Summary. I. V. Atamas'. The area of solutions of linear difference Hukuhara equations. *In this paper we study the question of area calculation for solutions to linear difference Hukuhara equations*

$$\Delta_H X_n = AX_n .$$

We introduce here auxiliary sequences

$$\xi_n^k = S\left[X_n, A^k X_n\right], k \in \mathbb{Z}_+ .$$

Then we can write a comparison system in abstract form $\Delta\xi_n = (\Omega+1)\xi_n$ *with initial conditions* $\xi_n = (\Omega+2)^n \xi_0$, *where operator* $\Omega : l_\infty \to l_\infty$ *is given by*

$$(\Omega\xi)_k = \xi_{k-1} + \xi_{k+1}, k \geq 1,\ (\Omega\xi)_0 = 2\xi_1 .$$

Examining a comparison system, we get a main result: we obtain the exact formula for area $S[X_n, X_n]$ *for solutions to linear difference Hukuhara equations:*

$$S[X_n, X_n] = 2^n n! \sum_{l=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{1}{4^l (n-2l)!(l!)^2} S[X_0, X_0] + 2\sum_{p=1}^{n} \frac{n!}{2^{p-n}} \sum_{l=0}^{\left[\frac{n-p}{2}\right]} \frac{1}{4^l (n-p-2l)!(p+l)l!} S\left[X_0, A^p X_0\right].$$

Keywords: Hukuhara difference, Minkowski mixed area, Chaplygin-Vazhevskii method of comparison, difference equations, dynamic systems, Hausdorff metric.

Одержано редакцією 19.08.2016 Прийнято до друку 23.09.2016

УДК 517.92 PACS 02,03,05,06,07

В. О. Болілий, І. О. Зеленська

НЕСТАБІЛЬНА ДИФЕРЕНЦІАЛЬНА ТОЧКА ЗВОРОТУ II РОДУ В СИСТЕМІ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКУ

Для неоднорідної системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь з малим параметром при старшій похідній і точкою звороту отримано умови для побудови рівномірної асимптотики розв'язку. Розглядається випадок, коли спектр граничного оператора містить кратні і тотожно рівні нулю елементи. Асимптотику побудовано методом істотно-особливих функцій, який дозволяє в околі точки звороту використати модельний оператор Ейрі-Лангера для однорідної задачі і функцію Скорера для неоднорідної задачі. Конструкція асимптотичних розв'язків містить довільні сталі, які визначаються однозначно під час розв'язання ітераційних рівнянь. Доведено також існування розв'язку системи диференціальних рівнянь з малим параметром при старшій похідній та при наявності точки звороту, за умови, що точка звороту міститься на інтервалі $[-l, l]$. *Проведена оцінка залишкових членів асимптотики розв'язку.*

Ключові слова: лінійна система, малий параметр, точка звороту, простір безрезонансних розв'язків, модельний оператор Ейрі-Лангера, рівняння типу Орра-Зоммерфельда.

Вступ

Асимптотична теорія рівняння Орра-Зоммерфельда для гідродинамічної стабільності має довгу історію. Увага дослідників сфокусована на задачах цього типу з метою побудови єдиного асимптотичного розв'язку, який би можна було використовувати при дослідженні характеристик процесів при переході течії з ламірного стану у турбулентний. У раніх роботах Вазов [1], Лангер [2], Лін [3], Лін і Рабенштейн [4] та інші досліджували задачу методом порівняльних рівнянь. В усіх цих роботах головна мета полягала в отриманні асимптотичних розв'язків рівняння Орра-Зоммерфельда, які б були рівномірно збіжними і придатними в околі точки звороту. Теорії цього типу в значній мірі базуються на ідеї узагальнення теорії Лангера на рівняння вищих порядків типу Орра-Зоммерфельда, запропонованої ним в роботах, присвячених дослідженню рівнянь другого порядку з простою точкою звороту. Слід зауважити, що успіх такого підходу залежить від вибору порівняльного рівняння, яке має бути досить простим, і розв'язки якого вважаються відомими. По-друге, ці розв'язки мають бути близькими за властивостями до розв'язків досліджуваного рівняння. Проведені дослідження вище зазначених авторів показали, що виникають певні труднощі з коефіцієнтами апроксимацій вищих порядків.

В даній роботі запропоновано метод, який дозволяє побудувати рівномірну асимптотику розв'язку на всьому відрізку зміни незалежної змінної, тобто в області, яка містить точку звороту і узагальнюється як на диференціальні рівняння вищих порядків, так і на векторні рівняння (системи диференціальних рівнянь).

Системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь (ССЗДР) з точками звороту є асимптотичними моделями для багатьох процесів, що відбуваються у прикладних сферах фізики, біології, інженерії [5]. Основна складність такого типу задач полягає у побудові асимптотики розв'язку, на всьому відрізку включаючи точку звороту [6,7,8].

Задача, яку будемо досліджувати в даній роботі, має вигляд:

$$\varepsilon Y'(x,\varepsilon) - A(x)Y(x,\varepsilon) = H(x), \tag{1}$$

де $\varepsilon > 0$, $x \in [-l, 0]$ $Y(x,\varepsilon) = colon(y_1(x,\varepsilon), y_2(x,\varepsilon), y_3(x,\varepsilon), y_4(x,\varepsilon))$ - шукана вектор-функція,

$H(x) = colon\,(0,0,0,h(x))-$ задана вектор-функція,

$$A(x,\varepsilon) = A_0(x) + \varepsilon A_1 = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -c(x) & -b(x) & -a(x) & 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

- відома матриця, в якій $a(x),\ b(x),\ c(x) \in C^\infty[-l, 0]$.

Систему рівнянь (1) будемо досліджувати за умов

$$a(x) = x\tilde{a}(x), \quad \tilde{a}(x) < 0, \quad b(x) \neq 0, \quad c(x) \neq 0. \tag{3}$$

Оскільки дану систему рівнянь можна звести до рівняння четвертого порядку типу Орра-Зоммерфельда виду:

$$\varepsilon^2 y^{(4)}(x,\varepsilon) + a(x)y^{(2)}(x,\varepsilon) + b(x)y'(x,\varepsilon) + c(x)y(x,\varepsilon) = h(x),$$

то в такому випадку будемо розглядати ***диференціальну точку звороту II роду*** [8].

1. Простір безрезонансних розв'язків

Простір функцій, в якому будемо будувати РАР задачі має вигляд

$$R_{1r} = \alpha_{1k}(x)\mathbf{Ai}(t) + \varepsilon^\gamma \beta_{1k}(x)\mathbf{Ai}'(t), \quad R_{2r} = \alpha_{2k}(x)\mathbf{Bi}(t) + \varepsilon^\gamma \beta_{2k}(x)\mathbf{Bi}'(t),$$

$$R_{3r} = f_k(x)v(t) + \varepsilon^\gamma g_k(x)v'(t), \qquad R_{4r} = \omega_k(x),$$

де $\alpha_{ik}(x), \beta_{ik}(x), f_k(x), g_k(x), \omega_k(x) \in C^{\infty}[-l,0], i=1,2; k=\overline{1,4}.$

Оскільки функція $\mathbf{Bi}(t)$ необмежено зростає на нескінченності, то диференціальна точка звороту II роду на заданому відрізку буде **нестабільною** [9].

З цих підпросторів новий простір отримуємо як пряму суму

$$R_r = \bigoplus_{j=1}^{4} R_{kr}.$$

Елемент простору безрезонансних розв'язків буде мати вигляд:

$$\tilde{Y}(x,t,\varepsilon) = \sum_{i=1}^{2}\Big[\alpha_{ik}(x)U_i(t) + \varepsilon^{\gamma}\beta_{ik}(x)U_i'(t)\Big] + f_k(x)\nu(t) + \varepsilon^{\gamma}g_k(x)\nu'(t) + \omega_k(x),$$

де функції $U_i(t), \quad i=1,2,$ тобто $U_1(t) = \mathbf{Ai}(t)$, $U_1(t) = \mathbf{Bi}(t)$ - функції Ейрі-Лангера, а $\nu(t)$ - функція Скорера [10].

2. Регуляризація сингулярностей

Особлива точка $\varepsilon = 0$ у розв'язках системи породжує істотно особливі функції (ІОФ). З метою їх визначення введемо нову змінну $t = \varepsilon^{-p}\cdot\varphi(x),$ де показник p і регуляризуюча функція $\varphi(x)$ підлягають визначенню. Після введення нової змінної t векторне рівняння (1) переходить в розширене векторне рівняння

$$\tilde{L}_{\varepsilon}\tilde{Y}(x,t,\varepsilon) \equiv \varepsilon^{1-p}\varphi'\frac{\partial\tilde{Y}(x,t,\varepsilon)}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial\tilde{Y}(x,t,\varepsilon)}{\partial x} - A(x,\varepsilon)\tilde{Y}(x,t,\varepsilon) = H(x), \tag{4}$$

при виконанні головної тотожності регуляризації

$$\tilde{Y}(x,t,\varepsilon)\Big|_{t=\varepsilon^{-p}\cdot\varphi(x)} \equiv Y(x,\varepsilon).$$

Згідно з розробленим методом істотно особливих функцій [3] для ССЗДР з точками звороту, подіємо розширеним оператором на елемент ПБР R_{1k} та R_{2k}

$$\tilde{L}_{\varepsilon}(\alpha_{ik}(x,\varepsilon)U_k(t) + \varepsilon^{\gamma}\beta_{ik}(x,\varepsilon)U_i'(t)) = \varepsilon^{1-p}\alpha_{ik}(x,\varepsilon)\varphi'(x)U_{ik}'(t) -$$
$$-\varepsilon^{1+\gamma-2p}\beta_{ik}(x,\varepsilon)\varphi(x)\varphi'(x)U_i(t) - A(x,\varepsilon)\alpha_{ik}(x,\varepsilon)U_i(t) -$$
$$-\varepsilon^{\gamma}A(x,\varepsilon)\beta_{ik}(x,\varepsilon)U_i'(t) + \varepsilon\alpha_{ik}'(x)U_i(t) + \varepsilon^{1+\gamma}\beta_{ik}'(x)U_i'(t) = 0.$$

Після елементарних перетворень однозначно визначаємо:

$$p = \frac{2}{3} \text{ і } \gamma = \frac{1}{3}.$$

В результаті будемо мати

$$U_i'(t): \alpha_{ik}(x,\varepsilon)\varphi'(x) - A_0(x)\beta_{ik}(x,\varepsilon) = -\mu^3\beta_{ik}'(x,\varepsilon) + \mu^3 A_1\beta_{ik}(x,\varepsilon), \tag{5}$$

$$U_i(t): \beta_{ik}(x,\varepsilon)\varphi(x)\varphi'(x) - A_0(x)\alpha_{ik}(x,\varepsilon) = -\mu^3\alpha_{ik}'(x,\varepsilon) + \mu^3 A_1\alpha_{ik}(x,\varepsilon), \tag{6}$$

де $\mu = \varepsilon^{\frac{1}{3}}$.

Розпишемо векторні рівняння (5)-(6) з урахуванням (2). В результаті матимемо наступну систему

$$\begin{cases} \alpha_{i1}(x,\varepsilon)\varphi'(x) = -\mu^3\left[\beta'_{i1}(x,\varepsilon) - \beta_{i2}(x,\varepsilon)\right], \\ \alpha_{i2}(x,\varepsilon)\varphi'(x) = -\mu^3\left[\beta'_{i2}(x,\varepsilon) - \beta_{i3}(x,\varepsilon)\right], \\ \alpha_{i3}(x,\varepsilon)\varphi'(x) - \beta_{i4}(x,\varepsilon) = -\mu^3\beta'_{i3}(x,\varepsilon), \\ \alpha_{i4}(x,\varepsilon)\varphi'(x) + c(x)\beta_{i1}(x,\varepsilon) + b(x)\beta_{i2}(x,\varepsilon) + a(x)\beta_{i3}(x,\varepsilon) = -\mu^3\beta'_{i4}(x,\varepsilon), \\ \beta_{i1}(x,\varepsilon)\varphi(x)\varphi'(x) = -\mu^3[\alpha'_{i1}(x,\varepsilon) - \alpha_{i2}(x,\varepsilon)], \\ \beta_{i2}(x,\varepsilon)\varphi(x)\varphi'(x) = -\mu^3[\alpha'_{i2}(x,\varepsilon) - \alpha_{i3}(x,\varepsilon)], \\ \beta_{i3}(x,\varepsilon)\varphi(x)\varphi'(x) - \alpha_{i4}(x,\varepsilon) = -\mu^3\alpha_{i3}(x,\varepsilon), \\ \beta_{i4}(x,\varepsilon)\varphi(x)\varphi'(x) + c(x)\alpha_{i1}(x,\varepsilon) + b(x)\alpha_{i2}(x,\varepsilon) + a(x)\alpha_{i3}(x,\varepsilon) = -\mu^3\alpha'_{i4}(x,\varepsilon). \end{cases} \tag{7}$$

Отримані системи алгебраїчних рівнянь регулярно збурені відносно малого параметра.

Невідомі коефіцієнти $\alpha_{ik}(x,\varepsilon)$, $\beta_{ik}(x,\varepsilon)$ будемо визначати у вигляді рядів вектор-функцій $(i=1;2,\quad k=\overline{1,4})$:

$$\alpha_{ik}(x,\varepsilon) = \sum_{r=0}^{+\infty}\mu^r\alpha_{ikr}(x), \qquad \beta_{ik}(x,\varepsilon) = \sum_{r=0}^{+\infty}\mu^r\beta_{ikr}(x).$$

Тоді матимемо рекурентні системи виду

$$\Phi(\mathrm{x})Z_{kr}(x) = 0, r = \overline{0;2}, \qquad \Phi(x)Z_{kr}(x) = FZ_{k(r-3)}(x), \quad r \ge 3. \tag{8}$$

З метою визначення регуляризуючої функції $\varphi(x)$, випишемо визначник системи (8):

$$\det\Phi(\mathrm{x}) = \left[\varphi\varphi'^2\right]^2\left(\left[\varphi\varphi'^2\right]^2 + 2a(\mathrm{x})\varphi(\mathrm{x})\varphi'^2(x) + a^2(x)\right) = 0,$$

$$\left(\varphi(x)\varphi'^2(x) + a(x)\right)^2 = 0.$$

Звідки отримаємо задачу для визначення регуляризуючої функції:

$$\varphi(x)\varphi'^2(x) = -a(x), \quad \varphi(0) = 0,$$

розв'язком якої є:

$$\varphi(x) = \left(\frac{3}{2}\int_0^x\sqrt{-a(x)}dx\right)^{\frac{2}{3}}.$$

3. Побудова формального розв'язку однорідної системи

При такому визначенні регуляризуючої функції існують нетривіальні розв'язки однорідної системи рівнянь $\Phi(x)Z_{kr}(x) = 0,$ при $r = \overline{0,2}$ вигляду

$$Z_{kr}(x) = colon\left(0,0,\frac{1}{\varphi'(x)}\beta_{i4r}(x), -\varphi(x)\varphi'(x)\beta_{i3r}(x), 0, 0, \beta_{i3r}(x), \beta_{i4r}(x)\right),$$

де $\beta_{ikr}(x)$, $i=1;2$, $k=\overline{1;4}$ - до певного часу довільні, досить гладкі функції при $x \in [-l,0]$.

Продовжуючи далі розв'язувати ітераційні системи алгебраїчних рівнянь, можна показати, що існують розв'язки неоднорідних рекурентних систем (8).

Тоді розв'язки однорідної системи (1) будемо визначати як

$$D_k(x,t,\varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon^r\left[\alpha_{ikr}(x)U_i(t) + \varepsilon^{\frac{1}{3}}\beta_{ikr}(x,\varepsilon)U'_i(t)\right], \quad i = \overline{1;2},$$

де $\alpha_{ikr}(x) = colon(\alpha_{i1r}(x), \alpha_{i2r}(x), \alpha_{i3r}(x), \alpha_{i4r}(x))$ і $\beta_{ikr}(x) = colon(\beta_{i1r}(x), \beta_{i2r}(x)\beta_{i3r}(x)\beta_{i4r}(x))$ - відомі вектор-функції.

Звуження цього розв'язку при $t = \varepsilon^{\frac{2}{3}} \cdot \varphi(x)$ і $i = \overline{1;2}$:

$$D_k(x, \varepsilon^{\frac{2}{3}}\varphi(x), \varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \left[\alpha_{ikr}(x)U_i(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\varphi(x) + \varepsilon^{\frac{1}{3}}\beta_{ikr}(x)U_i'(\varepsilon^{\frac{2}{3}}\varphi(x)) \right], \quad i = \overline{1;2}.$$

4. Побудова формального частинного розв'язку неоднорідної системи

На наступному кроці подіємо розширеним оператором (4) на елементи ПБР R_{3r} та R_{4r}. Результатом дії будуть наступні векторні рівняння:

$$\nu'(t) : \varphi'(x) f_k(x, \varepsilon) - \left[A_0(x) + \mu^3 A_1 \right] g(x, \varepsilon) = -\mu^3 g_k'(x, \varepsilon),$$

$$\nu(t) : \varphi(x)\varphi'(x) g_k(x, \varepsilon) + \left[A_0(x) + \mu^3 A_1 \right] f_k(x, \varepsilon) = -\mu^3 f_k'(x, \varepsilon),$$

$$\mu^3 \omega_k'(x, \varepsilon) - [A_0(x) + \mu^3 A_1]\omega_k(x, \varepsilon) + \mu^2 \varphi'(x) g_k(x, \varepsilon) = h(x).$$

Компоненти вектор-функцій $f_k = colon(f_{1r}(x), f_{2r}(x), f_{3r}(x), f_{4r}(x))$, $g_r = colon(g_{1r}(x), g_{2r}(x), g_{3r}(x), g_{4r}(x))$, $\omega_r = colon(\omega_{1r}(x), \omega_{2r}(x), \omega_{3r}(x), \omega_{4r}(x))$, будемо визначати з таких рядів:

$$f_k(x, \varepsilon) = \sum_{r=-2}^{+\infty} \mu^r f_{kr}(x), \qquad g_k(x, \varepsilon) = \sum_{r=-2}^{+\infty} \mu^r g_{kr}(x), \qquad \omega_k(x, \varepsilon) = \sum_{r=0}^{+\infty} \mu^r \omega_{kr}(x).$$

Підставимо дані ряди в систему (7), з наступних рекурентних систем рівнянь знайдемо частинний розв'язок.

$$\Phi(x) Z_r^{част.}(x) = 0, r = \overline{-2;0}, \qquad \Phi(x) Z_r^{част.}(x) = F Z_{r-3}^{част.}(x), \quad r \geq 1,$$

де $Z_r^{част.}(x) = colon(f_{1r}(x), f_{2r}(x), f_{3r}(x), f_{4r}(x), g_{1r}(x), g_{2r}(x), g_{3r}(x), g_{4r}(x))$.

$$-A_0(x)\omega_0(x) = h(x), \quad -A_0(x)\omega_1(x) = 0, \quad r = 1,$$

$$-A_0(x)\omega_2(x) = -\varphi'(x) g_0(x), \quad r = 2,$$

$$-A_1(x)\omega_0(x) - A_0(x)\omega_r(x) = -\varphi'(x) g_{r-2}(x) - \omega_{r-3}'(x), \quad r \geq 3.$$

Ряд

$$\tilde{Y}^{част.}(x, t, \varepsilon) = \sum_{r=-2}^{\infty} \mu^r \left[f_{kr}(x)\nu(t) + \mu g_{kr}(x)\nu'(t) \right] + \sum_{r=0}^{\infty} \mu^r \omega_{kr}(x)$$

визначає частинний розв'язок розширеного векторного рівняння (1).
Таким чином, побудовано загальний розв'язок розширеного векторного рівняння (4):

$$\tilde{Y}(x, t, \varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \left[\sum_{i=1}^{2} \left[\alpha_{ikr}(x)U_i(t) + \varepsilon^{\frac{1}{3}} \beta_{ikr}(x) U'_i(t) \right] \right] +$$

$$+ \sum_{r=-2}^{\infty} \mu^r \left[f_{kr}(x)\nu(t) + \varepsilon^{\frac{1}{3}} g_{kr}(x)\nu'(t) \right] + \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \omega_{kr}(x).$$

Звуження цього розв'язку при $t = \varepsilon^{\frac{2}{3}} \cdot \varphi(x)$, тобто ряд

$$\tilde{Y}(x,t,\varepsilon)=\sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon^{r}\left[\sum_{i=1}^{2}\left[\alpha_{ikr}(x)U_{k}(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\cdot\varphi(x))+\varepsilon^{\frac{1}{3}}\beta_{ikr}(x)\frac{dU_{i}(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\cdot\varphi(x))}{d(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\cdot\varphi(x))}\right]\right]+$$

$$+\sum_{r=-2}^{\infty}\varepsilon^{r}\left[f_{kr}(x)\nu(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\cdot\varphi(x))+\varepsilon^{\frac{1}{3}}g_{kr}(x)\frac{d\nu(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\cdot\varphi(x))}{d(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\cdot\varphi(x))}\right]+\sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon^{r}\omega_{kr}(x)$$

є формальним розв'язком ССЗДР (1).

5. Оцінка залишкових членів асимптотики розв'язку

Враховуючи властивості ІОФ $\mathrm{Ai}(t)$, $\mathrm{Bi}(t)$, $\nu(t)$ та їх похідних [3], для залишкових членів відповідних розв'язків, асимптотику загального розв'язку системи можна записати у вигляді

$$\tilde{Y}(x,t,\varepsilon)=\sum_{i=1}^{2}\left\{\left[\sum_{r=0}^{q}\varepsilon^{r}\alpha_{ikr}(x)+O(\varepsilon^{q+1})\right]U_{i}(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\cdot\varphi(x))\right.$$

$$\left.+\varepsilon^{\frac{1}{3}}\left[\sum_{r=0}^{q}\varepsilon^{r}\beta_{ikr}(x)+O(\varepsilon^{q+1})\right]\frac{dU_{i}(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\cdot\varphi(x))}{d(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\cdot\varphi(x))}\right\}+ \tag{8}$$

$$+\left[\sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon^{r}f_{kr}(x)+O(\varepsilon^{q+1})\right]\nu(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\cdot\varphi(x))+\varepsilon^{\frac{1}{3}}\left[\sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon^{r}g_{kr}(x)+O(\varepsilon^{q+1})\right]\frac{d\nu(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\cdot\varphi(x))}{d(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\cdot\varphi(x))}+$$

$$+\sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon^{r}\omega_{kr}(x)+O(\varepsilon^{q+1}).$$

Висновки

Одержані результати сформулюємо у вигляді наступної теореми:

Теорема. Нехай для ССЗДР (1) виконуються умови (2) і (3). Тоді вище описаним методом можна побудувати асимптотику розв'язку виду (8).

Список використаної літератури:

1. Wasow W. Asymptotic solution of the differential equation of hydrodynamic stability in a domain containing a transition point/ W.Wasow // Annals of mathematics. – 1958. - Vol.58, № 2 – P.222-252.
2. *Langer*, R. E. Formal solutions and a related *equation* for a class of fourth order differential*equations* of *hydrodynamic* type/ R.E. Langer // Trans. Amer. Math. Soc. – 1959. – V.92.–P.371-410.
3. Lin C.C. On the instability of laminar flow and its transition to turbulence/ C.C. Lin // Proceedings of the Symposium on Boundary Layer Research– Freiburg. – 1958. – Vol.5, – P. 144-160.
4. Lin C.C. On the asymptotic theory of a class of ordinary differential equations of forth order. II Existence of solutions which are approximated by the formal solutions/ C.C. Lin, A.L. Rabenstein // Studies in Appl. Math. – 1969. – Vol. 48. – P.311-340.
5. Awrejcewicz J. Introduction to Asymptotic Methods./J. Awrejcewicz, V. Krysko – New York: Champan Hall. CRC Taylor Group, 2006. – 242 p.

6. Зеленская И.А. Система сингулярно возмущенных уравнений с дифференциальной точкой поворота I рода/И.А. Зеленская // Известия вузов. Математика. – 2015. - № 3. -С. 63-74.

7. Болілий В.О. Нестабільна точка звороту в диференційному рівнянні третього порядку/ В.О. Болілий// Математичні Студії. – 2002. – Т.18, №2. – С.157-168.

8. Болилый В.А. Асимптотическое интегрирование системы дифференциальных уравнений с дифференциальной точкой поворота II рода/ В.А. Болилый, И.А. Зеленская // Межд. науч. журн. «Спектральные и эволюционные задачи». – 2013. – Т. 23 – С. 21-31.

9. Бобочко В.М. Асимптотичне інтегрування рівняння Ліувілля з точками звороту/ В.М. Бобочко В.М., М.О. Перестюк – Київ: Наукова думка, 2002. – 310 с.

10. Абрамовиц М. Справочник по спеціальнім функціям./ М.Абрамовиц, С. Стиган – М.: Наука, 1979. – 832с.

References

1. Wasow W.(1958). Asymptotic solution of the differential equation of hydrodynamic stability in a domain containing a transition point. *Annals of mathematics*, 58(2), 222-252.

2. ***Langer***, R. E.(1958) Formal solutions and a related ***equation*** for a class of fourth order differential***equations*** of ***hydrodynamic*** type. *Trans. Amer. Math. Soc.*

3. Lin C.C.(1958). On the instability of laminar flow and its transition to turbulence. *Proceedings of the Symposium on Boundary Layer Research,* 144-160.

4. Lin C.C., Rabenstein A.L.(1969). On the asymptotic theory of a class of ordinary differential equations of forth order. II Existence of solutions which are approximated by the formal solutions. *Studies in Appl. Math*, 48, 311-340.

5. Awrejcewicz J., Krysko V.(2006) Introduction to Asymptotic Methods. – New York: Champan Hall. CRC Taylor Group, 242.

6. Zelenska I. (2015). The system of singularly perturbed differential equations with turning point of the I kind.. *Izv. Vysshikh uchebnykh zavedenii. Mathematics, 3,* 63-74. (in Rus.)

7. Boliliy V.O.(2002). Non-stable turning point in the differential equation of the third order. *Matematychni studii,* 157-168. (in Uk.)

8. Boliliy V.O., Zelenska I.O. (2013). Asymptotic integration of systems of differential equations with differential turning point of II kind. Intern. Scient. Journal. Spectral and Evolution Problems: Proceeding of the Twenty Second Crimean Autumn Mathematical School-Symposium*,* 23, 21-31.(in Rus.)

9. Bobochko V.N., Perestuk M.O.(2006) *Asymptotic integration of the Liouville equation with turning points.* Kyiv: Naukova dumka, 310. (in Uk.)

10. Abramowitz and Stegun (1979). Handbook of Mathematical Functions. Moscow: Nauka, 832. (in Rus.)

Summary. ***V.O. Boliliy, I.O. Zelenska. Non-stable differential turning point of the 2-nd kind for the fourth order system.*** *This paper is concerned with the nonhomogeneous system of the singularly perturbed differential equations of the 4th order with the small parameter at the higher derivative. This system is consequence of reduction of the 4th order scalar singularly perturbed differential equations with the differentiable coefficients and the turning point of the second derivative and the Orr–Sommerfeld type equation with the small parameter of the fourth derivative. The reduced equation is the differential equation of the second order. The turning point is the second genre discontinuity in the solution of the reduced equation. The characteristic equation that corresponds to the system of interest has* *two identically zero roots and two simple roots which are identically double. Due to the method of essential singular functions the new regularizing variable is obtained and the extension of the vector equation is kept. Asymptotic forms of solutions for the homogeneous problem are constructed with the help of Airy functions and their derivatives. Asymptotic forms of solutions for the nonhomogeneous problem are constructed using Scorer functions. The article discusses the variation of the non-stable turning point or the variation when the turning point is on the left of origin.*

Keywords: linear system, small parameter, turning point, space of the nonresonance solutions, Airy-Langer model operator, Orr–Sommerfeld type equation.

Одержано редакцією 17.08.2016 Прийнято до друку 21.09.2016

УДК 62-50:519.7 PACS 05

В.В. Кириченко, Є.В. Лесіна

ОСОБЛИВОСТІ ДИСКРЕТНИХ АЛГОРИТМІВ ПЕРЕТВОРЕННЯ ІНФОРМАЦІЇ ЗА ДОПОМОГОЮ ОБЕРНЕНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

Комп'ютерна реалізація алгоритмів перетворення інформації на основі хаотичної динаміки приводить до необхідності дискретизації систем. Робота присвячена вивченню особливостей обернених дискретних систем керування як перетворювачів інформації, зокрема, такої їхньої властивості, як динамічна деградація. Вона полягає в можливому різкому зменшенні дискретної множини станів складної динамічної системи при введенні інформаційного повідомлення. В значній мірі це явище залежить від початкових значень траєкторій та параметрів системи. Наведено приклад динамічної системи, траєкторії якої мають складну внутрішню динаміку, але при введенні в неї інформаційного повідомлення потрапляють на нульовий інваріантний многовид. Тим самим, замість шифрування вхідної інформаційної послідовності, вихід системи для будь-яких значень ключових параметрів, починаючи з деякого моменту, в точності передає значення інформаційного входу з одиничною затримкою.

Ключові слова: обернені динамічні системи, динамічна деградація, кільце цілих чисел, генератори псевдовипадкових послідовностей, шифрування, функція керування.

Вступ

У зв'язку з розвитком супутникових, мобільних, комп’ютерних комунікаційних систем зростає значення проблеми конфіденційності передачі інформації і більш широкої проблеми захисту інформації на ринку комунікаційних послуг. У наш час виникає нагальна потреба у захисті комерційної інформації в комп'ютерних мережах, забезпечення безпеки електронних платежів та інтернет-телефонії і таке ін. Типовою вимогою стає необхідність масового застосування алгоритмів кодування та їх низька собівартість на одиницю «інформаційної» продукції. В останній час, з появою роботи