

МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ У МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМАХ

УДК 534.1

В. П. ОЛЬШАНСЬКИЙ, д-р. фіз.-мат. наук, проф. ХНТУСГ, Харків;
С. В. ОЛЬШАНСЬКИЙ, канд. фіз.-мат. наук, доц. НТУ «ХП»

ПРО МОДЕЛІ КОЛИВАНЬ ОСЦИЛЯТОРА ЗМІННОЇ МАСИ

В функціях Бесселя отримано розв'язок рівняння вільних коливань осцилятора, маса якого змінюється в часі за показниковим законом. Проаналізовано особливості коливань, які зумовлені зміною маси осцилятора.

Ключові слова: осцилятор змінної маси, коливання, показниковий закон, функції Бесселя.

Вступ. Є випадки, коли технологічним процесом передбачені зміни у часі маси певних елементів машин або технічних пристроїв. Це, зокрема, завантаження та розвантаження сипкими речовинами бункерів і кузовів вантажних автомобілів, заповнення рідинами мобільних цистерн та ін. Якщо маса, що змінюється у часі, є підресореною, то це впливає на коливання. Зазвичай, при повільному збільшенні або зменшенні маси, нехтують цим впливом, приймаючи сталими характеристики коливальної системи. Але є випадки порівняно швидкої зміни маси, коли треба враховувати вплив зміни маси на коливання. Саме на них орієнтоване це дослідження.

Огляд публікацій з проблеми. Одним із перших, хто вивчав коливальний рух тіла змінної маси був І.В. Мещерський [1]. Він у аналітичному вигляді одержав розв'язок рівняння малих вільних коливань математичного маятника, припускаючи, що маса маятника є лінійною функцією часу. Рух маятника описано за допомогою функцій Бесселя. Розглянуто випадки асимптотичної поведінки руху з плином часу. Аналогічні задачі коливань маятника сталої маси, але лінійно змінної довжини, розв'язано в [2]. Вільні коливання осцилятора лінійно змінної маси розглядали в [3], [4]. Розв'язки рівнянь руху одержано в функціях Бесселя. На відміну від указаних публікацій, у даній роботі досліджуються лінійні коливання осцилятора, у якого маса змінюється в часі за експонентним законом.

Метою роботи є вивчення особливостей коливального руху осцилятора, зумовлених неперервною зміною у часі його маси.

Основні гіпотези та допущення. Позначимо символами M і x масу і переміщення осцилятора відносно положення статичної рівноваги. Тоді, за теоремою про зміну кількості руху одержуємо рівняння.

$$\frac{d}{dt} \left(M \frac{dx}{dt} \right) = F,$$

де F – рівнодійна сил, прикладених до точки.

П. Ольшанський, С. В. Ольшанський, 2013

Такою силою є пружна сила:

$$F = -kx,$$

пропорційна переміщенню та коефіцієнту жорсткості пружини k .

Отже, рівняння вільних коливань осцилятора, без урахування опору середовища, набуває вигляду:

$$\frac{d}{dt} \left(M \frac{dx}{dt} \right) + kx = 0.$$

Задача руху тіла маса якого зростає.

Розглянемо задачу збільшення маси за законом:

$$M = m_0 \exp(\lambda t),$$

де m_0 – початкова маса осцилятора, λ – коефіцієнт, що характеризує швидкість збільшення M .

Тоді, вільні коливання будуть описуватись рівнянням:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \lambda \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m_0} e^{-\lambda t} x = 0. \quad (1)$$

Його доповнюємо початковими умовами:

$$\dot{x}(0) = v_0; \quad x(0) = x_0, \quad (2)$$

позначивши символами v_0, x_0 початкові швидкість і відхилення осцилятора від положення рівноваги.

Для знаходження розв'язку рівняння (1) уводимо нову безрозмірну змінну:

$$\xi = \exp(\lambda t); \quad \frac{d\xi}{dt} = \lambda \xi.$$

Враховуючи, що:

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{d\xi} \frac{d\xi}{dt} = \lambda \xi \frac{d}{d\xi}, \quad \frac{d^2}{dt^2} = \lambda^2 \xi \left[\frac{d}{d\xi} + \xi \frac{d^2}{d\xi^2} \right],$$

представимо (1) у вигляді:

$$\xi^2 \frac{d^2 x}{d\xi^2} + 2\xi \frac{dx}{d\xi} + \frac{k}{\lambda^2 m_0} \frac{1}{\xi} x = 0. \quad (3)$$

Рівняння (3) відноситься до рівнянь типу Бесселя, а його загальний розв'язок має вигляд:

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{\xi}} (c_1 J_1(\nu) + c_2 Y_1(\nu)), \quad (4)$$

де $\nu = \frac{2}{\lambda} \sqrt{\frac{k}{m_0 \xi}}$, $J_1(\nu), Y_1(\nu)$ – відповідно функція Бесселя та функція

Неймана індексу одиниця; c_1, c_2 – довільні сталі.

Для знаходження швидкості коливань використаємо формули похідних функцій Бесселя та Неймана [5]:

$$\frac{d}{d\nu} J_1(\nu) = J_0(\nu) - \frac{1}{\nu} J_1(\nu), \quad \frac{d}{d\nu} Y_1(\nu) = Y_0(\nu) - \frac{1}{\nu} Y_1(\nu).$$

Диференціювання розв'язку (4) приводить до формули:

$$\dot{x}(t) = -\frac{1}{\xi} \sqrt{\frac{k}{m_0}} (c_1 J_0(\nu) + c_2 Y_0(\nu)). \quad (5)$$

Розв'язки (4) і (5) задовольняють початковим умовам (2), при:

$$c_1 = \frac{\nu_0 \sqrt{m_0 / k} \cdot Y_1(\nu_0) + x_0 Y_0(\nu_0)}{Y_0(\nu_0) J_1(\nu_0) - Y_1(\nu_0) J_0(\nu_0)}, \quad c_2 = -\frac{\nu_0 \sqrt{m_0 / k} \cdot J_1(\nu_0) + x_0 J_0(\nu_0)}{Y_0(\nu_0) J_1(\nu_0) - Y_1(\nu_0) J_0(\nu_0)}, \quad (6)$$

де $\nu_0 = \frac{2}{\lambda} \sqrt{\frac{k}{m_0}}$, $J_0(\nu_0), Y_0(\nu_0)$ – відповідно функція Бесселя та функція

Неймана індексу нуль.

Обчислення констант c_1 і c_2 за формулами (6) можна дещо спростити, враховуючи, що [5]:

$$Y_0(\nu_0) J_1(\nu_0) - Y_1(\nu_0) J_0(\nu_0) = \frac{2}{\pi \nu_0}.$$

З'ясуємо асимптотичну поведінку розв'язку (4) при $t \rightarrow \infty$ або $\xi \rightarrow \infty$, $\nu \rightarrow 0$. Оскільки при малих ν :

$$J_1(\nu) \sim \frac{\nu}{2}; \quad Y_1(\nu) \sim \frac{2}{\pi \nu}, \quad \text{то} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = -\frac{\lambda c_2}{\pi} \sqrt{\frac{m_0}{k}}.$$

Отже, має місце певне зависання осцилятора, бо коливна точка зупиняється не в положенні рівноваги $x = 0$.

Числові результати та їх аналіз. Розглянемо модельну задачу з наступними вихідними даними: $m_0 = 100$ кг; $\lambda = 0,05$ с⁻¹; $k = 50$ кг/с² та різними початковими умовами. На рис. 1 та 2 представлено залежність швидкості та переміщення від часу. Цифрою 1 на рисунках позначено криві, отримані при $\nu_0 = 0,5$ м/с, $x_0 = 0,02$ м, а цифрою 2 – при $\nu_0 = 1$ м/с, $x_0 = 0,05$ м.

Зі збільшенням початкової швидкості та початкового відхилення зростає амплітуда коливань, а зміна періоду в обох випадках залишається однаковою, тобто не залежить від початкових умов.

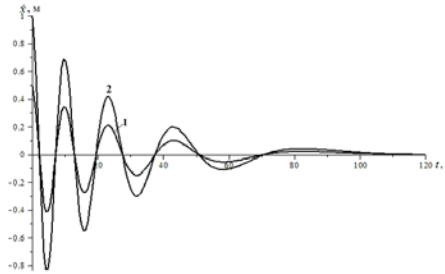


Рис. 1 – Залежність швидкості \dot{x} від часу t при зростанні маси

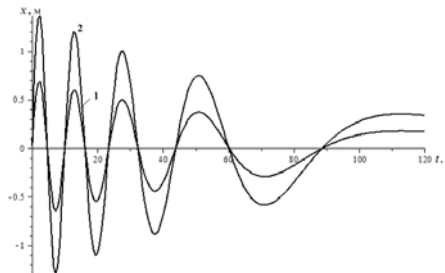


Рис. 2 – Залежність переміщення x від часу t при зростанні маси

Задача руху тіла маса якого зменшується.

Розглянемо задачу зменшення маси за законом:

$$M = m_0 \exp(-\lambda t).$$

Тоді, вільні коливання будуть описуватись рівнянням:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - \lambda \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m_0} e^{\lambda t} x = 0. \quad (7)$$

Його доповнюємо початковими умовами (2).

Для знаходження аналітичного розв'язку введемо безрозмірну змінну ξ , як це було зроблено в попередньому пункті. Тоді рівняння (7) набуває вигляду:

$$\xi^2 \frac{d^2 x}{d\xi^2} + \frac{k}{\lambda^2 m_0} \xi x = 0. \quad (8)$$

Рівняння (8) відноситься до рівнянь типу Бесселя, а його загальний розв'язок має вигляд:

$$x(t) = \sqrt{\xi} (c_3 J_1(\eta) + c_4 Y_1(\eta)), \quad (9)$$

де $\eta = v_0 \sqrt{\xi}$, c_3, c_4 – довільні сталі.

Диференціювання розв'язку (9) за відомими формулами диференціювання циліндричних функцій, приводить до формули:

$$\dot{x}(t) = \xi \sqrt{\frac{k}{m_0}} (c_3 J_0(\eta) + c_4 Y_0(\eta)). \quad (10)$$

Розв'язки (9) і (10) задовольняють початковим умовам (2), при:

$$c_3 = -\frac{v_0 \sqrt{m_0/k} \cdot Y_1(v_0) - x_0 Y_0(v_0)}{Y_0(v_0) J_1(v_0) - Y_1(v_0) J_0(v_0)},$$

$$c_4 = \frac{v_0 \sqrt{m_0/k} \cdot J_1(v_0) - x_0 J_0(v_0)}{Y_0(v_0) J_1(v_0) - Y_1(v_0) J_0(v_0)}. \quad (11)$$

Використовуючи асимптотичні формули Стокса для циліндричних функцій великого аргументу ($\eta \gg 1$) [5],

$$J_1(\eta) \sim \frac{2}{\sqrt{\pi\eta}} \cos\left(\eta - \frac{3}{4}\pi\right); \quad Y_1(\eta) \sim \frac{2}{\sqrt{\pi\eta}} \sin\left(\eta - \frac{3}{4}\pi\right).$$

Можна дещо спростити наближене обчислення $x(t)$ за формулою (9), бо

$$x(t) \approx \frac{2}{v_0} \sqrt{\frac{\eta}{\pi}} \left[c_3 \cos\left(\eta - \frac{3}{4}\pi\right) + c_4 \sin\left(\eta - \frac{3}{4}\pi\right) \right].$$

Зростання амплітуди коливань відбувається пропорційно $\sqrt{\eta}$.

Числові результати та їх аналіз. Розглянемо модельну задачу з попередніми вихідними даними. На рис. 3 та 4 представлено залежність швидкості та переміщення від часу. Цифрою 1 на рисунках позначено криві, отримані при $v_0 = 0,5$ м/с, $x_0 = 0,02$ м, а цифрою 2 – при $v_0 = 1$ м/с, $x_0 = 0,05$ м.

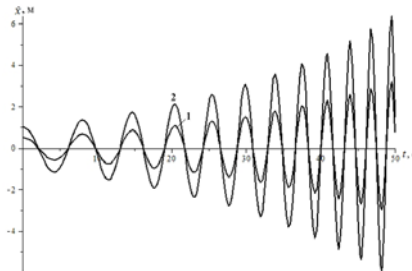


Рис. 3 – Залежність швидкості \dot{x} від часу t при зменшенні маси

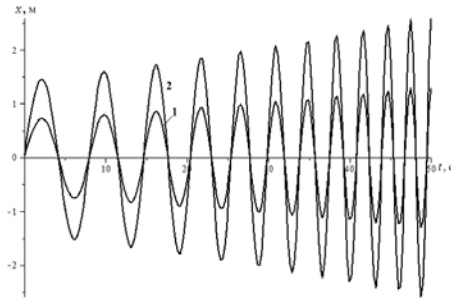


Рис. 4 – Залежність переміщення x від часу t при зменшенні маси

Висновки. Аналіз одержаних результатів показує, що вільні коливання осцилятора змінної маси нестационарні, тобто втрачають сенс поняття періоду і власної частоти, уведені для класичного лінійного осцилятора. Внаслідок зміни маси осцилятора, змінюється у часі не тільки період і частота, а також амплітуда вільних коливань, незважаючи на те, що не враховується в'язкий опір середовища. Затухання амплітуд коливань швидкості, при зростанні маси осцилятора, проходить більш інтенсивно, ніж затухання амплітуд переміщень.

Список літератури: 1. Мещерский И. В. Работы по механике тел переменной массы / И. В. Мещерский. – М.: ГИТТЛ, 1952. – 276 с. 2. Светлицкий В. А. Сборник задач по теории колебаний / В. А. Светлицкий, И. В. Стасенко – М.: Высшая школа, 1973. – 456 с. 3. Cveticanin L. Dynamics of Machines with Variable Mass. / L. Cveticanin. Taylor & Francis Ltd, – 1998. – 300 p. 4. Бессонов А. П. Основы динамики механизмов с переменной массой звеньев / А. П. Бессонов – М.: Наука, 1967. – 279 с. 5. Абрамовиц А. Справочник по специальным функциям (с формулами, графиками и математическими таблицами) / А. Абрамовиц, И. Стиган. – М.: Наука, 1979. – 832 с.

Надійшла до редколегії 24.04.2013

УДК 534.1

Про моделі коливань осцилятора змінної маси / В. П. Ольшанський, С. В. Ольшанський // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Транспортне машинобудування. – Х. : НТУ «ХПІ», 2013. – № 31 (1004). – С. 124–129. – Бібліогр.: 5 назв.

В функціях Бесселя получено решение уравнения свободных колебаний осциллятора, масса которого изменяется во времени по показательному закону. Проанализированы особенности колебаний, обусловленные изменением массы осциллятора.

Ключевые слова: осциллятор переменной массы, колебания, показательный закон, функции Бесселя.

In Bessel functions the solution of the equation of free oscillation, the mass of which varies in time exponential law was received. Vibration characteristics of a change in the mass of the oscillator are analyzed.

Keywords: oscillator with variable mass, vibrations, exponential law, Bessel functions.