

УДК 622.02::539+622.83

**Ф.Л. Шевченко****Ю.В. Петтик**

Донецкий национальный технический университет, Донецк

## НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ В ГОРНОМ МАССИВЕ ПОСЛЕ ПРОХОЖДЕНИЯ ВЫРАБОТКИ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

В статье рассматривается математическое обоснование гипотезы образования горных выбросов и пучения почвы после прохождения выработки на упругом основании.

**Ключевые слова:** выработка, гипотеза, балка на упругом основании, напряжения, выброс, пучение почвы.

Одной из основных проблем механики горных пород и массивов является развитие теории, а также совершенствование методов расчета напряженно-деформированного состояния горного массива при проведении горных выработок [1].

Известно, что механика горных пород имеет свои особенности, это обусловлено ограничением использования известных решений задач классической теории упругости, строительной механики в силу особенностей поведения горных пород при деформации из-за неоднородности их механических свойств [2]. При этом механика горных пород широко использует различные методы исследования, такие как, физический и натурный эксперимент, математическое моделирование. Несмотря на невозможность получения точного решения задач аналитическим методом, он нашел широкое применение.

Особое внимание при расчете и управлении горным давлением в очистных выработках и при строительстве шахт уделяют кровле [3], исследованию параметров зоны разгрузки и опорного давления, и в частности пиков напряжений в зонах опорного давления [4].

Так в горной механике широко используется термин «опорное давление, как повышенные, сравнительно с литостатическими, нормальные к пласту, сжимающие напряжения, возникающие вблизи опорного контура, по всему периметру [1]. Однако, в настоящее время такая формулировка опорного давления трактуется по другому, как напряженно-деформированное состояние пород после прохождения выработки. Для решения таких задач на процессы механики горных пород часто пытаются использовать методы теории упругости и решения бигармонических уравнений в рядах Фурье (например, для определения напряженно-деформированного состояния вокруг камер и т. д.). При этом часто используются методы строительной механики в виде расчета балок на сплошном упругом основании Винклера [1].

Проблематика расчета опорного давления исследовалась еще М.М. Протодьяконовым [5] на примере пологих тонких пластов Донбасса при оценке ширины зоны опорного давления, затем В.Д. Слесаревым [6] с использованием классической задачи Бруссинеска. В более позднее время фундаментальные работы по исследованию опорного давления были выполнены в диссертации Ардашева К.А. [7], в монографии Христиановича С.А. [8], учебнике [9] и др.

Несмотря на многочисленные публикации до настоящего времени нет единой концепции обоснования расчета опорного давления.

Целью данной работы является исследование напряженно-деформированного состояния в горном массиве после прохождения выработки на пологом пласте породы, как упругом основании.

В представленной статье показан пример математического обоснования напряженно-деформированного состояния полубесконечной балки на сплошном упругом основании вследствие прохождения горной выработки. Из условия разрушения основания, на котором пройдена выработка, можно судить о характере разрушения пород вокруг выработки и проявления пучения почвы выработки.

Нетронутый горный массив находится в естественном напряженном состоянии при сжимающих напряжениях, обусловленных гравитационной нагрузкой вышерасположенных напластований горных пород  $\sigma_0 = \sum \gamma_i h_i$  с известным объемным весом  $\gamma_i$  и толщиной пластов  $h_i$ .

После прохождения горизонтальной выработки естественная нагрузка на ее почву снимается, что вызывает повышение напряжений в горном массиве за пределами выработки. Это повышенное напряжение зависит от размеров выработки и характеристики упругих свойств окружающих горных пород.

Рассмотрим частный случай, когда выработка расположена на пологом пласте породы заданной жесткости  $EJ$  как на сплошном упругом основании с коэффициентом постели  $\bar{k}$ , представляющем реакцию упругого основания, возникающую при единичном смещении единичного участка балки. Упругое основание Фусса-Винклера работает одинаково на растяжение и сжатие. Расчетная схема балки загруженной произвольной нагрузкой, вызывающей положительный изгибающий момент (слева от сечения направленный по ходу часовой стрелки), приведена на рис. 1.

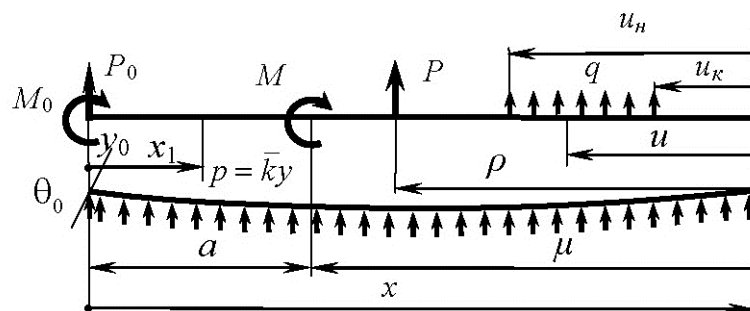


Рис. 1. Расчетная схема балки на сплошном упругом основании

Реакция упругого основания на балку пропорциональна коэффициенту постели  $\bar{k}$  и перемещению  $y$  и направлена в сторону, противоположную направлению прогиба, т.е. в расчете балки на упругом основании кроме внешней нагрузки нужно учитывать интенсивность отпора упругого основания  $-\bar{k}y$ .

Вывод расчетных зависимостей основан на приближенном дифференциальном уравнении изогнутой оси балки  $\frac{d^2 y(x)}{dx^2} = \frac{M(x)}{EJ}$ , которое после двойного дифференцирования принимает вид  $\frac{d^4 y(x)}{dx^4} = \frac{q(x) - \bar{k}y(x)}{EJ}$ .

На первом участке балки (рис.1), где нет распределенной нагрузки, дифференциальное уравнение будет однородным и иметь вид

$$\frac{d^4 y(x)}{dx^4} + \frac{\bar{k}}{EJ} y(x) = 0. \quad (1)$$

Введем безразмерную координату  $\xi = \frac{x}{L}$ . Тогда  $d\xi = \frac{1}{L} dx$ ,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{L} \cdot \frac{dy}{d\xi}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dx} \left( \frac{1}{L} \frac{dy}{d\xi} \right) = \frac{1}{L^2} \cdot \frac{d^2y}{d\xi^2}.$$

Так получаем четвертую производную по безразмерной координате  $\xi$  и уравнение (1) примет вид

$$\frac{d^4y}{d\xi^4} + \frac{\bar{k}L^4}{EJ} y = 0 \quad (2)$$

или

$$\frac{d^4y}{d\xi^4} + 4y = 0, \quad (3)$$

где через  $L$  обозначена характеристика балки на упругом основании

$$L = \sqrt[4]{4 \frac{EJ}{\bar{k}}}. \quad (4)$$

Представляя решение уравнения (3) в виде  $y(\xi) = Ce^{n\xi}$ , получим характеристическое уравнение

$$n^4 + 4 = 0, \quad n^2 = \pm 2i,$$

корни которого:  $n_{1,2} = \pm \sqrt{2} \cdot \sqrt{i}$ ,  $n_{3,4} = \pm \sqrt{2} \sqrt{-i}$ .

Извлекая корни квадратные из комплексных чисел  $\sqrt{i} = \cos \frac{\gamma}{2} + i \sin \frac{\gamma}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} (1 + i)$ ,  $\sqrt{-i} = \frac{\sqrt{2}}{2} (1 - i)$ , находим корни характеристического уравнения  $n_{1,2} = \pm (1 + i)$ ,  $n_{3,4} = \pm (1 - i)$ , что приводит к решению дифференциального уравнения (3) в виде

$$y(x) = C_1 e^{\xi} e^{\xi i} + C_2 e^{-\xi} e^{-\xi i} + C_3 e^{\xi} e^{-\xi i} + C_4 e^{-\xi} e^{\xi i} \quad (5)$$

или через новые постоянные интегрирования  $A, B, C, D$

$$y(x) = A \operatorname{ch} \xi \cos \xi + B \operatorname{ch} \xi \sin \xi + C \operatorname{sh} \xi \cos \xi + D \operatorname{sh} \xi \sin \xi. \quad (6)$$

Последовательным дифференцированием уравнения изогнутой оси балки (6) получаем уравнения углов поворота  $\theta(x)$  и силовых факторов  $M(x) = EJy''(x)$  - изгибающего момента и  $Q(x) = M'(x) = EJy'''(x)$  - поперечной силы:

$$Ly'(x) = A(\operatorname{sh} \xi \cos \xi - \operatorname{ch} \xi \sin \xi) + B(\operatorname{sh} \xi \sin \xi + \operatorname{ch} \xi \cos \xi) + C(\operatorname{ch} \cos \xi - \operatorname{sh} \xi \sin \xi) + D(\operatorname{ch} \xi \sin \xi + \operatorname{sh} \xi \cos \xi),$$

$$\frac{M(x)L^2}{2EJ} = -A \operatorname{sh} \xi \sin \xi + B \operatorname{sh} \xi \cos \xi - C \operatorname{ch} \xi \sin \xi + D \operatorname{ch} \xi \cos \xi,$$

$$\frac{Q(x)L^3}{2EJ} = -(\operatorname{ch} \xi \sin \xi + \operatorname{sh} \xi \cos \xi) + B(\operatorname{ch} \xi \cos \xi - \operatorname{sh} \xi \sin \xi) - C(\operatorname{sh} \xi \sin \xi + \operatorname{ch} \xi \cos \xi) + D(\operatorname{sh} \xi \cos \xi - \operatorname{ch} \xi \sin \xi).$$

Выразим постоянные интегрирования через начальные параметры из условий:  $y(0) = y_0$ ,  $y'(0) = \theta_0$ ,  $M(0) = M_0$ ,  $Q(0) = P_0$ . Из этих условий находим:

$$A = y_0, \quad B = \frac{\theta_0}{2}L + \frac{P_0L^3}{4EJ}, \quad C = \frac{\theta_0}{2}L - \frac{P_0L^3}{4EJ}, \quad D = \frac{M_0L^2}{2EJ}. \quad (7)$$

С учетом этих постоянных интегрирования уравнение изогнутой оси балки можно представить в начальных параметрах

$$y(x) = y_0\Phi_1(\xi) + \theta_0L\Phi_2(\xi) + \frac{M_0L^2}{EJ}\Phi_3(\xi) + \frac{P_0L^3}{EJ}\Phi_4(\xi). \quad (8)$$

Здесь  $\Phi_i(\xi) = \Phi_i(x/L)$  - функции А.Н. Крылова, обладающие циклическими свойствами дифференцирования и интегрирования (рис.2) [10]:

$$\begin{aligned} \Phi_1(\xi) &= \operatorname{ch}\xi \cos \xi, & \frac{d\Phi_1(x/L)}{dx} &= -\frac{4}{L}\Phi_4(\xi), & \int \Phi_1(\xi)dx &= L\Phi_2(\xi), \\ \Phi_2(\xi) &= (\operatorname{ch}\xi \sin \xi + \operatorname{sh}\xi \cos \xi)/2, & \Phi_2'(\xi) &= \frac{1}{L}\Phi_1(\xi), & \int \Phi_2(\xi)dx &= L\Phi_3(\xi), \\ \Phi_3(\xi) &= \operatorname{sh}\xi \sin \xi/2, & \Phi_3'(\xi) &= \frac{1}{L}\Phi_2(\xi), & \int \Phi_3(\xi)dx &= L\Phi_4(\xi), \\ \Phi_4(\xi) &= (\operatorname{ch}\xi \sin \xi - \operatorname{sh}\xi \cos \xi)/2, & \Phi_4'(\xi) &= \frac{1}{L}\Phi_3(\xi), & \int \Phi_4(\xi)dx &= -\frac{L}{4}\Phi_1(\xi) \end{aligned} \quad (9)$$

Обратим внимание на то, что функции Крылова при аргументах  $\xi > 3\pi/2$ , (рис. 3) стремительно возрастают. Поэтому эти функции применяют только для расчета коротких балок.

Используя известные зависимости между функциями Крылова, последовательным дифференцированием (8) получаем остальные расчетные уравнения балки:

– уравнение углов поворота сечений

$$\theta(x) = \theta_0\Phi_1(\xi) + \frac{M_0L}{EJ}\Phi_2(\xi) + \frac{P_0L^2}{EJ}\Phi_3(\xi) - \frac{4}{L}y_0\Phi_4(\xi), \quad (10)$$

– уравнение изгибающих моментов

$$M(x) = M_0\Phi_1(\xi) + P_0L\Phi_2(\xi) - \frac{4EJ}{L^2}y_0\Phi_3(\xi) - \frac{4EJ}{L}\theta_0\Phi_4(\xi), \quad (11)$$

– уравнение поперечных сил

$$Q(x) = P_0\Phi_1(\xi) - \frac{4EJ}{L^3}y_0\Phi_2(\xi) - \frac{4EJ}{L^2}\theta_0\Phi_3(\xi) - \frac{4}{L}M_0\Phi_4(\xi). \quad (12)$$

Уравнения (8) – (12) применимы лишь на первом участке балки, когда  $x/L \leq \pi$ , рис. 1.

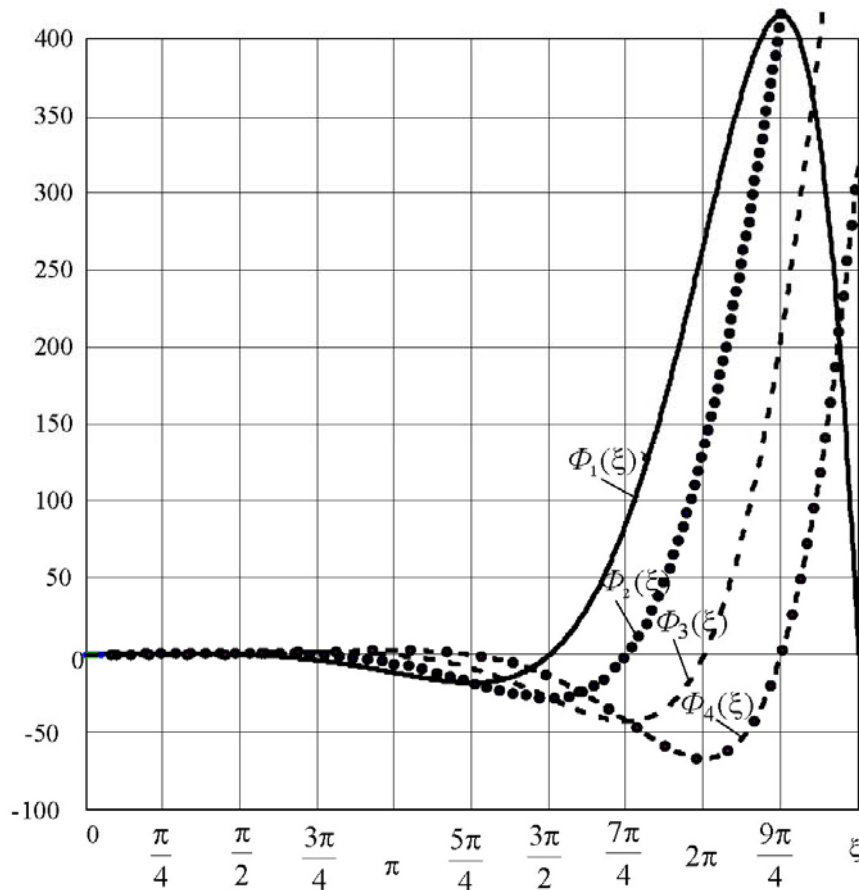


Рис. 2. Функции Крылова на участке  $\xi = 0 \dots 3\pi$

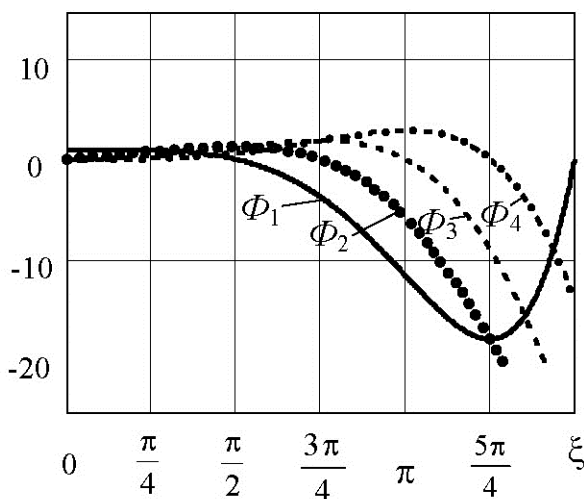


Рис. 3. Функции Крылова на участке  $\xi = 0 \dots 1,5 \cdot \pi$

На втором участке от сосредоточенного момента добавится слагаемое, аналогичное слагаемому, содержащему  $M_0$  в формуле (8). При этом плечо  $x$  следует заменить на  $\mu$ , т.е. от сосредоточенного момента в уравнении изогнутой оси балки на втором участке добавится слагаемое

$$\frac{ML^2}{EJ} \Phi_3\left(\frac{\mu}{L}\right).$$

На третьем участке от сосредоточенной силы добавится слагаемое, аналогичное слагаемому, содержащему  $P_0$ , т.е. добавится слагаемое

$$\text{мое } \frac{PL^3}{EJ} \Phi_4\left(\frac{\rho}{L}\right).$$

Распределенную нагрузку можно учесть суммированием влияния элементарных сосредоточенных сил  $qdu$ , т.е. интегралом  $\int_{u_k}^{u_h} \frac{qdu}{EJ} L^3 \Phi_4(u/L)$ .

Так получаем универсальное уравнение изогнутой оси балки на упругом основании при любой поперечной нагрузке

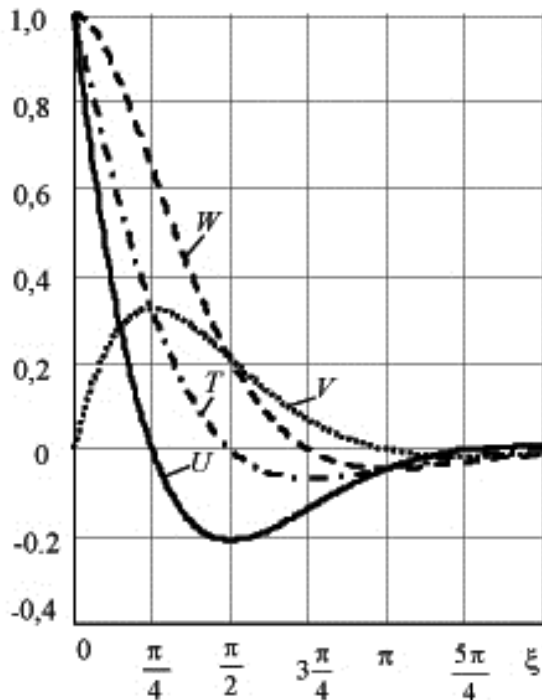
$$y(x) = y_0 \Phi_1(\xi_1) + \theta_0 L \Phi_2(\xi) + \frac{M_0 L^2}{EJ} \Phi_3(\xi) + \frac{P_0 L^3}{EJ} \Phi_4(\xi) + \sum \frac{ML^2}{EJ} \Phi_3(\mu/L) + \sum \frac{PL^3}{EJ} \Phi_4(\rho/L) + \sum \int_{u_k}^{u_h} \frac{qdu}{EJ} L^3 \Phi_4(u/L) \quad (13)$$

Отсюда дифференцированием легко получить все остальные расчетные уравнения.

Знак суммы в (13) указывает на то, что в уравнении нужно учитывать всю нагрузку с одной стороны от сечения (со стороны начала координат, которое выбирается на конце балки).

Начальные параметры вычисляются из условий закрепления балки на опорах.

Для длинных балок удобно перейти к затухающим функциям, графики которых показаны на рис. 4:



$$\begin{aligned} T(\xi) &= e^{-\xi} \cos \xi, \quad \frac{dT}{dx} = -\frac{1}{L} W(\xi), \\ \int T(\xi) dx &= -\frac{L}{2} U(\xi), \\ U(\xi) &= e^{-\xi} (\cos \xi - \sin \xi), \quad U' = -\frac{2}{L} T(\xi), \\ \int U(\xi) dx &= LV(\xi), \\ W(\xi) &= e^{-\xi} (\cos \xi + \sin \xi), \quad (14) \\ W' &= -\frac{2}{L} V(\xi), \quad \int W(\xi) dx = -LT(\xi), \\ V(\xi) &= e^{-\xi} \sin \xi, \quad V' = \frac{2}{L} U(\xi), \\ \int V(\xi) dx &= -\frac{L}{2} W(\xi). \end{aligned}$$

Сочетания этих функций приводят к зависимостям:

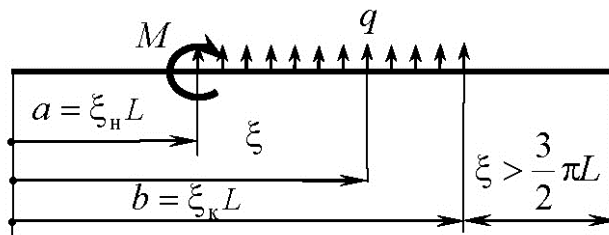
$$T(\xi) + V(\xi) = W(\xi), \quad T - V = U, \quad W + U = 2T, \quad W - U = 2V. \quad (15)$$

Рис. 4. Быстрозатухающие функции аргумента  $\xi = x/L$

Используя формулы (14), получим начальные параметры от произвольной нагрузки, расположенной на балке на некотором расстоянии от начала координат, рис. 5 [10]:

$$y_0 = \frac{PL^3}{2EJ}T(\xi) + \frac{ML^2}{2EJ}W(\xi) + \frac{qL^4}{4EJ}U(\xi), \quad (16)$$

$$\theta_0 = -\frac{PL^2}{2EJ}U(\xi) - \frac{ML}{EJ}T(\xi) + \frac{qL^3}{2EJ}V(\xi). \quad (17)$$



ко- Рис. 5. К вычислению начальных  
ко- параметров

По этим формулам вычисляются начальные параметры в случае свободного участка балки небольшой длины  $\xi_n \leq \pi$ , а все расчетные значения находятся по (8) – (13) с использованием функций Крылова.

Зная силовые факторы в начале ординат  $P_0$  и  $M_0$ , в случае полубесконечной балки расчетные зависимости принимают вид:

$$y(x) = \frac{P_0 L^3}{2EJ}T(\xi) + \frac{M_0 L^2}{2EJ}U(\xi) \quad (18)$$

$$\theta(x) = -\frac{P_0 L^2}{2EJ}W(\xi) - \frac{M_0 L}{EJ}T(\xi), \quad (19)$$

$$M(x) = P_0 L V(\xi) + M_0 W(\xi), \quad (20)$$

$$Q(x) = P_0 U(\xi) - \frac{2}{L} M_0 V(\xi) \quad (21)$$

Заметим, что при больших аргументах функций Крылова возникают некоторые, удобные для расчетов, сочетания

$$\begin{aligned} T(\xi) &= \Phi_1(\xi) - 2\Phi_2(\xi) + 2\Phi_4(\xi), \\ U(\xi) &= \Phi_1(\xi) - 2\Phi_2(\xi) + 2\Phi_3(\xi), \\ W(\xi) &= \Phi_1(\xi) - 2\Phi_3(\xi) + 4\Phi_4(\xi), \\ V(\xi) &= \Phi_2(\xi) - 2\Phi_3(\xi) + 2\Phi_4(\xi). \end{aligned} \quad (22)$$

Сопряжение двух участков балки можно выполнить классическим методом строительной механики – методом перемещений. Для этого подготовим расчетные формулы силовых факторов от единичных перемещений сечения балки в начале координат.

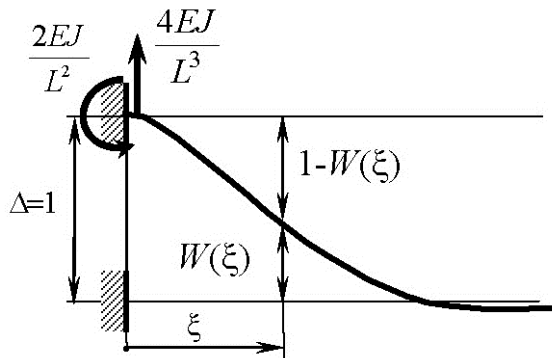


Рис. 6. Единичное смещение заделки

**Единичное смещение заделки.** В начале координат возникает изгибающий момент и поперечная сила, рис. 6. В случае полубесконечной балки на основании формул (18)-(19) используем условия  $y(0) = 1$  и  $\theta(0) = 0$ :

$$\frac{P_0 L^3}{2EJ} + \frac{M_0 L^2}{2EJ} = 1, \quad \frac{P_0 L^2}{2EJ} + \frac{M_0 L}{EJ} = 0,$$

откуда находим

$$P_0 = 4 \frac{EJ}{L^3} \quad \text{и} \quad M_0 = -2 \frac{EJ}{L^2}. \quad (23)$$

Подставляя эти начальные параметры в расчетные формулы полубесконечной балки (18) – (21), получим:

$$y(x) = 4 \frac{EJ}{L^3} \frac{L^3}{2EJ} T(\xi) - 2 \frac{EJ}{L^2} \frac{L^2}{2EJ} U(\xi) = 2T(\xi) - U(\xi) = W(\xi), \quad (24)$$

$$y'(x) = -4 \frac{EJ}{L^3} \frac{L^2}{2EJ} W(\xi) + 2 \frac{EJ}{L^2} \frac{L}{EJ} T(\xi) = -\frac{1}{L} 2(W(\xi) - T(\xi)) = -\frac{2}{L} V(\xi), \quad (25)$$

$$M(x) = 2 \frac{EJ}{L^2} (2V(\xi) - T(\xi)) = -2 \frac{EJ}{L^2} U(\xi) \quad (26)$$

$$Q(x) = 4 \frac{EJ}{L^3} (U(\xi) + V(\xi)) = 4 \frac{EJ}{L^3} T(\xi). \quad (27)$$

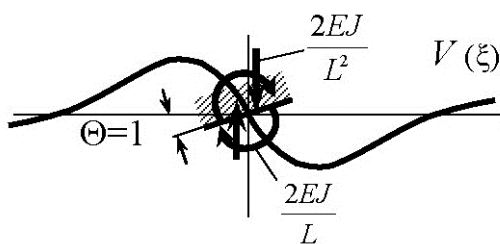


Рис. 7. Единичный поворот заделки

Аналогично находим расчетные формулы при единичном повороте заделки против хода часовой стрелки, рис. 7.

В начале координат возникает изгибающий момент и поперечная сила.

В случае полубесконечной балки на основании формул (18) – (19) используем условия  $y(0) = 0$  и  $\theta(0) = 1$ :

$$\frac{P_0 L^3}{2EJ} + \frac{M_0 L^2}{2EJ} = 0, \quad -\frac{P_0 L^2}{2EJ} - \frac{M_0 L}{EJ} = 1,$$

откуда находим  $P_0 = 2 \frac{EJ}{L^2}$  и  $M_0 = -2 \frac{EJ}{L}$ .

Подставляя эти начальные параметры в расчетные формулы полубесконечной балки (18) – (21), получим:

$$y(x) = 2 \frac{EJ}{L^2} \frac{L^3}{2EJ} T(\xi) - 2 \frac{EJ}{L} \frac{L^2}{2EJ} U(\xi) = L(T(\xi) - U(\xi)) = LV(\xi), \quad (28)$$

$$y'(x) = -2 \frac{EJ}{L^2} \frac{L^2}{2EJ} W(\xi) + 2 \frac{EJ}{L} \frac{L}{EJ} T(\xi) = -(W(\xi) - 2T(\xi)) = U(\xi), \quad (29)$$



$$M(x) = \frac{EJ}{L} (2V(\xi)) - 2W(\xi) = -2 \frac{EJ}{L} T(\xi) \quad (30)$$

$$Q(x) = 2 \frac{EJ}{L^2} (U(\xi) + 2V(\xi)) = 2 \frac{EJ}{L^2} W(\xi). \quad (31)$$

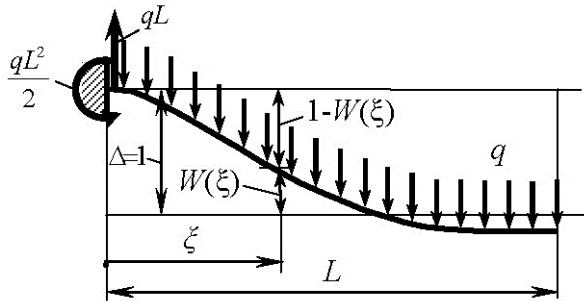


Рис. 8. Защемленная балка с распределенной нагрузкой

Жестко защемленная балка загружена равномерно распределенной нагрузкой, рис. 8. Составляем условия защемления балки:  $y(0) = 0$  и  $y'(0) = 0$ . С учетом расчетных формул (16), (17) составляем условия защемления

$$\frac{PL^3}{2EJ} + \frac{ML^2}{2EJ} - \frac{qL^4}{4EJ} = 0,$$

$$\frac{PL^2}{2EJ} + \frac{ML}{EJ} = 0,$$

откуда находим начальные параметры  $P_0 = qL$  и  $M_0 = -qL^2/2$ .

Согласно (18), (21) получаем расчетные уравнения:

$$y(x) = \frac{qL^4}{2EJ} T(\xi) - \frac{qL^4}{4EJ} U(\xi) - \frac{qL^4}{4EJ} = -\frac{qL^4}{4EJ} (1 - W(\xi)), \quad (32)$$

$$\theta(x) = -\frac{qL^3}{2EJ} W(\xi) + \frac{qL^3}{2EJ} T(\xi) = -\frac{qL^3}{2EJ} V(\xi), \quad (33)$$

$$M(x) = qL^2 V(\xi) - \frac{qL^2}{2} W(\xi) = -\frac{qL^2}{2} U(\xi), \quad (34)$$

$$Q(x) = qLU(\xi) + qLV(\xi) = -qLT(\xi). \quad (35)$$

В случае короткой балки вышерассмотренные случаи деформирования нужно определять по формулам Крылова.

**Единичное смещение защемления.** В начале координат прогиб равен единице, а угол поворота – нулю. На оси симметрии выработки при  $\xi_1 = l/2L$  нужно принять условия  $\theta(\xi_1) = 0$  и  $Q(\xi_1) = 0$ . Согласно (10), (12) получаем систему уравнений относительно начальных силовых факторов (силовых факторов в начале координат):

$$\begin{aligned} \frac{M_0 L}{EJ} \Phi_2(\xi_1) + \frac{P_0 L^2}{EJ} \Phi_3(\xi_1) &= \frac{4}{L} y_0 \Phi_4(\xi_1), \\ -\frac{4}{L} M_0 \Phi_4(\xi_1) + P_0 \Phi_1(\xi_1) &= \frac{4EJ}{L^3} y_0 \Phi_2(\xi_1). \end{aligned}$$

Отсюда находим:

$$M_0 = -4 \frac{EJ}{L^2} \cdot \frac{\Phi_2(\xi_1) \cdot \Phi_3(\xi_1) - \Phi_1(\xi_1) \cdot \Phi_4(\xi_1)}{\Phi_1(\xi_1) \cdot \Phi_2(\xi_1) + 4\Phi_3(\xi_1) \cdot \Phi_4(\xi_1)} = -2 \frac{2EJ}{L^2} \cdot K_M(\Delta), \quad (36)$$

$$P_0 = 4 \frac{EJ}{L^3} \cdot \frac{\Phi_2^2(\xi_1) + 4\Phi_4^2(\xi_1)}{\Phi_1(\xi_1) \cdot \Phi_2(\xi_1) + 4\Phi_3(\xi_1) \cdot \Phi_4(\xi_1)} = 4 \frac{EJ}{L^3} K_P(\Delta)$$

Заметим, что при больших значениях аргумента функций Крылова (при  $\xi_1 \geq \pi$ ) коэффициенты начальных параметров  $K_M(\Delta) = K_P(\theta) = 1$  и начальные параметры (36) примут значения (23).

**Единиичный положительный поворот заделки** (против хода часовой стрелки при начале координат на левом конце балки и по ходу часовой стрелки, если начало координат находится справа от сечения). В начале координат прогиб равен нулю, а угол поворота – единице. На оси выработки при  $\xi_1 = l/2L$   $\theta(\xi_1) = 0$  и  $Q(\xi_1) = 0$ . Согласно (10), (12) получаем систему уравнений относительно начальных параметров:

$$\begin{aligned} \frac{M_0 L}{EJ} \Phi_2(\xi_1) + \frac{P_0 L^2}{EJ} \Phi_3(\xi_1) &= \theta_0 \Phi_1(\xi_1), \\ -\frac{4}{L} M_0 \Phi_4(\xi_1) + P_0 \Phi_1(\xi_1) &= -\frac{4EJ}{L^2} \theta_0 \Phi_3(\xi_1). \end{aligned}$$

Отсюда находим начальные параметры:

$$\begin{aligned} M_0 &= \frac{EJ}{L} \cdot \frac{\Phi_1^2(\xi_1) + 4\Phi_3^2(\xi_1)}{\Phi_1(\xi_1)\Phi_2(\xi_1) + 4\Phi_3(\xi_1)\Phi_4(\xi_1)} = \frac{EJ}{L} \cdot K_M(\theta) \\ P_0 &= -4 \frac{EJ}{L^2} \cdot \frac{\Phi_2(\xi_1)\Phi_3(\xi_1) - 4\Phi_1(\xi_1)\Phi_4(\xi_1)}{\Phi_1(\xi_1)\Phi_2(\xi_1) + 4\Phi_3(\xi_1)\Phi_4(\xi_1)} = -4 \frac{EJ}{L^2} \cdot K_P(\theta) / \end{aligned}$$

Используем выше приведенные функции для расчета опорного давления горных пород за пределами выработки на пласте породы толщиной  $h=0,5$  м. В расчете рассматриваем упругое основание единичной ширины с коэффициентом постели  $\bar{k} = 325$  МН/м<sup>2</sup>. При модуле упругости опорного пласта  $E=2 \cdot 10^4$  МПа и моменте инерции площади поперечного сечения единичной полосы  $J = h^3/12 = 1,04 \cdot 10^{-2}$  м<sup>4</sup>.

При этих исходных данных геометрическая характеристика балки на упругом основании (4)  $L = \sqrt[4]{4EJ/\bar{k}} = 1,265$  м. Ширина выработки  $l = \pi L = 3,974$  м и горное давление в нетронутом массиве  $q = \sum \gamma_i H_i = 25$  МПа заданы.

При решении задач о сопряжении двух участков балки методом перемещений используем вышеприведенные формулы от единичных линейных и угловых смещений условной заделки, которая устанавливается на границе двух участков.

Из условий равновесия заделки составляются уравнения, определяющие значения перемещений, а затем составляются суммарные расчетные факторы изогнутой оси балки.

Условия равновесия условной заделки (рис. 9):

$$\sum Y = 0, \quad 2 \cdot \frac{4EJ}{L^3} \Delta - qL = 0; \quad \sum M = 0, \quad 2 \cdot \frac{2EJ}{L} \theta - \frac{qL^2}{2} = 0.$$

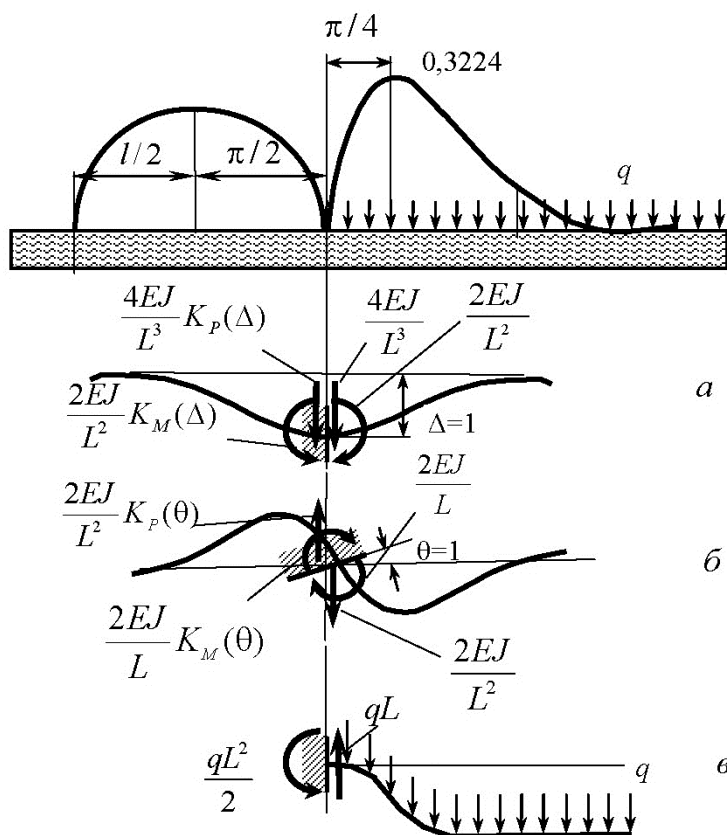
Отсюда находим деформационные факторы в начале координат загруженно-

го участка балки:  $\Delta = \frac{qL^4}{8EJ}$ ,  $\theta = \frac{qL^3}{8EJ}$ , а затем с учетом формул, приведенных на рис. 9, по уравнениям (26), (30), (34) составляем уравнение изгибающих моментов

$$M(\xi) = 2 \frac{EJ}{L^2} \frac{qL^4}{8EJ} U(\xi) + 2 \frac{EJ}{L} \frac{qL^3}{8EJ} T(\xi) - \frac{qL^2}{2} U(\xi) = \frac{qL^2}{4} V(\xi),$$

а по уравнениям (24), (28), (32) составляем уравнения изогнутой оси балки

$$y(x) = -\frac{qL^4}{8EJ} W(\xi) - \frac{qL^3}{8EJ} V(\xi) - \frac{qL^4}{4EJ} (1 - W(\xi)) = -\frac{qL^4}{4EJ} + \frac{qL^4}{8EJ} (W(\xi) - V(\xi)) = -\frac{qL^4}{4EJ} + \frac{qL^4}{8EJ} T(\xi).$$



В рассмотренном примере получили эпюру изгибающих моментов, которая определяется быстро затухающей функцией  $V(\xi)$ .

Так можно получить расчетные формулы и для других факторов напряженно-деформированного состояния горного массива за пределами выработанного пространства в окружающих породах.

Если пролет выработки  $l < \pi$ , то при составлении условий равновесия заделки в основной системе методом перемещений нужно учитывать коэффициенты начальных параметров левого участка балки и формулы перемещений в месте сопряжения примут вид:

Рис.9. Расчетная схема сопряжения балок методом перемещений

$$\Delta = \frac{qL^4}{4EJ} \cdot \frac{2(1 + K_M(\theta)) - (1 - K_P(\theta))}{2((1 + K_P(\Delta)) \cdot (1 + K_M(\theta)) - (1 - K_M(\Delta)) \cdot (1 - K_P(\theta)))}$$

$$\theta = \frac{qL^3}{4EJ} \cdot \frac{2((1 + K_P(\Delta)) - (1 - K_M(\Delta)))}{2((1 + K_P(\Delta)) \cdot (1 + K_M(\theta)) - (1 - K_M(\Delta)) \cdot (1 - K_P(\theta)))}$$

В заключение вычислим максимальное напряжение на втором участке после прохождения выработки шириной  $l = \pi L = 3,97$  м. Расчетный изгибающий момент

$$M_{\max} = \frac{qL^2}{4} V\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0,3224 \frac{qL^2}{4} = 0,1019qL. \text{ Момент сопротивления площади}$$

поперечного сечения балки на упругом основании

$$W = h^2 / 6 = 0,5^2 / 6 = 0,0417 \text{ м}^3. \text{ Нормальные напряжения при изгибе}$$

$$\sigma = M_{\max} / W = 2,4449qL = 2,4449 \cdot 25 \cdot 1,2649 = 77,3 \text{ МПа}.$$

Таким образом, опорная балка (пласт породы) испытывает сжимающее вертикальное напряжение от вышележащих напластований породы  $q = 25$  МПа и напряжения изгиба  $\sigma = \pm 77,3$  МПа. Расчетное напряжение по второй теории прочности  $\sigma_{\text{расч}} = \sigma_{\text{изг}} - \mu\sigma_{\text{сж}} = 77,3 - 0,1(-25) = 79,8$  МПа.

Такое расчетное напряжение более чем в 20-ть раз превышает предел прочности породы на растяжение (для песчаников выветрелых каолинизированных или глинистых крупнозернистых  $\sigma_{\text{нч}} = 3,4$  МПа). Следовательно, плита в основании выработки за пределами выработанного пространства разрушится, вызывая выброс горной породы.

Еще большие напряжения возникают на левом участке балки, т.е. в почве выработки, где  $M(\pi/4) = M(3\pi/4) = (0,3224 + 0,066)qL^2 / 4 = 0,389qL^2 / 4$ .

## Выводы

1. Предложена гипотеза расчета напряженно-деформированного состояния в горном массиве после прохождения пологой горной выработки располагающейся на сплошном упругом основании (пласте породы). Приведенные расчеты можно использовать и при решении других задач, таких как, расчет взаимного влияния выработок друг на друга, для свит пластов и др.

2. Показано, что разрушающими напряжениями являются растягивающие напряжения при изгибе опорного пласта породы (балки на упругом основании) с эпюрой изгибающих моментов напоминающих по форме эпюру так называемого «опорного давления».

3. Из условия разрушения основания, на котором пройдена выработка, можно судить о характере разрушения пород вокруг выработки и проявления пучения почвы выработки.

### Список литературы

1. Борисов А.А. Механика горных пород и массивов / А.А. Борисов. – М.: Недра, 1980. – 360 с.
2. Турчанинов И.А. Основы механики горных пород / И.А. Турчанинов, М.А. Иофис, Э.В. Каспарьян. – Л.: Недра, 1989. – 488 с.
3. Бронников Д.М. Разработка руд на больших глубинах / Д.М. Бронников, Н.Ф. Замесов, Г.И. Богданов. – М.: Недра, 1982. – 292 с.
4. Земисев В.Н. Расчеты деформаций горного массива / В.Н. Земисев. – М.: Недра, 1973. – 144 с.
5. Протодьяконов М.М. Давление горных пород и рудничное крепление / М.М. Протодьяконов. – М.: Гостехиздат, 1930.
6. Слесарев В.Д. Механика горных пород и рудничное крепление / В.Д. Слесарев. – М.: Углетехиздат, 1948. – 303 с.
7. Ардашев К.А. Исследование и анализ проявлений горного давления при разработке мощных крутых пластов Прокопьевско-киселевского месторождения Кузбасса: дисс. на соиск. уч. степ. д-ра техн. наук. – Л.: ЛГИ, 1968.
8. Христианович С.А. Механика сплошной среды / С.А. Христианович. – М.: Наука. 1981. – 483 с.
9. Каспарьян Э.В. Геомеханика / Каспарьян Э.В., Козырев А.А., Иофис М.А., Макаров А.Б. – М.: Высшая школа, 2006. – 503 с.
10. Шевченко Ф.Л. Механика упругих деформируемых систем / Ф.Л. Шевченко. – Донецк; ООО «NORD-PRSS», 2005. – 288 с. – (Часть 1. Напряженно-деформированное состояние стержней).

*Надійшла до редакції 28.09.2012*

Ф. Л. Шевченко, Ю. В. Петтик

Донецький національний технічний університет, Донецьк

#### НАПРУЖЕНИЙ СТАН У ГІРСЬКОМУ МАСИВІ ПІСЛЯ ПРОХОДЖЕННЯ ВИРОБІТКУ НА ПРУЖНІЙ ОСНОВІ

У статті розглядається математичне обґрунтування гіпотези утворення гірських викидів і обдимання ґрунту після проходження виробітку на пружній основі.

Ключові слова: гіпотеза, балка на пружній основі, напруги, викид, обдимання ґрунту.

F.L Shevchenko, Y.V. Pettik

Donetsk National Technical University, Donetsk

#### STRESS STATE IN THE MOUNTAIN MASSIF AFTER PASSING PROPOSE ON ELASTIC FOUNDATION

The article describes the mathematical hypothesis of emissions in the mine and deformation of the ground excavation as a beam on elastic foundation.

Keywords: development, the hypothesis, the beam on elastic foundation, the stresses, discharge, swelling of the soil.