

КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ У ФІЗИЦІ

УДК 532.5

PACS 02.60.Cb, 02.70.-c, 05.10.-a, 05.20.Dd, 47.11.-j

А.А. Остапенко, О.Н. Буланчук, Г.Г. Буланчук

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ПЕРЕМЕННОЙ СКОРОСТИ ЗВУКА В ЯЧЕЙКЕ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ТЕЧЕНИЯ В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ И ОБТЕКАНИЯ КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА ПОТОКОМ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ РАСЧЕТЕ МЕТОДОМ РЕШЕТОЧНЫХ УРАВНЕНИЙ БОЛЬЦМАНА

В данной работе исследуется методика моделирования двумерных течений вязкой жидкости методом решеточных уравнений Больцмана, когда скорость звука в ячейке не является фиксированной величиной, а зависит от размера ячейки расчетной сетки и шага по времени. Такой подход позволяет избежать неустойчивости метода, управлять размером расчетной сетки, шагом по времени и числом Маха. Исследованы способы задания некоторых типов граничных условий и предложен новый способ задания условия постоянного давления. Показаны результаты тестирования алгоритма на задачах о течении жидкости в плоском канале и обтекании кругового цилиндра в плоском канале. В работе также предложен метод расчета числа Струхала для нестационарного вихревого течения.

Ключевые слова: метод решеточных уравнений Больцмана, скорость звука в ячейке, вязкая жидкость, число Маха, вихревая дорожка Кармана, число Струхала

Введение

Метод решеточных уравнений Больцмана (LBM от англ. Lattice Boltzmann Method) – класс методов вычислительной гидродинамики (CFD), использующий кинетическую теорию газов для моделирования динамики жидкости [1]. Данный метод в отличие от классических подходов, таких как, например, метод конечных элементов [2], метод конечных объемов [3], метод дискретных вихрей [4], метод диффузионных скоростей [5], гидродинамика сглаженных частиц [6], не использует уравнения Эйлера и Навье – Стокса для моделирования динамики жидкости. Вместо привычных характеристик потока, таких как скорость, плотность и давление, LBM оперирует дискретными функциями распределения плотности частиц.

Метод LBM появился в 1990 году и продолжает бурно развиваться. Это связано с широким спектром его вычислительных возможностей. В исследованиях последних лет метод решеточных уравнений Больцмана применялся для моделирования многофазных систем [7], теплопереноса [8], многокомпонентных течений [9], систем с подвижными границами [10], а также систем со свободной поверхностью [11]. Созданы как коммерческие (PowerFLOW, XFlow), так и свободно распространяемые (Palabos) пакеты программ для расчета задач вычислительной гидродинамики, основанные на LBM.

При моделировании изотермических однокомпонентных течений методом решеточных уравнений Больцмана используют безразмерную скорость звука в ячейке c_s [м/с][7]. Несмотря на то, что в теории, в частности в работе [12], описана связь скорости звука с другими параметрами, в практических расчетах, в частности в работах [13-26], скорость звука в ячейке принимают фиксированной величиной, а именно

$c_s = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Вариации данного параметра могут открыть дополнительные возможности

метода, среди которых управление точностью и скоростью вычислений одновременно с заданием вязкости жидкости. Это позволит избежать неустойчивости решения, возникающей при вариации скоростью потока жидкости.

Целью данной работы является исследование влияния скорости звука в ячейке на алгоритм метода решеточных уравнений Больцмана, постановку граничных условий и результаты численного решения некоторых задач гидродинамики.

1. Метод решеточных уравнений Больцмана: D2Q9 BGK модель

В рамках LBM вычислительная область разбивается на ячейки некоторой формы (2D: прямоугольник, шестиугольник; 3D: параллелепипед), что задает на ней решетку [15]. В ячейках этой решетки находятся псевдочастицы, которые определяют динамику жидкости. Возможные направления перемещения псевдочастиц определяются типом решетки (рис. 1) Например, D3Q18 – трехмерный тип решетки с 18 возможными направлениями перемещения псевдочастиц.

Псевдочастицы описываются статистически посредством дискретной функции распределения плотности частиц f_k [15]. Отметим, что в рамках кинетической теории газов функция распределения плотности частиц – плотность вероятности нахождения частицы около точки шестимерного фазового пространства (координат и скоростей) [27].

В рамках данной работы динамику жидкости будем моделировать двумерной девятискоростной моделью метода решеточных уравнений Больцмана (D2Q9) [16]. Область разобьем ячейками квадратной формы со стороной d . Каждая ячейка расчетной сетки будет содержать девять значений функции распределения плотности $f_k, k = \overline{0,8}$, которые соответствуют девяти возможным направлениям перемещения псевдочастиц. На рисунке 2 показаны возможные направления перемещения частиц \vec{e}_k . Направление \vec{e}_0 соответствует состоянию покоя.

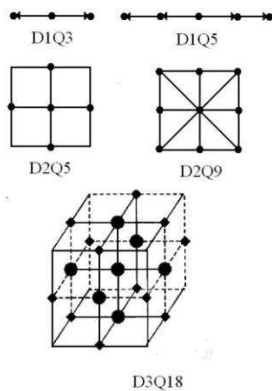


Рис. 1. Типы решеток.

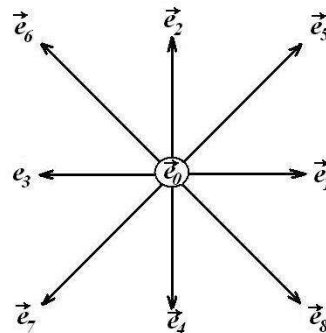


Рис. 2. Возможные направления перемещения частиц для двумерной девятискоростной модели D2Q9.

Кинематическая вязкость в LBM определяется по формуле [28]:

$$\nu = c_s^2 \Delta t \left(\tau - \frac{1}{2} \right) \text{ [м}^2/\text{с]} \quad (1)$$

где c_s – скорость звука в ячейке, связанная с базовой скоростью в ячейке $c = \frac{d}{\Delta t}$ соотношением [12]:

$$c_s = \frac{1}{\sqrt{3}} c = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{d}{\Delta t} \quad [\text{м/с}] \quad (2)$$

где Δt – шаг по времени

τ – безразмерный параметр релаксации [16]. Исходя из (1) и условия $\nu > 0$, получим ограничение: $\tau > 0.5$. Поскольку вариации τ могут привести к неустойчивости, то следуя работе [16] примем $\tau = 1$, что обеспечит устойчивость решения.

Подставив (2) в (1), получим:

$$\nu = \frac{1}{3} c^2 \Delta t \left(\tau - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{3} \frac{d^2}{\Delta t} \left(\tau - \frac{1}{2} \right) \quad (3)$$

При моделировании течения жидкости методом решеточных уравнений Больцмана, в частности в работах [13-26], полагают $c = 1$, так что в соответствии с (2): $d = \Delta t$. Фиксированное значение $c = 1$, в соответствии с формулами (2, 3) однозначно определит шаг по времени и размер расчетной сетки [29]. Мы отойдем от данного упрощения, что позволит нам управлять точностью вычислений (размерами расчетной сетки) и производить расчеты эффективнее (за меньшее число итераций, управляя шагом по времени). Таким образом, после задания вязкости ν и размера ячеек расчетной сетки d можно вычислить шаг по времени:

$$\Delta t = \frac{1}{3} \frac{d^2}{\nu} \left(\tau - \frac{1}{2} \right) \quad [\text{с}] \quad (4)$$

Система дискретных кинетических уравнений, описывающая динамику ансамбля псевдочастиц, имеет вид [15]:

$$f_k(\vec{r} + \vec{e}_k d, t + \Delta t) = f_k(\vec{r}, t) + \Omega_k, k = \overline{0,8}. \quad (5)$$

где Ω_k – оператор столкновения [15] (модель интеграла столкновения)

$\vec{r} = (x, y)$ – вектор координат,

t – время;

Далее будем использовать модель интеграла столкновения в виде BGK (Bhatnagar-Gross-Krook) приближения [17], которое представляет собой линейную релаксацию к локальному равновесию Максвелла в виде [17]:

$$\Omega_k = \frac{f_k^{eq}(\vec{r}, t) - f_k(\vec{r}, t)}{\tau} \quad (6)$$

В рамках ЛВМ для изотермических течений воспользуемся разложением равновесной функции распределения Максвелла в ряд по степеням вектора скорости \vec{u} в виде [17]:

$$f_k^{eq}(\vec{r}, t) = w_k \rho(\vec{r}, t) \left(1 + \frac{(\vec{c} \vec{e}_k, \vec{u}(\vec{r}, t))}{c_s^2} + \frac{1}{2} \frac{(\vec{c} \vec{e}_k, \vec{u}(\vec{r}, t))^2}{c_s^4} - \frac{1}{2} \frac{\vec{u}(\vec{r}, t)^2}{c_s^2} \right) \quad (7)$$

где w_k – весовые коэффициенты; ρ – плотность жидкости;

\vec{u} – вектор скорости;

Для модели D2Q9 весовые коэффициенты имеют вид: $w_0 = \frac{4}{9}$; $w_{1-4} = \frac{1}{9}$; $w_{5-8} = \frac{1}{36}$ [17].

Плотность ρ , скорость \vec{u} и давление p жидкости вычисляются по формулам [17]:

$$\rho(\vec{r}, t) = \sum_{k=0}^8 f_k(\vec{r}, t); \quad \vec{u}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\rho(\vec{r}, t)} \sum_{k=0}^8 c e_k f_k(\vec{r}, t); \quad p(\vec{r}, t) = c_s^2 \rho(\vec{r}, t) \quad (8)$$

Преимуществами рассматриваемого метода являются:

Простота в описании и программировании, поскольку для описания динамики жидкости используется статистический подход и частицы находятся в поступательном движении;

Простота в описании граничных условий, что позволяет моделировать системы со сложной геометрией;

Возможность распараллелить алгоритм на CPU и GPU, в частности используя технологию CUDA, что дает существенный прирост скорости вычислений [25].

Недостатком метода LBM является его условная устойчивость. На устойчивость решения влияет:

c_s – скорость звука в ячейке. Как показано в работе [15], метод остается устойчивым при выполнении условия: $c_s < \sqrt{1 - U_{\max}^2}$, где U_{\max} – максимальное значение скорости в расчетной области.

τ – параметр релаксации. Чтобы избежать негативного влияния параметра релаксации на результаты расчетов, полагают $\tau = 1$ [16].

c – базовая скорость в ячейке. Как показано в работе [31], метод остается устойчивым при выполнении условия: $M \ll 1$, где M – число Маха метода LBM (далее просто число Маха), вычисляемое по формуле:

$$M = \frac{U_{\max}}{c} \quad (9)$$

Поскольку в данной работе $c \neq 1$, то следует следить за тем, чтобы выполнялось соотношение: $U_{\max} \ll c$.

2. Постановка граничных условий

Корректная постановка граничных условий является не менее важной, чем сам алгоритм вычислений. В рамках метода решеточных уравнений Больцмана существуют различные способы задания граничных условий (ГУ), однако четко описанных и универсальных директив не существует. И хотя, как и утверждают многие авторы, постановка граничных условий в рамках LBM не представляет сложности ввиду рассматриваемого кинетического подхода, выбор способа задания ГУ зависит от решаемой задачи и требует некоторой интуиции, поскольку может привести к большим вычислительным погрешностям или неустойчивости решения.

В рамках данной работы были использованы три типа граничных условий:

Условие непротекания. Условие непротекания осуществляется наиболее простым алгоритмом, при котором все частицы, задаваемые функцией плотности распределения, попав на границу среды, полностью от нее отражаются в обратном направлении [32].

Задание потока на входе. При задании потока жидкости на входе выделяют два уровня описания жидкости: макроскопический и микроскопический. Методика задания данного типа граничных условий подробно изложена в [16, 33]. Опишем постановку условия потока на входе для метода с переменной скоростью звука и геометрией, показанной на рис. 3.

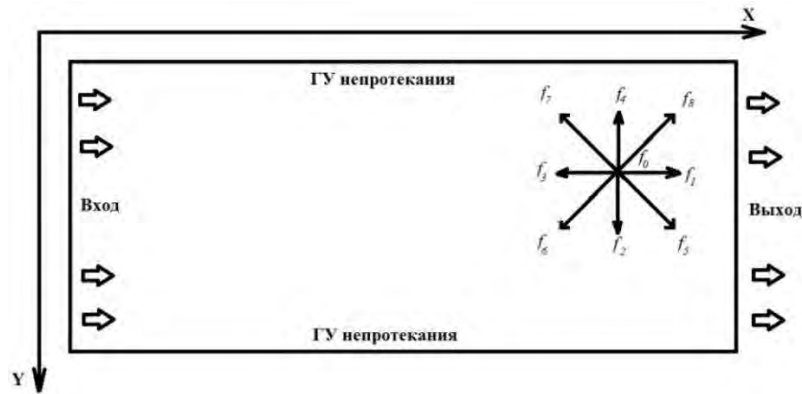


Рис. 3. К постановке граничных условий.

Сначала, на макроскопическом уровне задаются компоненты скорости $u_x(\vec{r}, t)$ и $u_y(\vec{r}, t)$. По известным значениям функции распределения, с использованием методики изложенной в работе [32], можно вычислить плотность на границе. С учетом переменной скорости звука в ячейке плотность вычисляется по формуле:

$$\rho(\vec{r}, t) = \frac{(f_0 + f_2 + f_4) + 2(f_3 + f_6 + f_7)}{1 - \frac{1}{c} u_x(\vec{r}, t)} \quad (10)$$

Затем, на микроскопическом уровне рассчитываются неизвестные функции распределения на границе по формулам:

$$\begin{aligned} f_1(\vec{r}, t) &= f_3(\vec{r}, t) + \frac{2}{3c} \rho(\vec{r}, t) u_x(\vec{r}, t) \\ f_5(\vec{r}, t) &= f_7(\vec{r}, t) + \frac{1}{2} (f_4(\vec{r}, t) - f_2(\vec{r}, t)) + \frac{1}{6c} \rho(\vec{r}, t) u_x(\vec{r}, t) \\ f_8(\vec{r}, t) &= f_6(\vec{r}, t) + \frac{1}{2} (f_2(\vec{r}, t) - f_4(\vec{r}, t)) + \frac{1}{6c} \rho(\vec{r}, t) u_x(\vec{r}, t) \end{aligned}$$

Граничное условие на выходе. На выходе жидкости из домена задается условие постоянного давления. Существует методика, аналогичная заданию потока на входе, описанная в [16]. Однако, она не применима к описанному в данной работе алгоритму, ввиду введенных изменений. Поэтому будем использовать следующий способ. Сначала зададим u_x компоненту скорости жидкости на границе, равную скорости на предыдущем слое расчетной сетки $u_x(N_x - 1, j) = u_x(N_x - 2, j)$. Здесь N_x – количество ячеек вдоль оси x . Компонента скорости u_y принимается равной нулю: $u_y(N_x - 1, j) = 0$. Все девять значений функции распределения пересчитываются по формуле (7). Таким образом, на правой границе происходит релаксация функций распределения к локальному равновесию.

3. Моделирование течения в плоском канале

Все приведенные далее расчеты были произведены в оригинальной программе, написанной на языке C++ в среде разработки программного обеспечения Visual Community 2015 с применением технологии распараллеливания OpenMP.

Протестируем приведенный алгоритм на одной из самых распространенных тестовых задач вычислительной гидродинамики – задачи о течении вязкой жидкости в плоском канале. Будем исследовать не только корректность расчетов, но и влияние

числа Маха на точність отриманих результатів, оскільки швидкість звуку пов'язана з числом Маха співвідношеннями (2, 9).

Розрахункова область – прямокутник з розмірами 1×3 (рис. 3). Зверху і знизу задані умови непротекання, зліва задані потік рідини, справа – стік рідини, реалізуваний через умову постійного тиску. Будемо розглядати стаціонарні ламінарні течення з числами Рейнольдса $Re = 10, 100, 200$. Отримані результати, а саме профіль швидкості на виході, будемо порівнювати з результатами, отриманими методом кінцевих елементів (FEM, від англ. Finite Element Method) в пакеті Comsol Multiphysics.

При моделюванні течень в пакеті Comsol Multiphysics будемо використовувати фізику ламінарних течень (*laminar flow spf*), в якій задамо такі ж початкові і граничні умови, як описано вище. В розділі *materials* задамо в'язкість рідини, значення якої будемо змінювати для досягнення необхідного числа Рейнольдса. Розрахункову сітку побудуємо самостійно, вибрав параметр *user-controlled mesh*. При моделюванні обоими методами використовувалися однакові рівномірні розрахункові сітки: $150 \times 450, 200 \times 600, 250 \times 750$.

Розглянемо профілі швидкості на виході з каналу для установившогося течення з числом Рейнольдса $Re = 10$, отримані LBM і FEM на різних сітках (рис. 4).

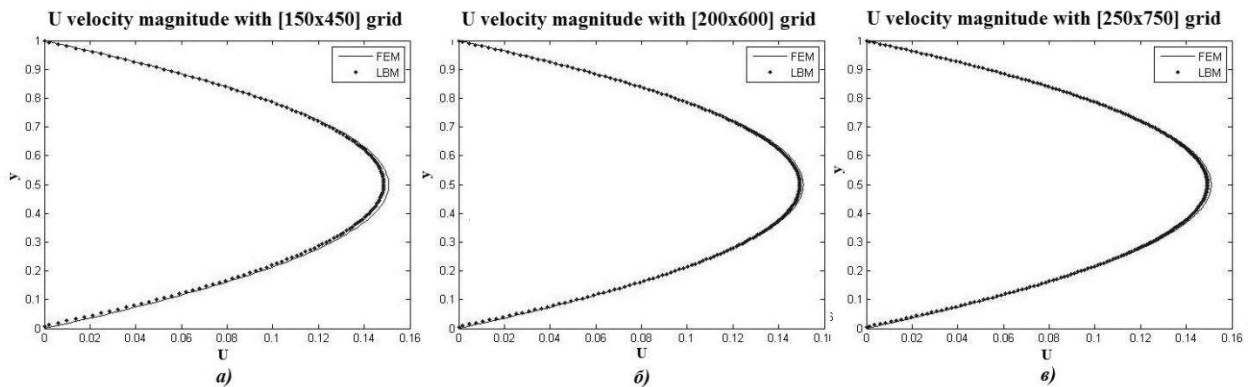


Рис. 4. Профілі модуля швидкості, отримані методами LBM і FEM: (а) – сітка 150×450 , $M=0,017$, $Re=10$; (б) – сітка 200×600 , $M=0,0125$, $Re=10$; (в) – сітка 250×750 , $M=0,01$, $Re=10$.

По отриманих результатах побудуємо відповідні графіки відносної погрешності (рис. 5).

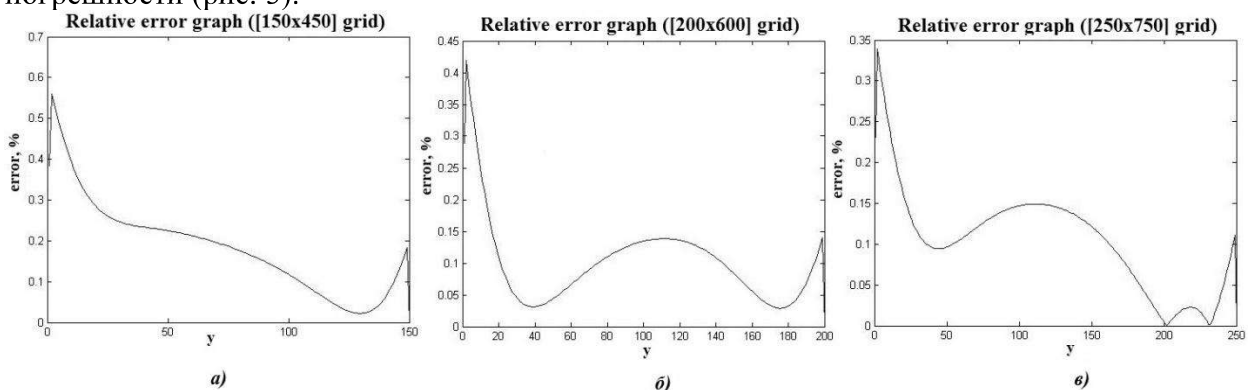


Рис. 5. Графіки відносної погрешності LBM: (а) – сітка 150×450 , $M=0,017$, $Re=10$; (б) – сітка 200×600 , $M=0,0125$, $Re=10$; (в) – сітка 250×750 , $M=0,01$, $Re=10$.

Как видно из рис. 5, точность полученных методом LBM результатов зависит от числа Маха. При $M \leq 0,017$ относительная погрешность вычислений не превышает 0,6%.

Рисунки 6 и 7 иллюстрируют полученные профили скорости и графики относительной погрешности соответственно для числа Рейнольдса $Re = 100$.

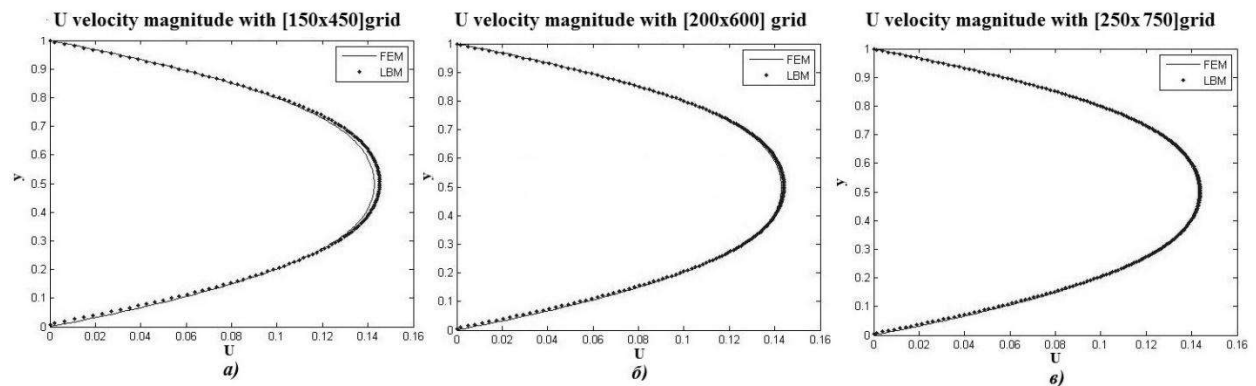


Рис. 6. Профиля модуля скорости, полученные методами LBM и FEM: (а) – сетка 150×450 , $M=0,16$, $Re=100$; (б) – сетка 200×600 , $M=0,1$, $Re=100$; (в) сетка 250×750 , $M=0,1$, $Re=100$.

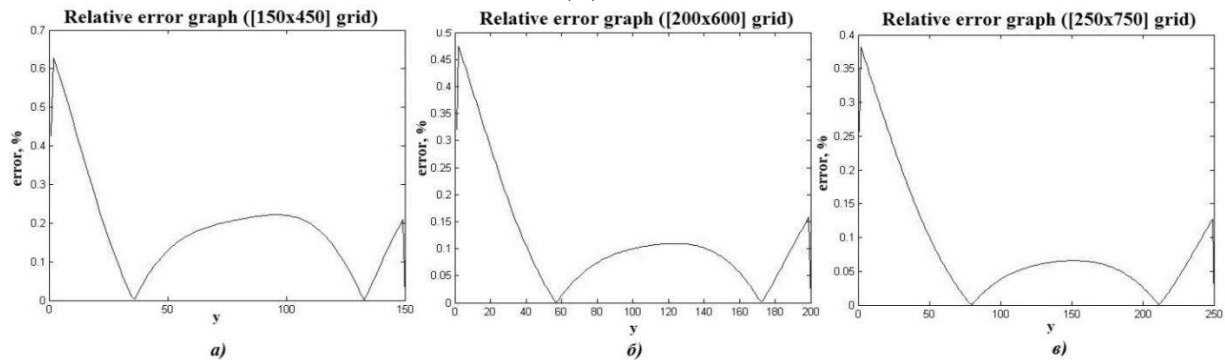


Рис. 7. Графики относительной погрешности LBM: (а) – сетка 150×450 , $M=0,16$, $Re=100$; (б) – сетка 200×600 , $M=0,12$, $Re=100$; (в) – сетка 250×750 , $M=0,1$, $Re=100$.

Как показано на рис. 7, относительная погрешность вычислений не превышает 0,7% при $M \leq 0,16$.

Рассмотрим течение с числом Рейнольдса $Re = 200$. Профили скорости изображены на рис. 8, а соответствующие им графики относительной погрешности показаны на рис. 9.

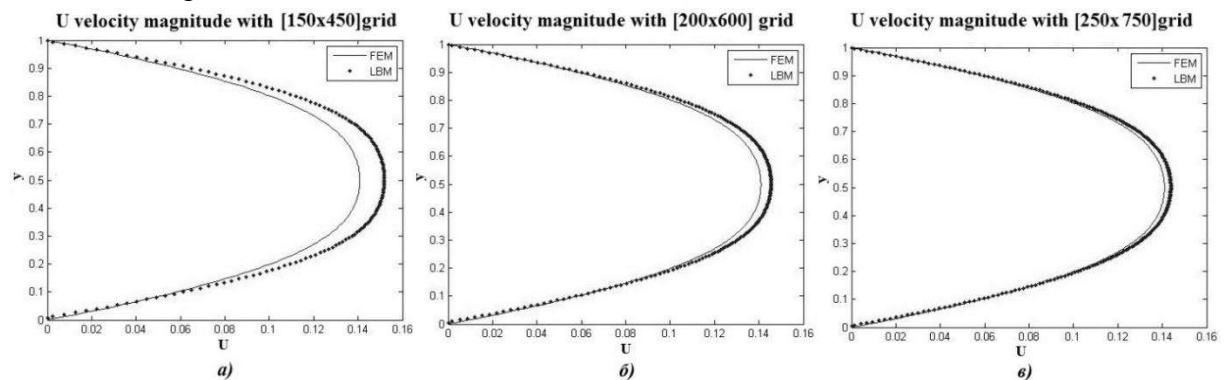


Рис. 8. Профиля модуля скорости, полученные методами LBM и FEM: (а) – сетка 150×450 , $M=0,32$, $Re=200$; (б) – сетка 200×600 , $M=0,24$, $Re=200$; (в) сетка 250×750 , $M=0,19$, $Re=200$.

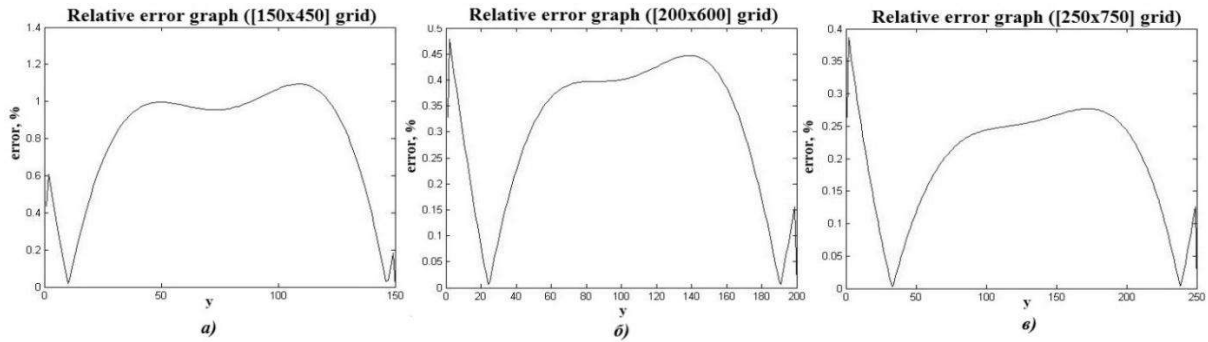


Рис. 9. Графики относительной погрешности LBM: (а) – сетка 150×450 , $M=0,32$, $Re=200$; (б) – сетка 200×600 , $M=0,24$, $Re=200$; (в) – сетка 250×750 , $M=0,19$, $Re=200$.

Как можно видеть на рис. 4-9, предложенный алгоритм позволяет получить решения с хорошей точностью, с относительной погрешностью меньше 1%, если число Маха $M < 0.3$. Аналогичные выводы были сделаны в работе [29] и соответствуют теории [31], что говорит об адекватности предложенного алгоритма.

4. Моделирование обтекания кругового цилиндра в плоском канале

Протестируем алгоритм на предмет корректности моделирования обтекания тела потоком вязкой жидкости. Изменим предыдущую задачу, добавив в канал круговой цилиндр радиуса $R = 0.1$ (рис. 10).

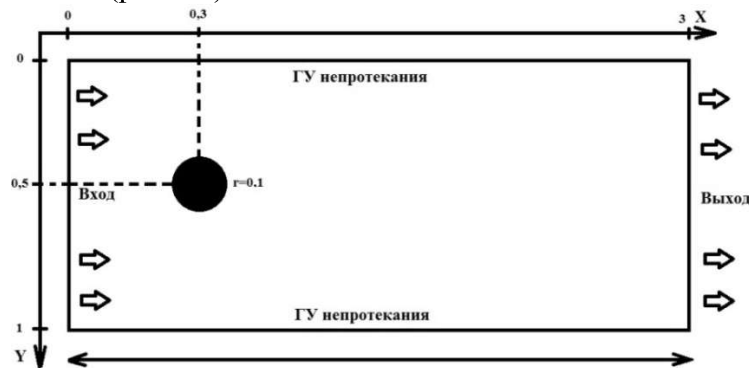


Рис. 10. К постановке задачи об обтекании цилиндра в трубе.

Выполним моделирование обтекания цилиндра жидкостью методом решеточных уравнений Больцмана с числами Рейнольдса $Re = 10, 60, 100$ и сравним полученные результаты с существующими теоретическими исследованиями и результатами других численных экспериментов. Согласно исследованиям, в частности приведенных в работах [34, 35], характер течения при обтекании цилиндра определяется числом Рейнольдса (рис. 11), а именно:

При $Re < 5$ течение полностью симметрично;

При $5 < Re < 40$ позади цилиндра образуются два симметричных вихря за счет отрыва пограничного слоя, образованного на передней половине цилиндра;

При $40 < Re < 10^3$, в результате отрыва вихрей от цилиндра, образуется вихревая дорожка Кармана. Причем с ростом числа Рейнольдса растет и частота отрыва вихрей;

При $10^3 < Re < 10^5$ частота отрыва вихрей становится постоянной величиной;

При $Re > 10^5$ регулярность отрыва нарушается и течение становится полностью турбулентным.

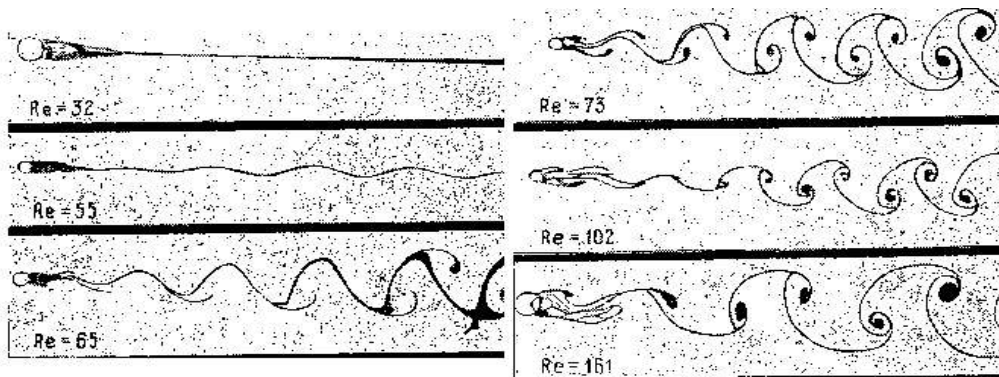


Рис. 11. Влияние числа Рейнольдса на характер течения при обтекании кругового цилиндра.

Рисунок 12 иллюстрируют результаты, полученные методом решеточных уравнений Больцмана с переменной скоростью звука в ячейке, а именно диаграммы u_x , u_y компонент скорости и модуля скорости u при обтекании кругового цилиндра в плоском канале ламинарным потоком с числами Рейнольдса $Re = 10, 60, 100$.

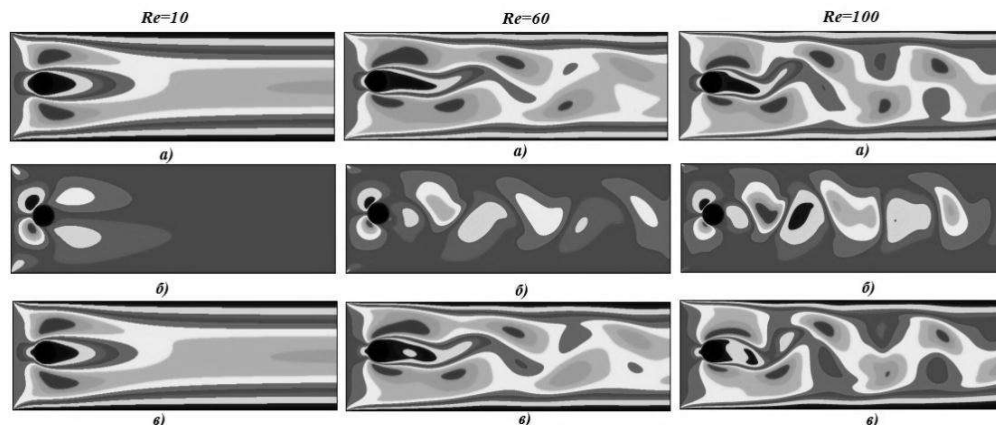


Рис. 12. Обтекания цилиндра ламинарным потоком, выполненное LBM для разных чисел Рейнольдса: *a* – диаграмма u_x компоненты скорости; *б* – диаграмма u_y компоненты скорости; *в* – диаграмма модуля скорости.

Как видно из рис. 12, при обтекании цилиндра течениями с числами Рейнольдса $Re = 60, 100$ за цилиндром появляются чередующиеся вихри и образуется так называемая вихревая дорожка Кармана. Причем, образование вихрей происходит при $Re > 40$, что соответствует результатам, показанным в работах [34, 35].

Оценим адекватность предложенного метода для нестационарного вихревого течения, возникающего при обтекании кругового цилиндра потоком вязкой жидкости. Для течений с $Re = 60, 100$ рассчитаем число Струхалия и сравним полученное значение с результатами, предсказанными в работе [36].

Как показано в работе [37], число Струхалия можно вычислить по формуле:

$$Sh = 0,809 \frac{D}{l}$$

где D – диаметр кругового цилиндра;

l – горизонтальное расстояние между вихрями (рис. 13).

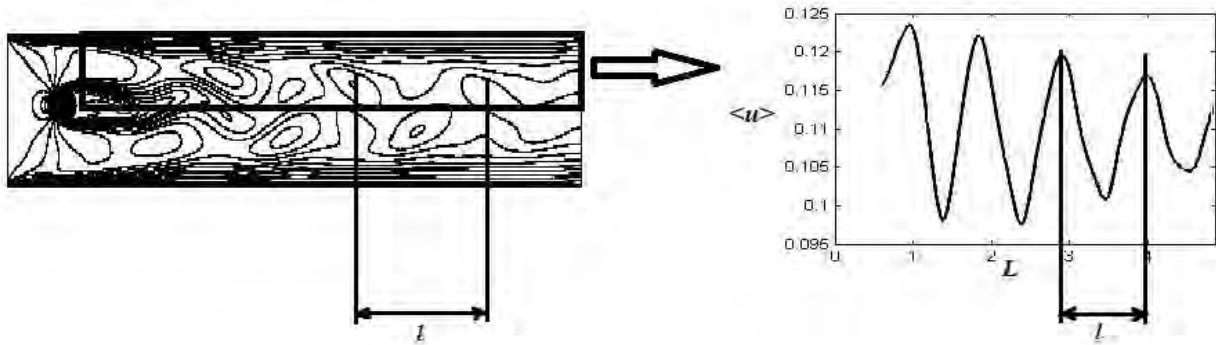


Рис. 13. К вычислению числа Струхалия по вихревой дорожке Кармана.

Для вычисления горизонтального расстояние между вихрями используем следующий подход. Разделим область за цилиндром прямой, проходящей через центр обтекаемого тела так, чтобы чередующиеся вихри оказались по обе стороны от прямой (рис. 13). Вычислив среднее значение скорости $\langle u \rangle$ вдоль канала в рассматриваемой области получим кривую, изображенную на рис. 13. По данным полученной кривой, пики которой соответствуют центрам вихрей, найдем горизонтальное расстояние между вихрями l и рассчитаем число Струхалия. Сравним полученные результаты с теоретическими данными. Согласно работе [36], число Струхалия равно $Sh=0,1371$ при $Re=60$ и равно $Sh=0,1671$ при $Re=100$.

Таблица 1

Результаты расчета числа Струхалия, полученные LBM
с разными числами Маха M и $Re=60$

-	$N=300$ $M=0,29$	$N=400$ $M=0,21$
Sh в данной работе	0,1480	0,1464
Относительная погрешность, %	8,0%	6,8%

Таблица 2

Результаты расчета числа Струхалия полученные LBM
с разными числами Маха M и $Re=100$

-	$N=500$ $M=0,34$	$N=700$ $M=0,21$
Sh в данной работе	0,1721	0,1651
Относительная погрешность, %	3,0%	1,2%

Таким образом, полученные результаты полностью соответствуют теоретическим и экспериментальным данным. Как и предполагалось из теоретических соображений [31], результатов численных экспериментов, изложенных в работе [29] и результатов, полученных в предыдущем пункте настоящей статьи для получения результатов с погрешностью менее 10% число Маха должно быть $M < 0,3$.

Выводы

В настоящей работе, в рамках метода решеточных уравнений Больцмана, исследовалась возможность манипуляции скоростью звука в ячейке. Переменное значение скорости звука позволяет при моделировании задавать вязкость среды и размеры расчетной сетки в отличие от классического подхода, при котором задание вязкости однозначно определяет размеры расчетной сетки и наоборот. Подобный

подход позволяет избежать неустойчивости метода и управлять точностью и скоростью вычислений. Недостатком подобного подхода может быть введение в алгоритм дополнительных переменных и модификация способов задания граничных условий.

Предложенный алгоритм был протестирован на задачах о течении в плоском канале и обтекании кругового цилиндра потоком вязкой жидкости с числами Рейнольдса $Re \leq 100$. Произвести моделирование течений с большими числами Рейнольдса не удалось из-за неоправданно большого времени моделирования. На основании полученных результатов можно сделать вывод, что исследуемый подход может быть использован для решения задач гидродинамики при малых и умеренных числах Рейнольдса и получения решений с высокой точностью ($<10\%$).

Следует отметить, что метод решеточных уравнений Больцмана обладает огромным потенциалом. В дальнейшем планируется произвести модификацию алгоритма с целью получения устойчивых решений при больших числах Рейнольдса и с более сложной геометрией.

Список использованной литературы:

1. Succi S. The Lattice Boltzmann Equation: A New Tool For Computational Fluid-Dynamics / S. Succi, R. Benzi // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. – 1991. – Vol. 47. – P. 219-230.
2. Strang G. An Analysis of The Finite Element Method / G. Strang. – Englewood-Cliffs: Prentice Hall, 1973. – 400 p.
3. Eymard R. Finite volume methods / R. Eymard, T.R. Gallouet, R. Herbin // *Techniques of Scientific Computing*. – 2000. – Vol. 7. – P. 713-1020.
4. Белоцерковский С. М. Метод дискретных вихрей и турбулентность / С.М. Белоцерковский, Б.Ю. Скобелев. – Новосибирск: ИТПМ, 1993. — 38 с.
5. Ogami Y. Viscous flow simulation using the discrete vortex model - the diffusion velocity method / Y. Ogami, T. Akamatsu // *Computers & Fluids*. – 1991. – Vol. 19, № 3. – P. 433-441.
6. Monaghan J.J. An introduction to SPH / J.J. Monaghan // *Computer Physics Communications*. – 1988. – Vol. 48. – P. 88-96.
7. Куперштох А.Л. Трехмерное моделирование двухфазных систем типа жидкость-пар методом решеточных уравнений Больцмана на GPU / А.Л. Куперштох // *Вычислительные методы и программирование*. – 2012. – № 13. – С. 130-138.
8. Grazyna K. The numerical solution of the transient heat conduction problem using the lattice Boltzmann method / K. Grazyna // *Scientific Research of the Institute of Mathematic and Computer Science*. – 2006. – № 11. – P. 23-30.
9. Leclaire S. Enhanced equilibrium distribution functions for simulating immiscible multiphase flows with variable density ratios in a class of lattice Boltzmann models / S. Leclaire, N. Pellerin, M. Reggio, J.-Y. Trepanier // *International Journal of Multiphase Flow*. – 2013. – Vol. 57. – P. 159-168.
10. Favier J. A lattice Boltzmann-immersed boundary method to simulate the fluid interaction with moving and slender flexible objects / J. Favier, A. Revell, A. Pinelli // *Journal of Computational Physics*. – 2014. – № 261. – P. 145-161.
11. Anderl D. Free surface lattice Boltzmann with enhanced bubble model / D. Anderl, S. Bogner, C. Rauh, U. Rude, A. Delgado // *Computers and Mathematics with Applications*. – 2014. – Vol.67, № 2. – P. 331-339.
12. Coupanec E. Boundary conditions for the lattice Boltzmann method. Mass conserving boundary conditions for moving walls / E. Coupanec. – Trondheim: Norwegian University of Science and Technology. Department of Energy and Process Engineering, 2010. – 39 p.

13. Mussa M. Numerical Simulation of Lid-Driven Cavity Flow Using the Lattice Boltzmann Method / M. Mussa // *Applied Mathematics*. – 2008. – Vol. 13. – P. 236-240.
14. Hong X. Research of Micro-Rectangular-Channel Flow Based on Lattice Boltzmann Method / X. Hong, W. Di, S. Yuhe // *Research Journal of Applied Science, Engineering and Technology*. – 2013. – Vol.6, №14. – P. 2520-2525.
15. Wolf-Gladrow D. Lattice-Gas Cellular Automata and Lattice Boltzmann Models - An Introduction / D. Wolf-Gladrow. – Bremerhaven: Alfred Wegener Institute for Polar and Marine, 2005. – 273 p.
16. Sucop M. Lattice Boltzmann Modeling. An Introduction for Geoscientists and Engineers / M.Sucop. – Miami: Springer, 2006. – 171 p.
17. Rettinger C. Fluid Flow Simulation using the Lattice Boltzmann Method with multiple relaxation times / C. Rettinger. – Erlanger: Friedrich-Alexander University Erlanger-Nuremberg, 2013. – 38 p.
18. Martinez D.O. Comparison of spectral method and lattice Boltzmann simulations of two-dimensional hydrodynamics / D.O. Martinez, W.H. Matthaeus, S. Chen, D.C. Montgomery // *Physics of Fluids*. – 1994. – Vol.6, № 3. – P. 1285-1298.
19. Mohamad A.A. Lattice Boltzmann Method. Fundamentals and Engineering Applications with Computer Codes / A.A. Mohamad. – London: Springer, 2011. – 178 p.
20. Agrawal T. Implementation of an incompressible lattice Boltzmann model on GPU to simulate Poiseuille flow / T.Agrawal, C. Lin // *Proceeding of the Forties National Conference on Fluid Mechanics and Fluid Power*. – 2013. – Vol. 40. – P. 991-995.
21. Horwitz J.A. Lattice Boltzmann Simulations of Multiphase Flows / J.A. Horwitz. – Illinois: University of Illinois at Urbana-Champaign, 2013. – 166 p.
22. Wang L. Direct simulation of viscous flow in a wavy pipe using the lattice Boltzmann approach / L. Wang // *Engineering Systems Modelling and Simulation*. – 2008. – Vol.1, №1. – P. 20-29.
23. Тыринов А.И. Моделирование микротечений методом решеток Больцмана / А.И. Тыринов, А.А. Авраменко, Б.И. Басок, Б.В. Давыденко // *Промышленная теплотехника*. – 2011. – Т.33, №2. – С. 11-18.
24. Захаров А.М. Моделирование течений методом решеточных уравнений Больцмана со многими временами релаксации / А.М. Захаров, Д.С. Сенин, Е.А. Грачев // *Вычислительные методы и программирование*. – 2014. – Т. 15. – С. 644-657.
25. Бикулов Д.А. Реализация метода решеточных уравнений Больцмана для расчетов на GPU-кластере / Д.А. Бикулов, Д.С. Сенин, Д.С. Демин, А.В. Дмитриев, Н.Е. Грачев // *Вычислительные методы и программирование*. – 2012. – Т.13. – С. 13-19.
26. Самойлов Д.А. Вычислительные возможности метода решеточного кинетического уравнения Больцмана / Д.А. Самойлов, А.С. Губкин // *Вестник Тюменского Государственного Университета. Физико-Математические науки. Информатика*. – 2014. – № 7. – С. 83-91.
27. Ляпин И.И. Введение в теорию кинетических уравнений: Учебное пособие / И.И. Ляпин. – Екатеринбург: УГТУ-УПИ, 2003. – 205 с.
28. Aslan E. Investigation of the Lattice Boltzmann SRT and MRT Stability for Lid Driven Cavity Flow / E. Aslan, I. Taymaz, A.C. Benim // *International Journal of Materials, Mechanics and Manufacturing*. – 2014. – Vol.2, №4. – P. 317-324.
29. Bulanchuk G. Stability investigation of the two-dimensional nine-vectors model of the lattice Boltzmann method for fluid flows in a square cavity / G. Bulanchuk, O. Bulanchuk, A. Ostapenko // *Вестник Харьковского нац. унив. им. В.Н. Каразина. Серия: Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления*. – 2015. – № 28. – С. 113-125.

30. Franse M. Large Scale Lattice-Boltzmann Simulations / M. Franse. – The Netherlands, Enschede: PrintPartners Ipskamp, 1999. – 162 p.
31. He X. Lattice Boltzmann Model for the Incompressible Navier – Stokes Equation / X. He // Journal of statistical physics. – 1997. – Vol.88. – P. 927–944.
32. Succi S. The Lattice Boltzmann Equation for Fluid Dynamics and Beyond / S. Succi. – Oxford: Univercity Press, 2001. – 288 p.
33. Latt J. Straight velocity boundaries in the lattice Boltzmann method / J. Latt, B. Chopard, O. Malaspinas, M. Deville, A. Michler // Physical Review. – 2008. – Vol. 77. – P.1-17.
34. Белоцерковский О.М. Численное моделирование нестационарного периодического течения вязкой жидкости в следе за цилиндром / О.М. Белоцерковский, С.О. Белоцерковский, В.А. Гуцин // Вычислительная математика и математическая физика. –1984. – Т.24, № 8. – С. 1207-1216.
35. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя / Г. Шлихтинг. – М. : Наука, 1974. – 712 с.
36. Ченг П. Отрывные течения / П. Ченг. – М. : Мир, 1973. – 279 с.
37. Фомин Г.М. О циркуляции вихрей и скорости перемещения дорожки Кармана / Г.М. Фомин // Ученые записки ЦАГИ. – 1974. – Т.2, №4. – С. 99-102.

References

1. Succi S. (1991). The Lattice Boltzmann Equation: A New Tool for Computational Fluid-Dynamics. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 47, 219-230.
2. Strang G. (1973). *An Analysis of The Finite Element Method*. Englewood-Cliffs: Prentice Hall.
3. Eymard R., Gallouet T., Herbin R. (2000). Finite volume methods. *Techniques of Scientific Computing*, 7, 713-1020.
4. Belocerckovsky S.M., Skobelev B.U. (1993). *Discrete vortex method and turbulence*. Novosibirsk: ITPM. (in Rus)
5. Ogami Y. (1991). Viscous flow simulation using the discrete vortex model - the diffusion velocity method. *Computers & Fluids*, 19(3), 433-441.
6. Monaghan J.J. (1988). An introduction to SPH. *Computer Physics Communications*, 48, 88-96.
7. Kupershtoh A.L. (2012). 3D modeling with the lattice Boltzmann Method on GPU. *Vuchislitelnie metodu i programmirovaniye (Numerical methods and programming)*, 13, 130-138. (in Rus)
8. Grazyna K. (2006). The numerical solution of the transient heat conduction problem using the lattice Boltzmann method. *Scientific Research of the Institute of Mathematic and Computer Science*, 11, 23-30.
9. Leclaire S., Pellerin N., Reggio M., Trepanier J.-Y. (2013). Enhanced equilibrium distribution functions for simulating immiscible multiphase flows with variable density ratios in a class of lattice Boltzmann models. *International Journal of Multiphase Flow*, 57, 159-168.
10. Favier J., Revell A. , Pinelli A. (2014). A lattice Boltzmann-immersed boundary method to simulate the fluid interaction with moving and slender flexible objects. *Journal of Computational Physics*, 261, 145-161.
11. Anderl D., Bogner S., Rauh C., Rude U., Delgado A. (2014). Free surface lattice Boltzmann with enhanced bubble model. *Computers and Mathematics with Applications*, 67(2), 331-339.
12. Coupanec E. (2010). Boundary conditions for the lattice Boltzmann method. Mass conserving boundary conditions for moving walls. Trondheim: Norwegian University of Science and Technology. Department of Energy and Process Engineering.

13. Mussa M. (2008). Numerical Simulation of Lid-Driven Cavity Flow Using the Lattice Boltzmann Method. *Applied Mathematics*, 13, 236-240.
14. Hong X., Di W., Yuhe S. (2013). Research of Micro-Rectangular-Channel Flow Based on Lattice Boltzmann Method. *Research Journal of Applied Science, Engineering and Technology*, 6(14), 2520-2525.
15. Wolf-Gladrow D. (2005). *Lattice-Gas Cellular Automata and Lattice Boltzmann Models - An Introduction*. Bremerhaven: Alfred Wegener Institute for Polar and Marine.
16. Sucop M. (2006). Lattice Boltzmann Modeling. An Introduction for Geoscientists and Engineers. Miami: Springer.
17. Rettinger C. (2013). Fluid Flow Simulation using the Lattice Boltzmann Method with multiple relaxation times. Erlanger: Friedrich-Alexander University Erlanger-Nuremberg.
18. Martinez D.O., Matthaeus W.H., Chen S., Montgomery D.C. (1994). Comparison of spectral method and lattice Boltzmann simulations of two-dimensional hydrodynamics. *Physics of Fluids*, 6(3), 1285-1298.
19. Mohamad A.A. (2011). Lattice Boltzmann Method. Fundamentals and Engineering Applications with Computer Codes. London: Springer.
20. Agrawal T., Lin C. (2013). Implementation of an incompressible lattice Boltzmann model on GPU to simulate Poiseuille flow. *Proceeding of the Forties National Conference on Fluid Mechanics and Fluid Power*, 40, 991-995.
21. Horwitz J.A. (2013). *Lattice Boltzmann Simulations of Multiphase Flows*. Illinois: University of Illinois at Urbana-Champaign.
22. Wang L. (2008). Direct simulation of viscous flow in a wavy pipe using the lattice Boltzmann approach. *Engineering Systems Modelling and Simulation*, 1(1), 20-29.
23. Turinov A.I., Avramenko A.A., Basok B.I., Davudenko B.V. (2011). Microflows modeling with the lattice Boltzmann method. *Promushlennaya teplotekhnika (Industrial heat engineering)*, 33(2), 11-18. (in Rus)
24. Zaharov A.M., Senin D.S., Grachev E.A. (2014). Lattice Boltzmann modeling with multirelaxation times. *Vuchislitelnye metody i programmirovaniye (Numerical methods and programming)*, 15, 644-657. (in Rus)
25. Bikulov D.A., Senin D.S., Demin D.S., Dmitriev A.V., Grachev N.E. (2012). Lattice Boltzmann Method on GPU cluster. *Vuchislitelnye metody i programmirovaniye (Numerical methods and programming)*, 13, 13-19. (in Rus)
26. Samoilo D.A., Gubkin A.S. (2014). Numerical possibilities of the lattice Boltzmann method. *Vestnik Tiumenskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Fiziko-Matematicheskie nauki (Bulletin of Toumen state university. Physical and mathematical science)*, 7, 83-91. (in Rus)
27. Liapin I.I. (2003). *Introduction to the kinetic equations theory*. Ekaterinburg: UGTU. (in Rus)
28. Aslan E. (2014). Investigation of the Lattice Boltzmann SRT and MRT Stability for Lid Driven Cavity Flow. *International Journal of Materials, Mechanics and Manufacturing*, 2(4), 317-324.
29. Bulanchuk G., Bulanchuk O., Ostapenko A. (2015). Stability investigation of the two-dimensional nine-vectors model of the lattice Boltzmann method for fluid flows in a square cavity. *Vestnik Kharkovskogo Nacionalnogo Universiteta im. V.N.Karazina. Seriya: Matematicheskoe modelirovaniye. Informacionnue tekhnologii. Avtomatizirovannue sistemy upravleniya (Bulletin of Kharkov national University named after V.N.Karazin. Series: Mathematical modeling. Information technology. Automated control system)*, 28, 113-125.
30. Franse M. (1999). *Large Scale Lattice-Boltzmann Simulations*. The Netherlands, Enschede: PrintPartners Ipskamp.

31. He X. (1997). Lattice Boltzmann Model for the Incompressible Navier – Stokes Equation. *Journal of statistical physics*, 88, 927–944.
32. Succi S. (2001). *The Lattice Boltzmann Equation for Fluid Dynamics and Beyond*. Oxford: University Press.
33. Latt J., Chopard B., Malaspina O., Deville M., Michler A. (2008). Straight velocity boundaries in the lattice Boltzmann method. *Physical Review*, 77, 1-17.
34. Belocerckovskyy O.M., Belocerckovskyy S.O., Gushin V.A. (1984). Numerical modeling of the unsteady periodic flow of the viscous fluid past a cylinder. *Vuchislitel'naya matematika i matematicheskaya fizika (Computational mathematics and mathematical physics)*, 24(8), 1207-1216.
35. Schlichting H. (1974). *Boundary layer theory*. Moscow: Nauka. (in Rus)
36. Cheng P. (1973). *Tear flows*. Moscow: Nauka. (in Rus)
37. Fomin G.M. (1974). About the vortexes circulations and Karman track velocity. *Uchenue zapiski CAGI (Scientific notes of TSAGA)*, 2(4), 99-102. (in Rus)

Summary. *A.A. Ostapenko, O.N. Bulanchuck, G.G. Bulanchuck. Investigations of the speed of sound in a cell variable influence in modeling of the flow in a plane channel and flow of the circle cylinder stream of viscous liquid calculating by the method of lattice Boltzmann equations. In this work the technique of modeling of two-dimensional flows of viscous liquid by method of lattice Boltzmann equations when sound speed in a cell isn't a fixed value is investigated. Such approach helps to avoid method's instability and to control the size of a settlement cell, a step on time and Makh number. Ways of setting of some types of boundary conditions are investigated and the new way of setting of a condition of constant pressure is offered. To test proposed algorithm we simulates flow of a viscous liquid in open channel and fluid flow past a circular cylinder. The numerical solutions of the flow in a channel were compared with the corresponding results obtained by the finite element method in the Comsol Multiphysics package. The form of the Karman vortex path after the circular cylinder is shown and it is discussed the dependence between the flow pattern and Reynolds number. To analyze the accuracy of unsteady vortex flows we propose to calculate Strukhal's number in a new way based on the horizontal vortex distance. In the paper there is also investigated the dependence between the numerical result's accuracy and local Makh number. It is shown that results can be obtained with the relative error less than 10% and the local Makh number should be less than 0.3.*

Keywords: the method of lattice Boltzmann equations, sound speed in a cell, local Makh number, viscous liquid, Karman vortex path, Strukhal's number.

Одержано редакцією 14.09.2016

Прийнято до друку 03.10.2016