kpi.ua
 o.statsenko@kpi.ua

Рецензія/Peer review : 17.05.2021 р.

Надрукована/Printed : 30.06.2021 р.