У статті, в контексті наукового напряму – «фізика відкритих систем», запропонована дробова структура типу «перемішування-транспорт» як відкрита система. Розроблено математичну модель дробового порядку, що реалізує аналіз і синтез структури. Показано нове бачення структури відкритої системи. Продемонстровані: діаграма Пуанкаре дробового порядку та параметри часів повернення

Ключові слова: відкрита система, дробова структура, часи повернення Пуанкаре, фрактальність, візуалізація, експонента, перешкода, динаміка, Леві, Чиріков-Тейлор

В статье, в контексте научного направления – «физика открытых систем», предложена дробная структура типа «перемешивание-транспорт» как открытая система. Разработана математическая модель дробного порядка, реализующая анализ и синтез структуры. Показано новое видение структуры открытой системы. Продемонстрированы: диаграмма Пуанкаре дробного порядка и параметры времен возврата

Ключевые слова: открытая система, дробная структура, времена возврата Пуанкаре, фрактальность, визуализация, экспонента, помеха, динамика, Леви, Чириков-Тейлор

УДК 517.9

ДРОБНАЯ СТРУКТУРА «ПЕРЕМЕШИВАНИЕ – ТРАНСПОРТ» КАК ОТКРЫТАЯ СИСТЕМА

Э. И. Владимирский
Кандидат технических наук,
старший научный сотрудник*
E-mail: Eduard.Vladimirsky@hotmail.com
Б. И. Исмайлов
Научный сотрудник*
E-mail: ismbahram@mail.ru
*Кафедра «Информационно-измерительная и вычислительная техника»
Азербайджанская Государственная Нефтяная Академия
пр. Азадлыг, 20, г. Баку, Азербайджанская республика, AZ 1010

1. Введение

Большой интерес вызывают процессы перемешивания многомерных гетерогенных систем. В результате перемешивания многомерных систем могут возникнуть когерентные Лагранжевы структуры, которые требуют проведения анализа и оценки этих образований.

Эта проблема еще более актуализируется при анализе смешанных нелинейных физических систем, в которых примерами когерентных Лагранжевых структур являются стабильные и нестабильные многообразия фиксированных точек и периодических орбит.

Наряду с процессами перемешивания возникает проблема транспорта переменных потоков. То есть возникает парадигма рассмотрения анализа и синтеза структуры типа «перемешивание-транспорт-управление» нелинейными физическими процессами.

В этом контексте вызывает интерес исследования степенной нелокальности и степенной памяти, позволяющие создавать математические методы одного из современных направлений теоретической физики – дробной динамики (fractional dynamic) [1], успешно используемой в системах транспорта (переноса).

В контексте научного направления «Физика открытых систем» [1–4] предлагается парадигма взаимодействия геоинформационного пространства с дробной структурой типа «перемешивание-транспорт». Взаимодействие выкристаллизовывается в дробную структуру типа «транспорт-перемешивание-транспорт», Т-П-Т, формализация которой может быть представлена как модель открытой системы.

Известно, что открытые системы могут обмениваться с окружающими телами, энергией и информацией, и благодаря их сложности в них возможно образование различных структур.

Замечание. Так, моделями странных кинетических явлений в турбулентных средах служат процессы Леви [5] и случайные блуждания во фрактальном времени (fractal time random walks) СБФВ [5].

Особенно эта структура актуальна, когда речь идет о системах с фрактальной структурой.

Здесь важно отметить, что при описании свойств систем с фрактальной структурой нельзя использовать представления евклидовой геометрии. Возникает необходимость анализа этих процессов в терминах геометрии дробной размерности. Системы с фрактальной особенностью характеризуются такими эффектами как память, сложными пространственными процессами перемешивания и самоорганизацией.

Использование методов дробной динамики открывает новые возможности для решения проблем прогноза и принятия решений в сложных системах.

Образование нового научного направления – физика открытых систем, в рамках которого интегрируются такие направления как синергетика, диссипативные структуры, детерминированный хаос, концепция фрактала, вносит новый уровень понимания при реализации сложных задач на междисциплинарном уровне.

Так, фрактальный подход по-новому рассматривает соотношения обратимых и необратимых процессов.

2. Постановка задачи и анализ литературных данных

Пусть $A_t \cap B$ представляет собой совокупность всех частей A_t, оказавшихся в момент времени t внутри неподвижной области B.

Определение 1 [6]. Динамическая система называется перемешивающей (соответственно фазовое отображение F перемешивающим), если существует предел

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\mu(A_t \cap B)}{\mu(B)}=\mu(A). \qquad (1)$$

Поскольку рассматриваемое движение консервативно, мера области A при движении сохраняется, то есть $\mu(A_t)=\mu(A)$. Величина $\mu(A)=\mu(A_t)/\mu(D)$ представляет собой относительную долю объема, занимаемую областью A в D.

На содержательном уровне имеет место

Определение 2. Система называется ***системой с перемешиванием,*** если информация о начальных условиях полностью утрачивается. «Забывание» начальных условий может происходить либо через каскад ***столкновений***, либо через каскад итераций.

Что касается модели типа «транспорт», то в динамических системах имеет место следующее

Определение 3. Под транспортом понимается движение в фазовом пространстве точек, представляющих динамическую систему с разными ***начальными условиями.***

Тогда, в общем случае выражение для процесса типа «перемешивание-транспорт» можно представить в следующем виде:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\mu(A_t \cap B)}{\mu(B)}=\mu(A)\cap\mu(C), \qquad (2)$$

где $\mu(C)$ – транспортная составляющая. То есть $\mu(A)\cap\mu(C)$ представляет собой транспорт систем с перемешиванием.

В этой связи представляет интерес работа [7], в которой был исследован процесс аномальной диффузии в стандартном отображении Чирикова-Тейлора. Было найдено, что движение (транспорт) бывает супердиффузионным с аномальной экспонентой относительно временных и пространственных характеристик параметра шкалы цепочки островов.

Было обнаружено новое понимание аномального транспорта, адекватного полетам Леви (Levy flight) [5], что хорошо ассоциируется с супердиффузионными процессами, рассмотренными в теории переноса [5].

Необходимо отметить такой важный аспект как нестандартное перемешивание в стандартном отображении [8]. Здесь отмечено объединение регулярных и смешанных зон. То есть имеет место важный вывод об универсальности стандартного отображения Чирикова-Тейлора.

Пусть

$$\mu(C_1)=\mu(C_2). \qquad (3)$$

Тогда модель открытой системы (open space – OS) будет определяться как

$$OS \overset{def}{=} \left\{\left[\mu(c_1)\right]\cap\left[\mu(A)\cap\mu(c_2)\right]\right\}+\text{noise},\ OS\in R^3, \qquad (4)$$

где noise – помеха.

Замечание. Процессы Леви в терминах дробной динамики усиливают эффект дробной структуры «транспорт-перемешивание-транспорт», оцениваемый такими параметрами как транспортная экспонента , времена возврата Пуанкаре , зависимость коэффициента диффузии D от параметра K в стандартном отображении [9, 10].

Таким образом, в результате реализации данной модели прогнозируется определения: дробной диаграммы Пуанкаре, дробного времени возврата τ, транспортной экспоненты $\tilde{\mu}$; понятия памяти (memory), «забывания» (forgetting), влияния помеховой составляющей при управлении процессами транспорта в открытой системе.

Здесь открытая система выступает как междисциплинарная система, непрерывно взаимодействующая со средой.

Сказанное выше отображено на рис. 1.

3. Пример реализации системы «перемешивание-транспорт»

1. Геоинформационное пространство (среда) описывается α-стабильным движением Леви, $L_{\alpha,H(t)}$. Тогда в терминах оператора Римана-Лиувилля имеем [11]:

$$L_{\alpha,H(t)}=\frac{1}{\Gamma(H+1/2)}\int_0^t dL_\alpha(\tau)(t-\tau)^{H-1/2}, \qquad (5)$$

где $\Gamma(\cdot)$ – гамма функция; H – параметр Херста.

Отсюда математическая модель дробного траффика Леви будет выражена как [11]:

$$\tilde{A}=mt+(\bar{\sigma}m)^{1/2}L_{\alpha,H(t)}, \qquad (6)$$

где $m>0$ – средняя константа скорости ввода; $\alpha\in(1,2)$ – измерение толщины хвостов в распределении; $\bar{\sigma}$ – параметр масштабирования.

Легенда

T_1 – БФСП – T_2 – блок формирования T_1 степени перемешивание-транспорт.

БФДП – блок формирования диаграммы Пуанкаре.

БФР – блок фрактальных размерностей.

БВВП – блок времен возврата Пуанкаре.

F – фильтр.

БК – блок корректировки БФСП.

D_{ky} – фрактальная (ляпуновская) размерность Каплана-Йорке.

$T_{1,2}$ – модели транспортной составляющей.

ВП – вычисление параметров.

- $H\in\left[1/2-\frac{1}{\alpha}\right],\frac{3}{2}-\frac{1}{\alpha}$ параметр Херста.

- $\tilde{A}(t) = \mu(c_1)$.

1. Представим $\mu(A)$ как стандартное отображение Чирикова-Тейлора дробного порядка $(1 < \alpha \le 2)$ [12]:

2. $${}_0D_t^{\alpha} x + K\sin(x)\sum_{n=0}^{x}\delta(t-n) = 0, \ (1 < \alpha \le 2), \quad (7)$$

где ${}_0D_t^{\alpha}$ – дробная производная Римана-Лиувилля, определяемая как [12]:

$${}_0D_t^{\alpha} x = D_t^2\, {}_0I_t^{2-\alpha} x = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\frac{d^2}{dt^2}\int_0^1 \frac{x(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha-1}}, \ (1 < \alpha \le 2). \quad (8)$$

3. $\mu(c_1)$ в модели (3.4) есть $\tilde{A}(t)$, $[0,t]$, $t > 0$.

Тогда модель «перемешивание-транспорт» (mixing-transport) определяется как:

$$MT = \mu(A) \cap \tilde{A}(t), \ MT \in R^2. \quad (9)$$

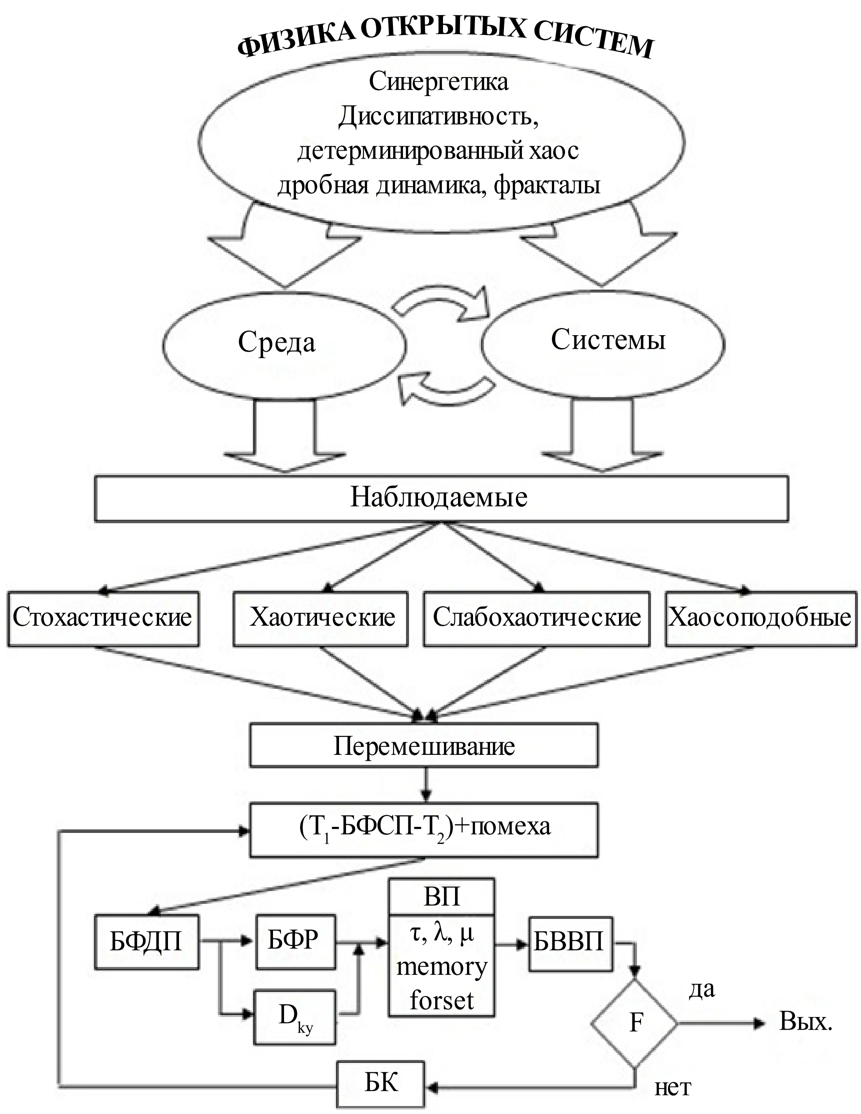

Рис. 1. Структура анализа и синтеза открытой системы

Что касается синтеза рассматриваемой структуры, то для получения удовлетворительных результатов предлагается адаптивный алгоритм, (рис. 1), корректирующий рассогласование «вход-выход» по критерию

$$F = \left(\langle \tau_{вых} \rangle - \langle \tau_{вх} \rangle\right) \le \delta\langle \tau \rangle, \quad (10)$$

где $\langle \tau_{вых} \rangle, \langle \tau_{вх} \rangle$ – времена возврата Пуанкаре; $\delta\tau > 0$ – ограничение по времени возврата, то есть временная задержка при реализации процесса «перемешивание-транспорт».

Предлагаемая постановка задачи и ее реализация привносит элемент новизны в контексте использования нелинейных физических систем, то есть на междисциплинарном уровне организуется новое видение структуры открытой системы.

Идеология такой модели удачно ассоциируется с работой, опубликованной в [13].

Язык дробных производных незаменим для описания физического процесса стохастического транспорта (переноса). Основой для этого служит общее и универсальное свойство «забывания» (или «потери информации»), которое характеризует стохастичность процесса [14].

Известно, что уравнения в дробных производных описывают эволюцию некоторой физической системы с потерями, причем дробный показатель производной указывает на долю состояний системы, сохраняющихся за все время эволюции t. Такие системы носят название системы с «остаточной» памятью, занимающие промежуточное положение между системами, обладающими полной памятью, с одной стороны,имарковскимисистемами– с другой [14].

В этой связи в [15] предлагается функция ***короткой памяти*** для дробного Леви процесса.

Теорема 1 [14]. Допустим $Y_d = \{Y_d(t)\}_{t\in R}$ есть дробный интегративный процесс со скользящими средними

$$Y_d(t) = \int_{-\infty}^{t} g_d(t-s)L ds, t \in R$$

с $g_d \in L^2(R)$ такой, что $g_d \in I_+^d(L^2)$, тогда Y_d можно представить как [15]:

$$Y_d(t) = \int_{-\infty}^{t} g(t-s)M_d(ds) \quad t \in R$$

с

$$g(x) = \frac{1}{\Gamma(1-d)}\frac{d}{dx} =$$

$$= \int_0^x g_d(s)(x-s)^{-d}(ds), \ x \in R, \quad (11)$$

где g есть Римана-Лиувилля производная D_+^d для ядра gd.

Теорема 2 [14]. Дробный интегративный процесс со скользящим средним $Y_d = \{Y_d(t)\}_{t \in R}$ есть долговременная память.

Доказательство приводится в [16].

Что касается функции памяти для дробного стандартного отображения Чирикова-Тейлора, то эта проблема подробно рассмотрена в [16]. На основании алгоритма [12] и выражения (4) определяем диаграмму Пуанкаре дробного порядка (рис. 2, *б*) по наблюдаемой (рис. 2, *а*); фрактальную размерность дробного порядка d_f (рис. 2, *в*) и среднее время возврата Пуанкаре $\langle \tau \rangle$.

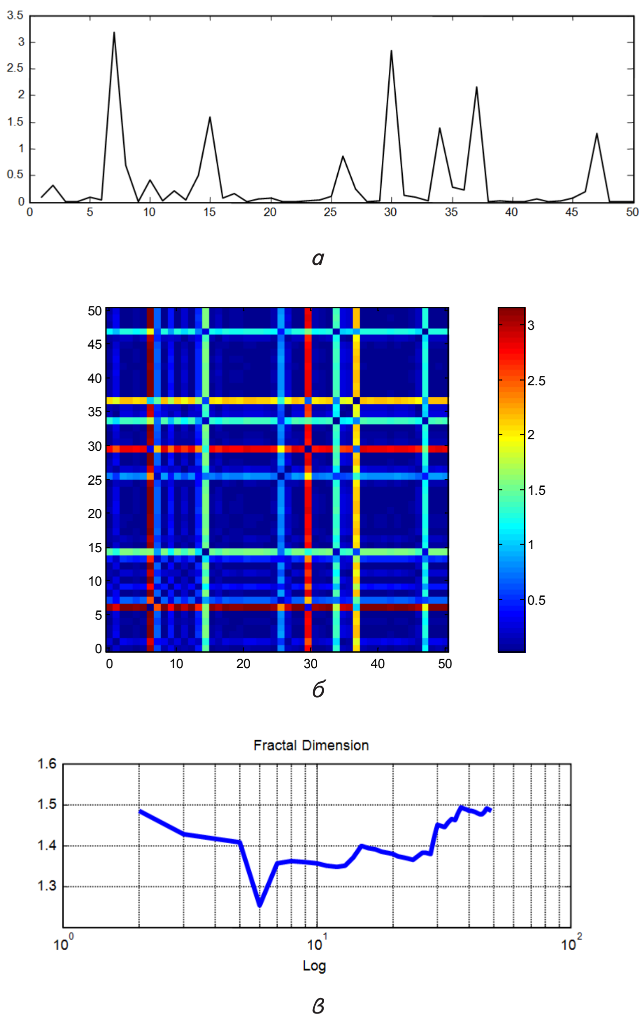

Рис. 2. Моделирование и визуализация параметров системы без помехи: а — наблюдаемая; *б* — диаграмма Пуанкаре; *в* — фрактальная размерность d_f: $d_f = 1.4847 \quad \langle \tau \rangle = 2.0358$

Влияние помех на систему

В качестве воздействия помеховой составляющей на систему предлагается отображение Заславского [17]:

$$x_{n+1} = x_n \cos\alpha - (y_n + \gamma \sin x_n)\sin\alpha,$$
$$y_{n+1} = x_n \sin\alpha + (y_n + \gamma \sin x_n)\cos\alpha, \qquad (12)$$

где α, γ – параметры.

Параметр γ характеризует величину взаимодействия частицы с волнами. При $\gamma = 0$ отображение (12) является поворотом на угол α. На рис. 3, 4 представлены результаты моделирования системы с помеховой составляющей.

Предлагается интересным оценка соотношения сигнал/помеха, которая может быть представлена в виде отношения средних времен возврата Пуанкаре с помехой, т. е. [12]:

$$\langle \tau_s \rangle / \langle \tau_{noise} \rangle = \psi . \qquad (13)$$

В заключение необходимо отметить, что при взаимодействии среды с системой (открытая система), в контексте реализации процессов транспорта, можно сказать, что в общем имеет место открытая система с перемешиванием. То есть показано новое видение структуры открытой системы, которая характеризуется когерентными Лагранжевыми структурами (стабильные и нестабильные многообразия фиксированных точек и периодические орбиты) и конечно-временной Ляпуновской экспонентой (КВЛЭ. Finite-time Lyapunov Exponent FTLE) [18].

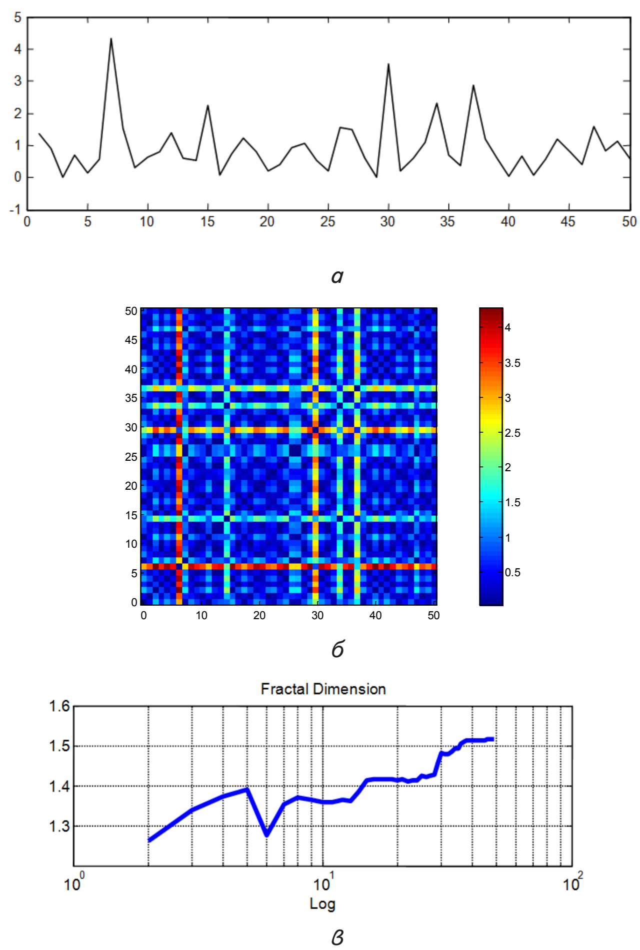

Рис. 3. Моделирование и визуализация параметров системы с высокочастотной помехой: *а* — наблюдаемая; *б* — диаграмма Пуанкаре; *в* — фрактальная размерность d_f; $d_f = 1.5159 \quad \langle \tau \rangle = 2.0779$

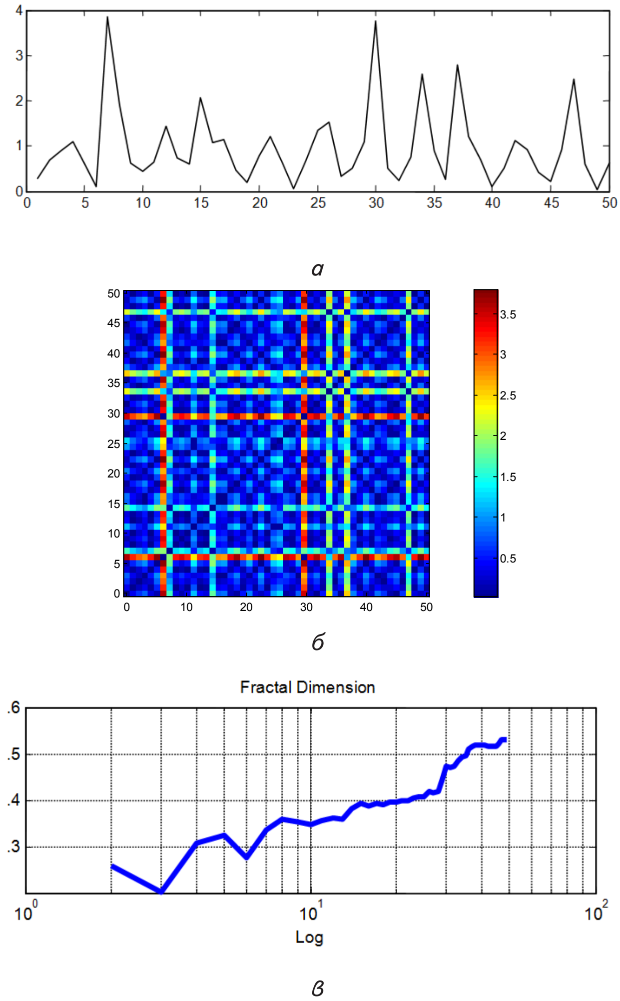

Рис. 4. Моделирование и визуализация параметров системы с низкочастотной помехой: *а* — наблюдаемая; *б* — диаграмма Пуанкаре; *в* —фрактальная размерность d_f; $d_f = 1.5304$ $\langle\tau\rangle = 2.0977$

4. Выводы

В рамках открытой системы дан анализ и синтез структуры «перемешивание – транспорт» в терминах дробного порядка.

Предлагаемая постановка задачи и ее реализация привносит элемент новизны в контексте использования нелинейных физических систем, то есть на междисциплинарном уровне организуется новое видение структуры открытой системы.

Продемонстрированы: диаграмма Пуанкаре дробного порядка, фрактальная размерность d_f, среднее время возврата Пуанкаре $\langle\tau\rangle$ и визуальный анализ влияния помеховой составляющей на функционирование системы.

Сложность открытой системы позволяет организовывать различные структуры, такие как процессы Леви и случайные блуждания во фрактальном времени, дающие возможность с успехом проводить исследования в контексте решения задач транспорта и перемешивания в хаотических и стохастических системах.

Литература

1. Tarasov, V. E. The fractional oscillator as an open system [Text] / V. E. Tarasov // Cent. Eur. Phys. – 2012. – 10 (2). – P. 382–389. doi 10.2478/s11534-012-0008-0
2. Климонтович, Ю. Л. Критерий относительной степени упорядоченности открытых систем [Текст] / Ю. Л. Климонтович // УФН. – 1996. – Т. 166, № 11. – С. 1231–1243. doi: 10.3367/UFNr.0166.199611f.1231
3. Тарасов, В. Е. Модели теоретической физики с интегро-дифференцированием дробного порядка [Текст] : дис. ... док. физ.-мат. наук / В. Е. Тарасов. – Москва, 2011.
4. Tarasov, V. E. Fractional Dynamics of Open Quantum Systems [Text] / V. E. Tarasov // Fractional Dynamics Nonlinear Physical Science. – 2010. – P. 467–490. doi 10.1007/978-3-642-14003-7_20
5. Зеленый, Л. М. Фрактальная топология и странная кинетика: от теории перколяции к проблемам космической электродинамики. [Текст] / Л. М. Зеленый, А. В. Милованов // Успехи фихических наук. – 2004. – Т. 174, № 8. – С. 810–850.
6. Логунов, М. Ю. Перемешивание и ляпуновские показатели хаотических систем [Текст] / М. Ю. Логунов, Л. Я. Бутковский // ЖТФ. – 2008. – Т. 78, Вып. 5. – С. 1–8.
7. Benkadda, S. Self-Similarity and Transport in the Standard Map [Text] / S. Benkadda, S. Kassibrakis, R. B. White, G. M. Zaslavsky. – Phys. Rev E55, 1997. –P. 1-28.
8. Rossi, L. Poincare Recurrences as a tool to investigate the statistical properties of dynamical systems with integrabla and mixing components [Text] / L. Rossi, G. Turchetti, S. Vaienti //Journal of Physics. – 2005. – Vol. 7. – P. 94–100. doi:10.1088/1742-6596/7/1/008
9. Анищенко, В. С. Теория возвратов Пуанкаре и её приложение к задачам нелинейной физики [Текст] / В. С. Анищенко, С. В. Астахов // Успехи физических наук. – 2013. – Т. 183, № 10. – С. 1009–1028. doi: 10.3367/UFNr.0183.201310a.1009
10. Владимирский, Э. И. Времена возвращения Пуанкаре при взаимодействии хаотических и стохастических систем [Текст] / Э. И. Владимирский // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – 2012. – Т. 6, № 4 (60). – С. 4–8.
11. Laskin, N. Fractional Levy Motion and Its Applications to Network Traffic Modeling [Text] / N. Laskin, I. Lambadaris, F. C. Harmantzis, M. Devetsikiotis // Computer Networks Elsevier BV. 2002. – Vol. 40, Issue 3. – P. 363–375. doi: 10.1016/S1389-1286(02)00300-6
12. Tarasov, V. E. Fractional dissipative standard map [Text] / V. E. Tarasov, M. Edelman // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. – 2010. – Vol. 20, Issue 2. – P. 023–127. doi:10.1063/1.3443235
13. Тагиев, Р. А. Математическая модель интегрированной геоинформационной системы с принятием решений по данным аэрокосмических измерений [Текст] / Р. А. Тагиев, Э. И. Владимирский // Изв. НАН Азербайджана. – 2006. – Т. XXVI, № 3. – С. 146–151.

14. Чукбар, К. В. Стохастический перенос и дробные производные. [Текст] / К. В. Чукбар // ЖЭТФ. – 1995. – Т. 108, Вып. 5 (11). – С. 1875–1884.
15. Marquardt, T. Fractional Levy processes with an application to long memory moving average processes [Text] / T. Marquardt // Bernoulli. – 2006. – Vol. 12, Issue 6. – P. 1099–1126. doi:10.3150/bj/1165269152
16. Tarasov, V. E. Review of some promising fractional physical models [Text] / V. E. Tarasov // International Journal of Modern Physics B. – 2013. – Vol. 27, Issue 9. – P. 1330005. doi:10.1142/s0217979213300053
17. Savin, A. V. The coexistence and evolution of attractor in the web map with weak dissipation [Text] / A. V. Savin, D. V. Savin. – Arxiv: 1302.5361[nin CD], 2013. – P. 1–6.
18. Кошель, К. В. Хаотическая адвекция в океане [Текст] / К. В. Кошель, С. В. Пранц // Успехи физических наук. – 2006. – Т. 176, № 11. – С. 1177–1205.

УДК 697.31

СИСТЕМНЫЙ ПОДХОД К МАТЕМАТИЧЕСКОМУ МОДЕЛИРОВАНИЮ ТЕПЛОВЫХ ПРОЦЕССОВ ЗДАНИЙ

А. С. Куценко
Доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой*
E-mail: kuzenko@kpi.kharkov.ua

С. В. Коваленко
Старший преподаватель*
E-mail: kova@kpi.kharkov.ua

В. И. Товажнянский*

*Кафедра системного анализа и управления
Национальный технический университет
«Харьковский политехнический институт»
ул. Фрунзе, 21, г. Харьков, Украина, 61002

Пропонується системна формалізація синтезу математичної моделі теплових процесів будівлі яка опалюється, що складається з безлічі взаємозалежних приміщень. Обґрунтовано вибір розмірності системи звичайних диференціальних рівнянь, що апроксимує рівняння теплопровідності. Застосування запропонованого підходу призводить до класичної кінцевомірної лінійної системи керованих диференціальних рівнянь

Ключові слова: теплові процеси, теплопостачання будівель, математична модель, рівняння теплопровідності, диференціальні рівняння

Предлагается системная формализация синтеза математической модели тепловых процессов отапливаемого здания, состоящего из множества взаимосвязанных помещений. Обоснован выбор размерности системы обыкновенных дифференциальных уравнений, аппроксимирующей уравнение теплопроводности. Применение предложенного подхода приводит к классической конечномерной линейной системе управляемых дифференциальных уравнений

Ключевые слова: тепловые процессы, теплоснабжение зданий, математическая модель, уравнение теплопроводности, дифференциальные уравнения

1. Введение

Проблема экономии энергетических ресурсов в настоящее время стоит как никогда остро. Это связано как с естественными возрастающими потребностями человечества в комфортной среде обитания, так и с экономическим и политическим давлением стран-монополистов, контролирующих источники энергоносителей. Особенно остро проблема энергосбережения стоит перед странами с резко выраженным континентальным климатом, к которым относится Украина. По данным [1] расходы тепловой энергии на содержание зданий составляют около 2,3 Гдж/год, т. е. более 25 % в энергобалансе страны. Снижение расходов углеводородных энергоносителей на отопление зданий может достигаться различными путями. Во-первых, это использование новых строительных материалов и технологий, позволяющих повысить термическое сопротивление ограждений зданий. Во-вторых, это использование альтернативных источников энергии в системах распределенной энергетики. В-третьих, это широкое использование систем автоматического управления теплоснабжением зданий. Среди перечисленных путей повышения тепловой энергоэффективности зданий последний является наименее затратным и, в то же время, единственным, обеспечивающим комфортность жизнеобеспечения в условиях суточных и сезонных колебаний внешних климатических условий. Именно на решение некоторых задач, составляющих актуальную проблему автоматизации управления процессом теплоснабжения зданий, направлена данная статья.