УДК 330.101: 542.075.8

М.В. Бойчук, к.ф.-м.н.,
Чернівецький національний університет ім. Ю. Федьковича,
А.Р. Семчук,к. ф.-м. н.,
Чернівецький торговельно-економічний інститут КНТЕУ,
м. Чернівці

МОДЕЛЮВАННЯ ОДНОПРОДУКТОВОЇ МАКРОЕКОНОМІКИ ЗРОСТАННЯ З ЕНДОГЕННИМ ТЕХНІЧНИМ ПРОГРЕСОМ З УРАХУВАННЯМ СПОЖИВАННЯ

Анотація

Запропонована модель однопродуктової економіки зростання з ендогенним технічним прогресом з урахуванням споживання. В економіко-математичній моделі враховано, що кінцевий випуск продукції використовується на споживання, капіталовкладення в розширення основних фондів, покращення виробництва з урахуванням ефективності затрат "на науку", оподаткування, урядові витрати, сальдо та на боротьбу із забрудненням навколишнього середовища. Ця модель враховує вплив наукових досліджень на економічне виробництво у самій системі, тобто цей вплив є ендогенною змінною.

При дослідженні запропонованої економіко-математичної моделі побудовано алгоритм розрахунку оптимального процесу при виборі економічного режиму серед крайових режимів на початковій стадії, а також алгоритм розрахунку оптимального процесу при виборі економічного режиму серед магістральних режимів на початковій стадії.

Ключові слова: ендогенний технічний прогрес, крайовий процес, магістральний процес, момент перемикання керування, оптимальний процес.

М.В. Бойчук, к.ф.-м.н.,
Черновицкий национальный университет им. Ю. Федьковича,
А.Р. Семчук, к.ф.-м.н.,
Черновицкий торгово-экономический институт КНТЭУ,
г. Черновцы

МОДЕЛИРОВАНИЕ ОДНОПРОДУКТОВОЙ МАКРОЭКОНОМИКИ РОСТА С ЭНДОГЕННЫМ ТЕХНИЧЕСКИМ ПРОГРЕССОМ С УЧЕТОМ ПОТРЕБЛЕНИЯ

Аннотация

Предложена модель однопродуктовой экономики роста с эндогенным техническим прогрессом с учетом потребления. В экономико-математической модели учтено, что конечный выпуск продукции используется на потребление, капиталовложения в расширение основных фондов, улучшение производства с учетом эффективности затрат "на науку", налогообложение, правительственные расходы, сальдо и на борьбу с загрязнением окружающей среды. Эта модель учитывает влияние научных исследований на экономическое производство в самой системе, то есть это влияние является эндогенной переменной.

При исследовании предложенной экономико-математической модели построен алгоритм расчета оптимального процесса при выборе экономического режима среди краевых режимов на начальной стадии, а также алгоритм расчета оптимального процесса при выборе экономического режима среди магистральных режимов на начальной стадии.

Ключевые слова: эндогенный технический прогресс, краевой процесс, магистральный процесс, момент переключения управления, оптимальный процесс.

Постановка проблеми. Вплив науково-технічного прогресу на характер зростання в економічній системі виявляється в різних формах, зокрема при розгляді неавтономних, тобто змінних у часі, макровиробничих функцій.

У даній статті розглядається економіко-математична модель, де вплив наукових досліджень на виробництво запрограмований в самій системі, тобто в моделі з внутрішнім (ендогенним) врахуванням науково-технічного прогресу.

Тому актуальним, як у теоретичному, так і практичному плані є впливу наукових досліджень на виробництво в самій ендогенній системі.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. У праці О.І.Понаморенко та ін. запропоновано модель однопродуктової економіки зростання з ендогенним врахуванням науково-технічного прогресу проте в ній відсутнє споживання [1]. Дослідження моделі проведено з використанням принципу Понтрягіна.

Постановка завдання. Запропонувати модель однопродуктової економіки зростання з ендогенним врахуванням науково-технічного прогресу та споживання і провести її дослідження з використанням достатніх умов оптимальності.

Виклад основного матеріалу. Спочатку формалізуємо економіко-математичну модель.

Математична модель

Сформулюємо припущення для побудови економіко-математичної моделі.

Припущення 1. Робоча сила (трудові ресурси) підпорядкована експоненціальному закону $L(t)=L_0e^{n(t-t_0)}$ у момент часу (T - горизонт планування) $t\in[t_0,T]$ із відомим сталим темпом зростання $n>0$ та початковим станом $L_0>0$.

Припущення 2. Валова продукція X у момент часу $t\in[t_0,T]$ розпадається на кінцеву продукцію Y і виробниче споживання W [2]:

$$X(t)=Y(t)+W(t),\ \ t\in[t_0,T]. \tag{1}$$

Припущення 3. Нехай виробниче споживання W прямо пропорційне валовій продукції X із сталим коефіцієнтом $a\in(0;1)$:

$$W(t)=aX(t),\ \ t\in[t_0,T]. \tag{2}$$

Тоді кінцевий випуск продукції Y прямо пропорційний валовій продукції X із коефіцієнтом $(1-a)$:

$$Y(t)=(1-a)X(t),\ \ t\in[t_0,T]. \tag{3}$$

Припущення 4. Кінцевий випуск продукції Y розпадається на споживання C, на капіталовкладення (інвестиції) в розширення основних фондів (нагромадження капіталу) $I_{нагр}$, на покращення виробництва при науково-технічному прогресі (як ефективність затрат «на науку») $I_{наук}$, на оподаткування On, на урядові витрати $Uв$, на сальдо (експорт мінус імпорт) Sa та на боротьбу з забрудненням Za:

$$Y(t) = C(t) + I_{нагр}(t) + I_{наук}(t) + On(t) + Uв(t) + Sa(t) + Za(t), \quad t \in [t_0, T]. \tag{4}$$

Припущення 5. Нехай сумарні витрати на оподаткування On, на урядові витрати $Uв$, на сальдо Sa та на боротьбу з забрудненням Za прямо пропорційні кінцевому випуску продукції Y із сталим коефіцієнтом $b \in (0;1)$:

$$On(t) + Uв(t) + Sa(t) + Za(t) = bY(t), \ t \in [t_0, T]. \tag{5}$$

Тоді на сумарні затрати на споживання C, на нагромадження капіталу (інвестиції) $I_{нагр}$ та на ефективність витрат «на науку» (інвестиції «на науку») $I_{наук}$ припадає:

$$I_{нагр}(t) + I_{наук}(t) + C(t) = (1-b)Y(t) = (1-a)(1-b)X(t), \ t \in [t_0, T]. \tag{6}$$

Припущення 6. Нехай інвестиції на нагромадження капіталу $I_{нагр}$ пропорційні частині кінцевій продукції $(1-b)Y$ із змінним у часі t коефіцієнтом $u \in [0;1]$:

$$I_{нагр}(t) = u(t)(1-b)Y(t) = (1-a)(1-b)u(t)X(t), \quad t \in [t_0, T]. \tag{7}$$

Тоді на сумарні затрати на споживання C та на інвестиції «на науку» $I_{наук}$ припадає

$$I_{наук}(t) + C(t) = (1-u)(1-b)Y(t), \quad t \in [t_0, T]. \tag{8}$$

Припущення 7. Нехай споживання C прямо пропорційне частині кінцевої продукції $(1-u)(1-b)Y$ із відомим коефіцієнтом $s \in [0;1)$ залежним від часу t:

$$C(t) = s(t)[1-u(t)](1-b)Y(t) = s(t)[1-u(t)](1-a)(1-b)X(t), \quad t \in [t_0, T]. \tag{9}$$

Тоді на інвестиції «на науку» припадає

$$\begin{aligned} I_{наук}(t) &= (1-b)[1-s(t)][1-u(t)]Y(t) = \\ &= (1-a)(1-b)[1-s(t)][1-u(t)]X(t), \quad t \in [t_0, T]. \end{aligned} \tag{10}$$

Припущення 8. Динаміка руху капіталу K описується диференціальною моделлю

$$\dot{K}(t) = -\mu K(t) + I_{нагр}(t), \quad t \in [t_0, T]. \tag{11}$$

із початковою умовою

$$K(t_0) = K^{(0)}, \tag{12}$$

де $\mu \in (0;1)$ - норма амортизації, $\dot{K} \equiv dK/dt$ - чисті інвестиції – прибуток.

Припущення 9. Будемо вважати, що величина валового випуску продукції

$$X = A(Q)F(K, L), \tag{13}$$

де $F(K,L)$ - неокласична макровиробнича (виробнича) функція залежить від розмірів капіталу K і робочої сили L та з такими властивостями:двічі неперервно-диференційовна по $K \geq 0$ і $L \geq 0$, монотонно зростаюча по $K > 0$ і по $L > 0$ ($F'_K > 0$, $F'_L > 0$), увігнута по $K > 0$ і по $L > 0$ ($F''_{K^2} < 0$, $F''_{L^2} < 0$), $F(0,0) = F(K,0) = F(0,L)$, $\lim\limits_{K \to 0} F'_K(K,L) = \infty$ для $\forall L > 0$, $\lim\limits_{K \to \infty} F'_K(K,L) = 0$ для $\forall L > 0$, $F(K,L)$ - однорідна з степенем $\nu \in (0;2)$ [2]: $F(\lambda K, \lambda L) = \lambda^{\nu} F(K,L)$ для $\forall \lambda > 0$; $A(Q)$ - мультиплікатор прогресу, величина якого свідчить про ефективність затрат «на науку» та задовольняє умови: $A(Q \geq 0) > 0$, двічі неперервно-диференційовна, монотонно зростаюча $A'(Q > 0) > 0$, увігнута $A''(Q > 0) < 0$, $\lim\limits_{Q \to 0} A'(Q) = \infty$, $\lim\limits_{Q \to \infty} A'(Q) = 0$.

Припущення 10. Вважатимемо приріст ефективності затрат «на науку» рівним інвестиціям на науку

$$\begin{aligned} \dot{Q}(t) &= I_{наук}(t) = (1-b)[1-s(t)][1-u(t)]Y(t) = \\ &= (1-a)(1-b)[1-s(t)][1-u(t)]X(t), \quad t \in [t_0, T] \end{aligned} \tag{14}$$

із відомою початковою умовою

$$Q(t_0) = Q_0. \tag{15}$$

Із допомогою припущень 1-10, а відповідно із формул (1)-(15) отримуємо динаміку руху капіталу K і ефективності затрат «на науку» Q у вигляді диференціальних моделей

$$\begin{aligned} &\dot{K}(t) = -\mu K(t) + (1-a)(1-b)u(t)A(Q)F(K,L), \\ &\dot{Q}(t) = (1-a)(1-b)[1-s(t)][1-u(t)]A(Q)F(K,L), \quad t \in [t_0, T] \end{aligned} \tag{16}$$

із початковими умовами

$$K(t_0) = K_0, \; Q(t_0) = Q_0 \tag{17}$$

та обмеженням на керування за нормою нагромадження капіталу

$$0 \leq u(t) \leq 1, \quad t \in [t_0, T]. \tag{18}$$

Динамічну систему (16)-(17) запишемо в питомих показниках: $k = K/L$, $q = Q/L$, $k_0 = K_0/L_0$, $F(K,L) = L^{\nu}F(K/L,1) = L_0^{\nu}e^{\nu n(t-t_0)}f(k)$, $q_0 = Q_0/L_0$. Із використанням рівностей $\dot{K}/L = \dot{k} - nk$, $\dot{Q}/L = \dot{q} - nk$ одержимо

$$\dot{k}(t) = -(\mu+n)k(t) + (1-a)(1-b)L_0^{\nu-1}e^{(\nu-1)n(t-t_0)}u(t)A(Q)f(k),\ \ Q = L_0 q e^{n(t-t_0)},$$
$$\dot{q}(t) = -nq(t) + (1-a)(1-b)[1-s(t)][1-u(t)]L_0^{\nu-1}e^{(\nu-1)n(t-t_0)}A(Q)f(k),\ t \in [t_0, T], \qquad (19)$$
$$k(t_0) = k_0,\ q(t_0) = q_0.$$

Завдання полягає в тому, щоб вибрати керування u, $0 \le u(t) \le 1$ в системі (19) так, щоб виходячи з положення (k_0, q_0) при $t = t_0$, вона досягла рівня $k(T)$ не нижче заданого рівня k_T ($k(T) \ge k_T$) об’єму питомого капіталу за найменший час:

$$\int_{t_0}^{T} dt \to \min_{T}, \qquad (20)$$

де T - шуканий час.

Зауважимо, що в цій задачі на швидкодію керуванням виступає норма накопичення капіталу u, а фазовими траєкторіями – фондомісткість (питомий капітал) k і питома ефективність затрат «на науку» q.

Дослідження економіко-математичної моделі

Для дослідження задачі на швидкодію (19), (18), (20) використаємо достатні умови оптимальності [2; 3], за якими треба оптимізувати дві функції багатьох змінних:

$$\begin{aligned} R(t,k,q,u,V) &= \partial V/\partial t + \partial V/\partial k[-(\mu+n)k + \\ &+(1-a)(1-b)L_0^{\nu-1}e^{(\nu-1)n(t-t_0)}uf(k)A(L_0 q e^{n(t-t_0)})] + \\ &+\partial V/\partial q[-nq + (1-a)(1-b)L_0^{\nu-1}(1-s)e^{(\nu-1)n(t-t_0)}(1-u)\times \\ &\times A(L_0 q e^{n(t-t_0)})f(k)] + 1 \to \max_{k,q,u}; \end{aligned} \qquad (21)$$

$$V(T, k(T), q(T)) \to \min_{\substack{k(T)\ge k_T,\\ A(Q)\ge 0}}, \qquad (22)$$

де шукана функція V - неперервно-диференційовна по t та k і q на декартовому добутку $\{t \ge t_0\} \times \{k \ge 0\} \times \{q \ge 0\}$.

Невідому функцію V шукатимемо у вигляді

$$V(t,k,q) = l_1 k^2 + l_1 q^2 + l_2(k+q),\ \ t \ge t_0, \qquad (23)$$

де сталі l_1, l_2 підлягають вибору, причому задача оптимізації (22) має розв'язком

$$k(T) = k_T \tag{24}$$

при $l_1 > 0$, $l_2 > 0$. Підставимо (23) у функцію R із (21).

Функція R лінійна за керуваннями u, тому крайовими керуваннями за нормою нагромадження капіталу є:

$$u_{край}(t) = \begin{cases} 0, & якщо \quad \phi(t) < 0, \\ 1, & якщо \quad \phi(t) > 0, \end{cases} \quad t \geq t_0,$$

де $\phi(t) = {\partial V}/{\partial k} - (1-s){\partial V}/{\partial q} = 2l_1[k-(1-s)q] + l_2 s$, $t \geq t_0$, причому ${\partial V}/{\partial k}$ характеризує норму ефективності нагромадження капіталу, а $(1-s){\partial V}/{\partial q}$ - норму ефективності капіталовкладень у науку.

Розглянемо особливий випадок, коли $\phi(t) = 0$. Зауважимо, що у фазовій площині $k\mathrm{O}q$ $\phi(t) = 0$ є особливою прямою. Під цією прямою крайове керування $u_{край} = 0$, а над – $u_{край} = 1$. Тому особлива пряма визначає моменти перемикання керування, а також так звані магістральні керування.

Визначимо магістральні керування. На особливій прямій $\phi(t) = 0$ норма ефективності накопичення капіталу дорівнює нормі ефективності капіталовкладень в науку. Підставимо $\phi(t) = 0$ у функцію R, в якій залишилось оптимізувати таку функцію:

$$\begin{aligned} &\tilde{R}(t,k,q) = -(2l_1 k + l_2)(\mu + n)k + (2l_1 q + l_2) \times \\ &\times [-nq + (1-a)(1-b)L_0^{v-1}(1-s)e^{(v-1)n(t-t_0)} f(k) A(L_0 q e^{n(t-t_0)})] + 1 \to \max_{k,q}. \end{aligned} \tag{25}$$

Запишемо необхідні умови оптимальності функції $\tilde{R}$ по k і q, як рівність нулеві частинних похідних першого порядку по k і q $(\partial\tilde{R}/\partial k = 0, \quad \partial\tilde{R}/\partial q = 0)$:

$$\begin{aligned} &-(4l_1 k + l_2)(\mu + n) + (2l_1 q + l_2)(1-a)(1-b)L_0^{v-1}(1-s) \times \\ &\times e^{(v-1)n(t-t_0)} f'(k) A(L_0 q e^{n(t-t_0)}) = 0, \\ &2l_1[-nq + (1-a)(1-b)L_0^{v-1}(1-s)e^{(v-1)n(t-t_0)} f(k) \times \\ &\times A(L_0 q e^{n(t-t_0)})] + (2l_1 q + l_2)[-n + (1-a)(1-b)L_0^{v-1}(1-s) \times \\ &\times e^{(v-1)n(t-t_0)} f(k) A'(L_0 q e^{n(t-t_0)}) L_0 e^{n(t-t_0)}] = 0, \quad t \geq t_0. \end{aligned} \tag{26}$$

Отримали систему нелінійних алгебраїчних рівнянь (26) для визначення оптимізаційних величин $\tilde{k}_{l_1 l_2}$ і $\tilde{q}_{l_1 l_2}$, які можна знайти одним із числових методів [4]. Відзначимо, що оптимізаційні величини є неперервно-диференційованими на $[t_0, T]$, оскільки функції $f(k \geq 0)$ і $A(Q \geq 0)$ є двічі неперервно-диференційованими.

За оптимізаційними величинами $\tilde{k}_{l_1 l_2}$ і $\tilde{q}_{l_1 l_2}$ знаходимо магістральні керування $u^{(1)}_{маг}$ і $u^{(2)}_{маг}$. Для цього підставимо $\tilde{k}$ і $\tilde{q}$ відповідно у рівняння динаміки руху питомого капіталу та в рівняння динаміки руху питомої ефективності затрат «на науку» моделі (19). Одержимо:

– із рівняння динаміки руху питомого капіталу

$$u^{(1)}_{маг}(t) = [\dot{\tilde{k}}_{l_1 l_2}(t) + (\mu + n)\tilde{k}(t)](1-a)^{-1}(1-b)^{-1} L_0^{v-1} \times \\ \times e^{(v-1)n(t-t_0)} f^{-1}(\tilde{k}_{l_1 l_2}) A^{-1}(L_0 \tilde{q}_{l_1 l_2} e^{n(t-t_0)}), \;\; t \geq t_0, \tag{27}$$

– із рівняння динаміки руху питомої ефективності затрат «на науку»

$$u^{(2)}_{маг}(t) = 1 - [\dot{\tilde{q}}_{l_1 l_2}(t) + n\tilde{q}_{l_1 l_2}(t)](1-a)^{-1}(1-b)^{-1}[1-s(t)]^{-1} \times \\ \times L_0^{v-1} e^{(1-v)n(t-t_0)} f^{-1}(\tilde{k}_{l_1 l_2}) A^{-1}(L_0 \tilde{q}_{l_1 l_2} e^{n(t-t_0)}), \;\; t \geq t_0. \tag{28}$$

Зауважимо, що вибором сталих l_1 та l_2 можна домогтися того, щоб $u^{(1)}_{маг} \in [0;1]$ і $u^{(2)}_{маг} \in [0;1]$.

Таким чином, визначили два крайові керування $u^{(1)}_{край} = 0$ і $u^{(2)}_{край} = 1$ та два магістральних керування $u^{(1)}_{маг}$ і $u^{(2)}_{маг}$ за нормою нагромадження капіталу.

Відповідні крайові траєкторії ($k^{(1)}_{край}(t)$, $q^{(1)}_{край}(t)$), ($k^{(2)}_{край}(t)$, $q^{(2)}_{край}(t)$), $t \geq t_0$ та магістральні траєкторії ($k^{(1)}_{маг}(t)$, $q^{(1)}_{маг}(t)$) і ($k^{(2)}_{маг}(t)$, $q^{(2)}_{маг}(t)$), $t \geq t_0$ визначаються з відповідних початкових задач системи (19) при крайових керуваннях $u = u^{(1)}_{край}$ і $u = u^{(2)}_{край}$ та при магістральних керуваннях $u = u^{(1)}_{маг}$ і $u = u^{(2)}_{маг}$.

Отже, отримали два крайові процеси $\{k^{(j)}_{край}(t),\ q^{(j)}_{край}(t),\ u^{(j)}_{край}(t),\ t \geq t_0\}$, $j = 1, 2$ та два магістральних процеси $\{k^{(j)}_{маг}(t),\ q^{(j)}_{маг}(t),\ u^{(j)}_{маг}(t),\ t \geq t_0\}$, $j = 1, 2$, тобто отримали чотири економічних режими для вибору пріоритетного режиму на початковій стадії протікання економічного процесу.

Алгоритм розрахунку оптимального процесу при виборі економічного режиму серед крайових режимів на початковій стадії

1. Виберемо один із двох крайових процесів: $\{u_{край}(t)$, $k_{край}(t)$, $q_{край}(t)$, $t \geq t_0\}$.

2. Для вибраного крайового процесу при керуванні $u_{край}$ економічна система буде рухатися по крайових траєкторіях $k_{край}$ та $q_{край}$ до моменту перемикання керування ζ_1.

3. Момент перемикання ζ_1 визначається із особливої прямої $\phi(t) = 0$, тобто з рівняння

$$2l_1\{k_{край}(t) - [1 - s(t)]q_{край}(t)\} + l_2 s(t) = 0, \quad t > t_0. \tag{29}$$

Якщо розв'язок рівняння (29) не існує, то переходимо на другий крайовий процес або магістральні процеси і виходимо із алгоритму, інакше маємо момент перемикання керування ζ_1, а потім обчислюємо $k_{край}(\zeta_1)$.

4. Якщо $k_{край}(\zeta_1) \geq k_T$, то вибраний крайовий процес є оптимальним процесом $\{k_{ОП}(t) = k_{край}(t)$, $q_{ОП}(t) = q_{край}(t)$, $u_{ОП}(t) = u_{край}(t)$, $t \in [t_0, T]$, $T = \zeta_1\}$.

Зауважимо, що значення T знаходимо із рівняння $k_{край}(T) = k_T$. Вихід із алгоритму.

При виконанні нерівності $k_{край}(\zeta_1) < k_T$ економічна система в момент часу $t = \zeta_1$ сходить із вибраного крайового процесу та буде рухатися по вибраному одному із двох магістральному процесу до моменту перемикання керування ζ_2.

5. За магістральним керуванням $u_{маг}$ вибраного магістрального процесу знайдемо нові магістральні траєкторії $\tilde{k}_{маг}$ і $\tilde{q}_{маг}$ при $u = u_{маг}$ та нових початкових умовах із такої початкової задачі:

$$\dot{k}(t) = -(\mu + n)k(t) + (1-a)(1-b)L_0^{\nu-1}u_{маг}(t)f(k(t))e^{(\nu-1)n(t-t_0)}A(q_0 L_0 e^{n(t-t_0)}),$$
$$\dot{q}(t) = -nq(t) + (1-a)(1-b)L_0^{\nu-1}[1-u_{маг}(t)][1-s(t)]f(k(t))e^{(\nu-1)n(t-t_0)}A(q_0 L_0 e^{n(t-t_0)}),$$
$$k(\zeta_1) = k_{край}(\zeta_1), \quad q(\zeta_1) = q_{край}(\zeta_1), \quad t \geq \zeta_1.$$

Момент перемикання керування ζ_2 визначається з рівняння $\phi(t) = 0$ при $k = \tilde{k}_{маг}(t)$ і $q = \tilde{q}_{маг}(t)$:

$$2l_1\{\tilde{k}_{маг}(t)-[1-s(t)]\tilde{q}_{маг}(t)\}+l_2 s(t)=0,\ \ t>\zeta_1.$$

Знайдений розв'язок цього рівняння ζ_2 буде моментом перемикання керування. Обчислимо $\tilde{k}_{маг}(\zeta_2)$.

6. Якщо виконується нерівність $\tilde{k}_{маг}(\zeta_2)\geq k_T$, то T визначається з рівняння $\tilde{k}_{маг}(T)=k_T$ і при цьому вибрані крайовий процес та магістральний утворюють оптимальний процес $\{k_{ОП}(t)$, $q_{ОП}(t)$, $u_{ОП}(t)$, $t\in[t_0,T]\}$, для якого

$$k_{ОП}(t)=\begin{cases}k_{край}(t), & якщо \quad t\in[t_0,\zeta_1],\\ \tilde{k}_{маг}(t), & якщо \quad t\in[\zeta_1,T],\end{cases}\quad q_{маг}(t)=\begin{cases}q_{край}(t), & якщо \quad t\in[t_0,\zeta_1],\\ \tilde{q}_{маг}(t), & якщо \quad t\in[\zeta_1,T],\end{cases}$$

$$u_{ОП}(t)=\begin{cases}u_{край}(t), & якщо \quad t\in[t_0,\zeta_1],\\ u_{маг}(t), & якщо \quad t\in[\zeta_1,T].\end{cases}$$

Вихід із алгоритму.

При виконанні нерівності $\tilde{k}_{маг}(\zeta_2)<k_T$ ζ_2 є моментом перемикання керування, а економічна система в момент $t=\zeta_2$ сходить із магістрального процесу і переходить на рух по другому крайовому процесу.

7. Для вибраного крайового керування $u^{(2)}_{край}(t)=1$ знайдемо нові крайові траєкторії $\tilde{k}^{(2)}_{край}(t)$ і $\tilde{q}^{(2)}_{край}(t)$ при нових початкових умовах:

$$\begin{aligned}&\dot{k}(t)=-(\mu+n)k(t)+(1-a)(1-b)L_0^{v-1}e^{(v-1)n(t-t_0)}f(k(t))A(qL_0e^{n(t-t_0)}),\\ &\dot{q}(t)=-nq(t),\ \ t\geq\zeta_2,\\ &k(\zeta_2)=k_{маг}(\zeta_2),\ \ q(\zeta_2)=q_{маг}(\zeta_2).\end{aligned}$$

8. За знайденою новою крайовою траєкторією за питомим капіталом $\tilde{k}_{край}$ визначимо час T досягнення кінцевого стану k_T із рівняння $\tilde{k}^{(2)}_{край}(T)=k_T$.

9. Оптимальний процес $\{k_{ОП}(t)$, $q_{ОП}(t)$, $u_{ОП}(t)$, $t\in[t_0,T]\}$ складається із двох склейок: у момент перемикання ζ_1 - склейка вибраного крайового процесу із вибраним магістральним процесом, а в момент перемикання ζ_2 - склейка вибраного магістрального процесу з другим крайовим процесом

$$k_{ОП}(t)=\begin{cases}k_{край}(t), & якщо \quad t\in[t_0,\zeta_1],\\ \tilde{k}_{маг}(t), & якщо \quad t\in[\zeta_1,\zeta_2],\\ \tilde{k}^{(2)}_{край}(t), & якщо \quad t\in[\zeta_2,T],\end{cases}\quad q_{ОП}(t)=\begin{cases}q_{край}(t), & якщо \quad t\in[t_0,\zeta_1],\\ \tilde{q}_{маг}(t), & якщо \quad t\in[\zeta_1,\zeta_2],\\ \tilde{q}^{(2)}_{край}(t), & якщо \quad t\in[\zeta_2,T],\end{cases}$$

$$u_{ОП}(t)=\begin{cases} u_{край}(t), & якщо \quad t\in[t_0,\zeta_1], \\ \tilde{u}_{маг}(t), & якщо \quad t\in[\zeta_1,\zeta_2], \\ u^{(2)}_{край}(t), & якщо \quad t\in[\zeta_2,T]. \end{cases}$$

Тут оптимальне керування за нормою нагромадження капіталу $u_{ОП}$ є кусково-неперервною функцією на $[t_0,T]$, а оптимальні траєкторії за питомим капіталом $k_{ОП}$ і за питомою ефективністю затрат «на науку» $q_{ОП}$ - неперервні та кусково-диференційовні функції на $[t_0,T]$.

Зауважимо, що для розв'язання нелінійних алгебраїчних рівнянь можна використати один із числових методів [5], а для розв'язування початкових задач – метод Рунге-Кутта [5].

Вихід із алгоритму.

Алгоритм розрахунку оптимального процесу
при виборі економічного режиму серед магістральних режимів
на початковій стадії

1. Виберемо магістральний режим серед двох $\{k_{маг}(t)$, $q_{маг}(t)$, $u_{маг}(t)$, $t\ge t_0\}$.

Економічна система рухається по магістральним траєкторіям $k_{маг}$ і $q_{маг}$ до моменту перемикання керування ζ_1.

2. Момент перемикання ζ_1 за вибраними магістральними траєкторіями $k_{маг}$ і $q_{маг}$ визначається із особливого рівняння $\phi(t)=0$:

$$2l_1\{k_{маг}(t)-[1-s(t)]q_{маг}(t)\}+l_2s(t)=0,\ \ t>t_0.$$

Обчислити $k_{маг}(\zeta_1)$.

3. Якщо виконується нерівність $k_{маг}(\zeta_1)\ge k_T$, то час T можна визначити із рівняння $k_{маг}(T)=k_T$. Тоді магістральний процес є оптимальним процесом $\{k_{ОП}(t)=k_{маг}(t)$, $q_{ОП}(t)=q_{маг}(t)$, $u_{ОП}(t)=u_{маг}(t)$, $t\in[t_0,T]\}$. Вихід із алгоритму.

При невиконанні нерівності $k_{маг}(\zeta_1)<k_T$ ζ_1 є моментом перемикання керування. У цей момент ζ_1 економічна система сходить із магістрального процесу та переходить на рух по другому крайовому процесу.

4. За крайовим керуванням $u^{(2)}_{край}=1$ другого крайового процесу визначимо нові крайові траєкторії $\tilde{k}^{(2)}_{край}$ і $\tilde{q}^{(2)}_{край}$ із початкової задачі

$$\dot{k}(t) = -(\mu + n)k(t) + (1-a)(1-b)L_0^{v-1} f(k(t)) A(qL_0 e^{n(t-t_0)}),$$
$$\dot{q}(t) = 0, \;\; t \ge \zeta_1,$$
$$k(\zeta_1) = k_{маг}(\zeta_1), \;\; q(\zeta_1) = q_{маг}(\zeta_1).$$

5. За знайденою новою крайовою траєкторією за питомим капіталом визначимо час T досягнення кінцевого стану системи із рівняння $\tilde{k}^{(2)}_{край}(T) = k_T$.

6. Тоді оптимальним процесом $\{k_{ОП}(t)$, $q_{ОП}(t)$, $u_{ОП}(t)$, $t \in [t_0, T]\}$ буде склейка вибраного магістрального процесу та другого крайового процесу

$$k_{ОП}(t) = \begin{cases} k_{маг}(t), & t \in [t_0, \zeta_1], \\ \tilde{k}^{(2)}_{край}(t), & t \in [\zeta_1, T], \end{cases} \quad q_{ОП}(t) = \begin{cases} q_{маг}(t), & t \in [t_0, \zeta_1], \\ \tilde{q}^{(2)}_{край}(t), & t \in [\zeta_1, T], \end{cases}$$

$$u_{ОП}(t) = \begin{cases} u_{маг}(t), & t \in [t_0, \zeta_1], \\ u^{(2)}_{край}(t) = 1, & t \in [\zeta_1, T]. \end{cases}$$

Причому, оптимальне керування за нормою накопичення капіталу $u_{ОП}$ є кусково-неперервною функцією на $[t_0, T]$, а оптимальні траєкторії за питомим капіталом $k_{ОП}$ і питомою ефективністю затрат «на науку» - неперервні та кусково-диференційовні функції на $[t_0, T]$.

Вихід із алгоритму.

Таким чином, поведінка оптимальних траєкторій є типовою: якщо $K_0 < K_T$ (відповідно $k_0 < k_T$), то спочатку траєкторія виходить на особливу пряму $2l_1\{k - [1-s]q\} + sl_2 = 0$ і рухається по ній (тому часто особливу пряму називають магістраллю), після зустрічі з прямою перемикання траєкторія сходить з особливої прямої. Економічне тлумачення особливої прямої таке: лише на особливій прямій норма ефективності накопичення дорівнює нормі ефективності капіталовкладень в науку.

Отже, для оптимального керування в даній моделі маємо: якщо мета достатньо віддалена (K_0 набагато менша за K_T), то всі капіталовкладення слід направляти в ту область, де норма ефективності найбільша. На магістралі (особливій прямій) капіталовкладення розподіляються в такій пропорції, щоб норми ефективності були рівними.

Вищеописане сформулюємо у вигляді теореми.

Теорема. Нехай для моделі (19)-(20) економічні показники задовольняють умови:

1) сталі: $\mu \in (0;1)$, $n > 0$, $a \in (0;1)$, $b \in (0;1)$, $v \in (0;2)$, $L_0 > 0$, $k_0 > 0$, $q_0 > 0$, $t_0 \ge 0$, $k_T > k_0$;

2) функція $s \in [0;1)$ - кусково-неперервна на $t \ge t_0$;

3) питома макровиробнича функція $f(k \ge 0) \ge 0$ - двічі неперервно-диференційовна, монотонно зростаюча $f'(k > 0) > 0$, увігнута $f''(k > 0) < 0$ та $\lim_{k \to 0} f'(k) = \infty$, $\lim_{k \to \infty} f'(k) = 0$, $f(0) = 0$.

Тоді модель (19)-(20) як задача оптимальної швидкодії має оптимальний процес $\{k_{ОП}(t)$, $q_{ОП}(t)$, $u_{ОП}(t)$, $t \in [t_0, T]\}$, причому оптимальне керування за нормою нагромадження функції на $[t_0, T]$, а оптимальні траєкторії за питомим капіталом $k_{ОП}$ і за питомою ефективністю затрат «на науку» - неперервні та кусково-диференційовними функціями на $[t_0, T]$. Крім того, модель (19)-(20) має чотири економічних режими (два крайових і два магістральних) для вибору пріоритетного на початковій стадії протікання процесу.

Зауваження. За функцію V у (23) можна взяти

$$V(t,k,q) = l\,X(t)/L(t) = l(1-a)(1-b)L_0^{v-1}u(t)e^{(v-1)n(t-t_0)} \times$$
$$\times f(k(t))A(L_0 q(t) e^{n(t-t_0)}),\ \ t \ge t_0.$$

Висновки:

1. Запропонована модель однопродуктової макроекономіки зростання з ендогенним технічним прогресом та споживанням і проведено її дослідження.
2. Запропонована модель має чотири економічних режими (два крайових і два магістральних) для вибору пріоритетного режиму на початковій стадії руху системи.
3. У запропонованій моделі на особливій прямій (магістралі) норма ефективності накопичення капіталу дорівнює нормі ефективності капіталовкладень в науку. А капіталовкладення слід направляти в ту область, де норма ефективності найбільша.

Список використаних джерел:

1. Пономаренко О.І. Основи математичної економіки / О.І.Пономаренко, М.О.Перестюк, В.М.Бурим. – К.: Інформатика, 1995. – 320 с.
2. Бойчук М.В. Моделювання та оптимізація повного циклу однопродуктової макроекономіки зростання з урахуванням екологічного фактора / М.В.Бойчук, А.Р.Семчук. – Чернівці: Місто, 2012. – 208с.
3. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач / Ф.П.Васильев. – Москва: Наука, 1980. – 518 с.
4. Бейко И.В. Методы и алгоритмы решения задач оптимизации / И.В.Бейко, Б.Н.Бублик, П.Н.Зинько. – К. Вища шк. голов. вид., 1983. - 512 с.
5. Ясинський В.К. Основи обчислювальних методів / В.К.Ясинський. – Чернівці: Золоті литаври, 2005. – 396 с.

Myroslav Boychuk, Candidate of Phisic and Mathematic Sciences,
Y. Fedkovych Chernivtsi National University, Chernivtsi
Arkadiy Semchuk, Candidate of Phisic and Mathematic Sciences,
Chernivtsi National Institute of Trade and Economics of the KNTEU

MODELING OF A SINGLE-COMPONENT MACROECONOMICS OF GROWTH WITH ENDOGENOUS TECHNICAL PROGRESS WITH ACCOUNTING OF CONSUMPTION

Annotation

A model of a single-component economy of growth with endogenous technical progress with accounting of consumption was proposed. In the economic-mathematical model it was taken into account that the final production is used for consumption, investments to the expansion of fixed assets, improvement of production with accounting of cost efficiency "for science", the taxation, the government expenditure, the balance and the fight against pollution.

This model takes into account the impact of a scientific research on economic production in the own system, so this is effect of an endogenous variable.

In the study of the proposed economic-mathematical model was formulated a calculating algorithm of the optimal process in selecting economic regime among boundary regimes at the initial stage, as well as the calculating algorithm of the optimal process in choosing economic regime among magistral regimes at the early stage.

Keywords: endogenous technical progress, the boundary process, magistral process, the moment of change-over the controls, the optimal process.

References:

1. Ponomarenko, O.I., Perestiuk, M.O., Burym, V.M. (1995). *Osnovy matematychnoi ekonomiky* [Fundamentals of mathematical economics]. Information, Kyiv, 320 p. (in Ukr.).
2. Bojchuk, M.V., Semchuk, A.R. (2012). *Modeliuvannia ta optymizatsiia povnoho tsyklu odnoproduktovoi makroekonomiky zrostannia z urakhuvanniam ekolohichnoho faktora* [Modeling and optimization of full cycle oneproduct macroeconomic growth taking into account environmental factors]. Misto, Chernivtsi, 208 p. (in Ukr.).
3. Vasil'ev, F.P. (1980). *Chislennye metody reshenija jekstremal'nyh zadach* [Numerical methods for solving extreme problems]. Nauka, Moskva, 518 p. (in Russ.).
4. Bejko, I.V. Bublik, B.N., Zin'ko, P.N. (1983). *Metody i algoritmy reshenija zadach optimizacii* [Methods and algorithms for solving optimization problems]. Kyiv, 512 p. (in Ukr.).
5. Yasyns'kyj, V.K. (2005). *Osnovy obchysliuval'nykh metodiv* [Basics of computational methods]. Zoloti lytavry, Chernivtsi. 396 p. (in Ukr.).