

21. Филimoniхин, Г. Б. Дослідження процесу усунення пасивними автобалансирами великих кутів нутації [Текст] / Г. Б. Филimoniхин, В. В. Пирогов, И. И. Филimoniхина // Східно-Європейський журнал передових технологій. – 2013. – Т. 6, № 7(66). – С. 34–38. – Режим доступа: <http://journals.urau.ua/eejet/article/view/18705>
22. Filimonikhin, G. B. Stability of Steady-State Motion of an Isolated System Consisting of a Rotating Body and Two Pendulums [Text] / G. B. Filimonikhin, I. I. Filimonikhina, V. V. Pirogov // International Applied Mechanics. – 2014. – Vol. 50, Issue 4. – P. 459–469. doi: 10.1007/s10778-014-0651-9
23. Filimonikhin, G. B. Stabilization of the Rotation Axis of a Solid by Coupled Perfectly Rigid Bodies [Text] / G. B. Filimonikhin, V. V. Pirogov // International Applied Mechanics. – 2005. – Vol. 41, Issue 8. – P. 937–943. doi: 10.1007/s10778-005-0164-7
24. Kane, T. R. Spacecraft Dynamics [Text] / T. R. Kane, P. W. Likins, D. A. Levinson. – McGraw-Hill, New York, 1983. – 436 p.
25. Mirer, S. A. Optimal Parameters of a Spin-Stabilized Satellite with a Pendulum-Like Damper [Text] / S. A. Mirer, V. A. Sarychev // Cosmic Research. – 1997. – Vol. 35, Issue 6. – P. 609–615.
26. Томпсон Дж., М. Т. Неустойчивости и катастрофы в науке и технике [Текст] / М. Т. Томпсон Дж.; пер. с англ. – М.: Мир, 1985. – 254 с.
27. Ольховский, И. И. Курс теоретической механики для физиков [Текст] / И. И. Ольховский. – М.: Наука, 1970. – 569 с.
28. Філімоніхін, Г. Б. Стабілізація маятниками положення осі обертання ізольованого абсолютно твердого тіла [Текст] / Г. Б. Філімоніхін // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. – 2002. – Вип. 7-8. – С. 67–71.
29. Filimonikhin, G. B. Attitude stabilization of the rotational axis of a carrying body by pendulum dampers [Text] / G. B. Filimonikhin, V. V. Pirogov, I. I. Filimonikhina // International Applied Mechanics. – 2007. – Vol. 43, Issue 10. – P. 1167–1173. doi: 10.1007/s10778-007-0117-4
30. Filimonikhina, I. I. Conditions for balancing a rotating body in an isolated system with automatic balancers [Text] / I. I. Filimonikhina, G. B. Filimonikhin // International Applied Mechanics. – 2007. – Vol. 43, Issue 11. – P. 1276–1282. doi: 10.1007/s10778-007-0132-5
31. Нелинейная механика [Текст] / под ред. В. М. Матросова, В. В. Румянцев, А. В. Карапетяна. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 432 с.

Розглядається задача про розподіл радіальних та окружних напружень в стінці порожнистого циліндричного квазитвердого ядра вихрової трубки. Рішення базується на використанні двох інших відомих рівнянь з лінійної теорії пружності – задачі Ламе і задачі про напружений стан труби, що обертається. Наведено порівняння отриманих рівнянь з відомими рівняннями для суцільного вихору

Ключові слова: квазитверде ядро вихоря, розподіл напруги в стінці, вплив структури течії

Рассматривается точное решение задачи о распределении радиальных и окружных напряжений в стенке полого цилиндрического квазитвердого ядра вихровой трубки. Решение основано на использовании двух других известных уравнений из линейной теории упругости – задачи Ламе и задачи о напряженном состоянии вращающейся трубы. Приведено сравнение полученных уравнений с известными для сплошного вихря

Ключевые слова: квазитвердое ядро вихря, распределение напряжения в стенке, влияние структуры течения

УДК 531.3:532.5

DOI: 10.15587/1729-4061.2015.51081

АНАЛИЗ ВРАЩЕНИЯ НЕВЯЗКОЙ ВИХРОВОЙ ТРУБКИ

В. А. Бударин

Кандидат технических наук, доцент
Кафедра теоретической, общей
и нетрадиционной энергетики
Одесский национальный
политехнический университет
пр. Шевченко, 1, г. Одесса,
Украина, 65044
E-mail: vit-b@inbox.ru

1. Введение

Понятие вихровой трубки вводится в механику жидкости по аналогии с понятием трубки тока и описывается математически с помощью теорем Гельмгольца и теоремы Стокса для односвязной области вращения [1–3]. Течения такого типа широко представлены в природе от мелких пыльных вихрей до тропических ураганов. Большое распространение получили технические устройства с различными вращающимися рабочими телами, к числу которых можно отнести центробежные сепараторы различных видов, вихревые горелки, вихревые трубы и т. д. Существуют также не-

гативные последствия возникновения вихревых трубок, к числу которых можно отнести воронки вблизи всасывающих патрубков насосов и газовых турбин.

Важность вихревых течений в природе и технике потребовала разработки методов расчета для различных частных случаев. Однако современное математическое описание таких течений не нашло инженерной реализации и существует фактически отдельно от решения практических задач. Известно большое количество теоретических работ, призванных уменьшить существующий разрыв, однако в настоящее время инженерный расчет проводится по полуэмпирическим методикам, которые имеют ограниченную область

применения, жестко связанную с результатами экспериментов в конкретных условиях [4–8].

В настоящей работе анализируется физическая картина одного из распространенных видов течения в рамках известных математических моделей и их дифференциальных уравнений.

2. Анализ литературных данных и постановка задачи

Математическое описание вращающегося потока чаще всего выполняется на основе теории потенциальных течений и с помощью динамики идеальной жидкости для установившегося и равномерного течения. В результате выполненных исследований было установлено, что во вращающемся потоке градиент давления в радиальном направлении уравнивается силой инерции, т. е.

$$\frac{dp}{dr} = \rho\omega^2 r. \quad (1)$$

Варианты использования этого уравнения рассмотрены в многочисленных работах теоретического и экспериментального характера. Хорошее соответствие с теорией имеет место при вращении потока внутри сосуда или вместе с сосудом, однако при истечении в неограниченную среду такой поток быстро распадается [1, 5, 6, 9].

Эксперименты в вихревых камерах обнаружили существование двух цилиндрических областей с разными законами изменения скорости вдоль радиуса. Первая область, находящаяся вблизи оси вращения, называется квазитвердым ядром и имеет постоянную угловую скорость по всему сечению. Вторая область, находящаяся между ядром и неподвижной окружающей средой, характеризуется большим влиянием вязкого трения и движется с окружной скоростью, меняющейся по гиперболическому закону. Такое течение является устойчивым, если давление вблизи оси вращения меньше, чем на периферии [1, 6, 8, 9].

Существуют свободные вращающиеся потоки, сохраняющие устойчивость без присутствия стенки в радиальном направлении, наблюдения и физическое моделирование которых обнаруживает наличие полового квазитвердого ядра.

Таким образом, наблюдения и эксперимент показывают, что существует две структуры ядра цилиндрического вихря – сплошная и полая [1, 2, 6–8].

Аналогичная задача о вращении твердого цилиндра вокруг своей оси при одинаковых давлениях внутри и снаружи рассматривается в другой области классической механики – теории упругости. Так же как и в случае вихревого течения, такой цилиндр может быть сплошным или полым. Эта задача имеет точное решение и учитывает влияние геометрии, свойств материала и угловой скорости (сил инерции).

Еще одна точно решенная задача теории упругости (Ламе) рассматривает напряженное состояние стенки в неподвижном полом цилиндре при наличии разных давлений внутри и снаружи. Расчетная схема этой задачи также соответствует рассматриваемому случаю квазитвердой стенки, учитывая влияние геометрии и сил давления [10, 11].

Таким образом, известные решения позволяют рассчитать напряженное состояние твердой стенки только при отдельном влиянии сил давления и инерции.

Наблюдения и анализ уравнений механики жидкости для цилиндрического вихря показывает, что силы инерции и давления действуют одновременно. Это дает основания для использования указанных задач теории упругости для расчета напряженного состояния квазитвердого трубчатого ядра вихря при совместном влиянии двух видов сил.

Решение выполняется в рамках двух моделей текучей среды, которые получили название идеальной и невязкой жидкости.

Квазитвердая трубчатая область вращения рассматривается как сосуд, внутри которого давление меньше, чем снаружи.

Для нахождения распределения радиальных и окружных напряжений используются известные из линейной теории упругости указанные уравнения, к которым применяется теорема суперпозиции решений.

3. Цель и задачи исследования

Целью настоящей работы является нахождение уравнений для расчета напряженного состояния ядра вихревой трубки любой структуры.

Для достижения указанной цели были поставлены следующие задачи:

- вывод уравнений, которые учитывают совместное влияние сил давления и инерции;
- анализ полученных уравнений и их сравнение с известными решениями для сплошного вихря;
- рассмотрение физического смысла полученных результатов и оценка их практического использования.

4. Уравнения движения вихревой трубки и их краткий анализ

Дифференциальное уравнение вращения твердого (квазитвердого) цилиндра в обозначениях теории упругости имеет вид [10, 11]:

$$\frac{d\sigma}{dr} + \frac{\sigma - \sigma_\theta}{r} + \rho\omega^2 r = 0, \quad (2)$$

где σ и σ_θ – соответственно радиальное и окружное напряжение, ρ – плотность стенки ядра, ω – угловая скорость.

Решение уравнения (2) совместно с обобщенным законом Гука приводит к следующим двум частным решениям уравнения движения:

1. Для неподвижного цилиндрического сосуда при различных давлениях внутри (p_a) и снаружи (p_b)/задача Ламе.

$$\sigma_r = \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2} - \frac{p_a - p_b}{b^2 - a^2} \frac{a^2 b^2}{r^2},$$

$$\sigma_\theta = \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2} + \frac{p_a - p_b}{b^2 - a^2} \frac{a^2 b^2}{r^2}.$$

2. Для вращающейся трубы:

$$\sigma_r = \frac{\rho\omega^2}{8}(3+\mu)\left(a^2 + b^2 - \frac{a^2b^2}{r^2} - r^2\right), \tag{3}$$

$$\sigma_\theta = \frac{\rho\omega^2}{8}(3+\mu)\left(a^2 + b^2 + \frac{a^2b^2}{r^2} - \frac{1+3\mu}{3+\mu}r^2\right). \tag{4}$$

где μ – коэффициент Пуассона, учитывающий свойства материала и определяемый по результатам статических испытаний. Так как в соответствии с законами гидростатики напряжение (давление) в жидкости не зависит от ориентации элементарной площадки, коэффициент μ должен быть принят равным единице.

Таким образом, для текучей среды уравнения (3) и (4) примут вид:

$$\sigma_r = \frac{\rho\omega^2}{2}\left(a^2 + b^2 - \frac{a^2b^2}{r^2} - r^2\right), \tag{5}$$

$$\sigma_\theta = \frac{\rho\omega^2}{2}\left(a^2 + b^2 + \frac{a^2b^2}{r^2} - r^2\right). \tag{6}$$

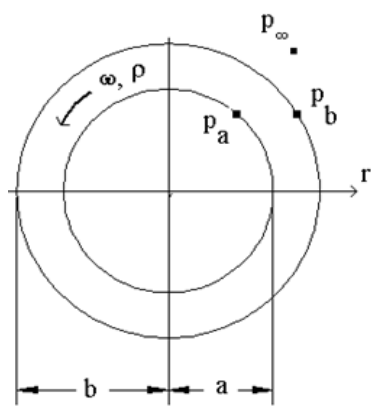


Рис. 1. Схема обозначений для квазитвердого ядра цилиндрического вихря

Определим распределение напряжений в стенке квазитвердого ядра, которое учитывает совместное влияние разности давлений и вращение. Так как задача рассматривается в рамках линейной теории упругости, воспользуемся теоремой суперпозиции решений и получим:

$$\sigma_r(p,\omega) = \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2} - \frac{p_a - p_b}{b^2 - a^2} \frac{a^2 b^2}{r^2} + \frac{\rho\omega^2}{2}\left(a^2 + b^2 - \frac{a^2 b^2}{r^2} - r^2\right), \tag{7}$$

$$\sigma_\theta(p,\omega) = \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2} + \frac{p_a - p_b}{b^2 - a^2} \frac{a^2 b^2}{r^2} + \frac{\rho\omega^2}{2}\left(a^2 + b^2 + \frac{a^2 b^2}{r^2} - r^2\right). \tag{8}$$

Уравнения (7) и (8) можно получить обычным способом, путем решения уравнения (2) при соответствующих граничных условиях.

Учитывая противоположные знаки у давления и нормального напряжения, уравнения (7) и (8) в форме давлений примут вид:

$$p_r = \frac{p_b b^2 - p_a a^2}{b^2 - a^2} + \frac{p_b - p_a}{b^2 - a^2} \frac{a^2 b^2}{r^2} - \frac{\rho\omega^2}{2}\left(a^2 + b^2 - \frac{a^2 b^2}{r^2} - r^2\right), \tag{9}$$

$$p_\theta = \frac{p_b b^2 - p_a a^2}{b^2 - a^2} - \frac{p_b - p_a}{b^2 - a^2} \frac{a^2 b^2}{r^2} - \frac{\rho\omega^2}{2}\left(a^2 + b^2 + \frac{a^2 b^2}{r^2} - r^2\right). \tag{10}$$

Уравнения (7)–(10) справедливы для квазитвердого ядра любой структуры.

Найдем частный случай распределения давлений в сплошном ядре. Тогда из (9) и (10) при $a=0$ (рис. 1).

$$p_r = p_\theta = p(r) = p_b - \frac{\rho\omega^2}{2}(b^2 - r^2), \tag{11}$$

или

$$\sigma_r = \sigma_\theta = -p_b + \frac{\rho\omega^2}{2}(b^2 - r^2). \tag{12}$$

При $r = b$ напряжение на внешней стенке ядра становится равным давлению с обратным знаком.

Одним из отличий вращающегося квазитвердого ядра от вращения твердой трубы является наличие эффекта Бернулли, в результате чего давление на внешней поверхности ядра p_b меньше, чем давление в окружающей среде p_∞ и может быть найдено по

формуле $p_b = p_\infty - \frac{\rho\omega^2 b^2}{2}$ [1, 2, 9].

Подставляя данное уравнение в (11), получим

$$p(r) = p_\infty - \frac{\rho\omega^2}{2}(2b^2 - r^2). \tag{13}$$

Уравнения (11) и (13) совпадают с известными результатами из динамики идеальной жидкости [1, 9].

На рис. 2 показан пример распределения радиальных и окружных напряжений для частного случая течения в объеме воды.

Из графика следует, что окружные напряжения превышают радиальные, а с увеличением относительной толщины вихря оба напряжения стремятся к одному значению, найденному по уравнению (12).

Характерно, что распределение напряжений в ядре сплошного вихря (пунктирная линия на графике) можно найти как полусумму напряжений для полого вихря (сплошные линии на графике).

Уравнение (8) по условию $\sigma_\theta = 0$ позволяет найти параметры вращения, при которых окружное напряжение на внутренней поверхности станет растягивающим (положительным) и течение начнет распадаться. Данное условие может использоваться для борьбы с уже имеющимися воронками или предотвращать возникновение новых.

Например, при $r=a$ из (8) по условию $\sigma_\theta = 0$ получим, что линейная скорость вращения наружной поверхности ядра

$$u_b = \sqrt{\frac{2\left(p_b - p_a \frac{a^2}{b^2}\right)}{\rho\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)}}. \tag{14}$$

Интегрируя уравнение (1), при $a=0$, $r=r_a$ и при $r=b$, $r=r_b$, можно найти скорость вращения сплошного течения

$$u_b = \omega \cdot b = \sqrt{\frac{2(p_b - p_a)}{\rho}}$$

На рис. 2 показано сравнение скоростей вращения полого/уравнение (14)/и сплошного вихря.

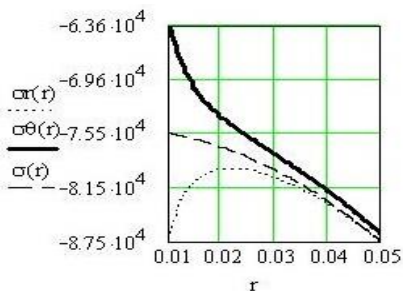


Рис. 2. Распределение радиальных и окружных напряжений в квазитвердом ядре, найденное по (7) и (8) (плотность $\rho=1000$ кг/м³, угловая скорость $\omega=100$ 1/с, $a=0,01$ м, $b=0,05$ м, $p_\infty=10^5$ Па). Средний график построен по уравнению (12)

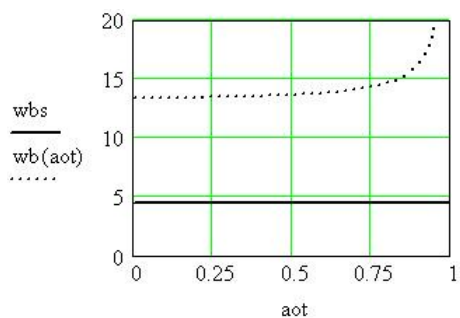


Рис. 3. Скорость вращения полого $w_b(aot)$ и сплошного w_{bs} вихря в зависимости от $aot=a/b$ при $p_a=8 \cdot 10^4$ Па, $p_b=9 \cdot 10^4$ Па

Из приведенных графиков следует, что с уменьшением относительной толщины ядра вихря его предельная скорость растет. Скорость вращения сплошного вихря в сосуде зависит только от разности давления, а ее предельные значения определяются другими факторами.

6. Обсуждение физического смысла уравнений

Сравнение уравнений (7)–(10) с (11)–(13) и их сопоставление со структурой течений позволяет заключить, что давления в точке зависят от ориентации элементарной площадки при наличии в потоке дополнительных поверхностей давления. В данной задаче это полость, внутри которой давление равно p_a . Однако при удалении от границы полости различие между давлениями в разных направлениях уменьшается и стремится к давлению в сплошном потоке, которое можно вычислить по известному уравнению для идеальной жидкости (рис. 2).

Известно большое количество других задач с внутренними поверхностями давления, к которым относятся кавитационные каверны в жидкости, ударная волна в газе, обтекание твердых тел различной формы

и др. Во всех этих случаях внутри контура, находящегося в жидкости, существует второй (внутренний) контур с другим давлением.

Данный результат имеет аналогию с твердым телом, в котором существует понятие концентрации напряжений (например, при наличии отверстий), приводящей к отклонению от гладкого распределения напряжений. Из графиков рис. 2 следует, что это свойство характеризует не только твердую сплошную среду, но и жидкую.

Уравнение (2) для вращения твердого тела без касательных напряжений одновременно является частным случаем системы уравнений для установившегося и равномерного вращения невязкой жидкости. Это позволяет считать (7)–(10) точными решениями системы уравнений, рассмотренной в [1, 9, 12].

Полученный результат о зависимости давления от направления противоречит традиционной точке зрения, основанной на анализе уравнения Навье-Стокса, согласно которой причиной различия давления (напряжений) является вязкость. В то же время полученный результат согласуется с общим уравнением движения сплошной среды (Навье) и с уравнением движения невязкой жидкости, куда входят отличающиеся между собой напряжения, т. е. $\sigma_x \neq \sigma_y \neq \sigma_z$ [1, 2, 12]. Для уточнения полученных результатов целесообразно провести дополнительные эксперименты и проверить теоретические результаты.

Анализ фото и видео материалов по вращению полых вихрей показывает, что они существуют без присутствия стенки в радиальном направлении. Это свойство существенно уменьшает вязкое трение по сравнению с течением в вихревой трубе (сосуде), позволяет получить большие скорости вращения и использовать ее, например, для сжатия облаков пара и аэрозоля, центробежной сепарации и др.

Это же свойство удовлетворяет ранее разработанным условиям удержания плазмы в газовом бланкете за счет сил молекулярного давления [13, 14].

7. Выводы

Рассмотренная задача о вращении невязкого вихря позволила установить распределение радиальных и окружных напряжений (давлений) в стенке цилиндрического квазитвердого ядра любой структуры. Основными влияющими факторами являются силы инерции и давления, а также геометрия стенки ядра. Результаты получены с использованием теоремы суперпозиции решений, которая применена к расчетным уравнениям аналогичных задач теории упругости.

Найден частный случай полученных уравнений для сплошного вихря, который совпал с известным решением для идеальной жидкости.

Анализ уравнений показал, что причиной изменения напряжения (давления) в точке жидкости является структура течения. Этот результат не согласуется с известной точкой зрения, в соответствии с которой такой причиной является вязкость. В то же время этот результат соответствует общим уравнениям движения любой сплошной среды в напряжениях и общим уравнениями движения невязкой жидкости.

В данной работе предполагается, что вихревая трубка имеет неподвижную в пространстве ось вращения, а процесс происходит без влияния вязкого трения.

Литература

1. Лойцянский, Л. Г. Механика жидкости и газа [Текст] / Л. Г. Лойцянский. – М.: Наука, 1978. – 756 с.
2. Genick, B. M. Basic of Fluid Mechanics [Text] / B. M. Genick. – Chicago, 2013. – 604 p.
3. Козлов, В. В. Общая теория вихрей [Текст] / В. В. Козлов. – Ижевск, изд. Дом «Удмуртский университет», 1998. – 238 с.
4. Aboelkassem, Y. New model for compressible vortices [Text] / Y. Aboelkassem, G. H. Vatistas // Journal of Fluids Engineering. – 2007. – Vol. 129, Issue 8. – P. 1073. doi: 10.1115/1.2746897
5. Алексеенко, С. В. Закрученные потоки в технических приложениях (обзор) [Текст] / С. В. Алексеенко, В. Л. Окулов // Теплофизика и аэромеханика. – 1996. – Т. 3, № 2. – С. 101–138.
6. Fluid vortices. Vol. 30 [Text] / S. I. Green (Ed.). – Springer, 1995. doi: 10.1007/978-94-011-0249-0
7. Smets, D., Schaftingen, J. V. Desingularization of vortices for the Euler equation [Text] / D. Smets, J. V. Schaftingen // Archive for Rational Mechanics and Analysis. – 2010. – Vol. 198, Issue 3. – P. 869–925. doi: 10.1007/s00205-010-0293-y
8. Гольдштик, М. А. Вихревые потоки [Текст] / М. А. Гольдштик. – Новосибирск, Наука, 1981. – 366 с.
9. Фабрикант, Н. Я. Аэродинамика [Текст] / Н. Я. Фабрикант. – М.: Наука, 1964. – 816 с.
10. Феодосьев, В. И. Сопротивление материалов [Текст] / В. И. Феодосьев. – М.: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 1999. – 592 с.
11. Работнов, Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела [Текст] / Ю. Н. Работнов. – М.: Наука, 1988. – 712 с.
12. Бударин, В. А. Преобразование уравнения движения в напряжениях для несжимаемой жидкости [Текст] / В. А. Бударин // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – 2015. – Т. 2, № 7 (74). – С. 38–41. doi: 10.15587/1729-4061.2015.39886
13. Гуцол, А. Ф. Возвратно-вихревая термоизоляция плазмы и газового пламени [Текст] / А. Ф. Гуцол, В. Т. Калинин // Теплофизика высоких температур. – 1999. – Т. 37, Вып. 2. – С. 194–201.
14. Вихревая термоизоляция плазмы / под ред. М. А. Гольдштика. – Новосибирск. Ин-т теплофизики, 1979. – 226 с.

Розглянуті головні результати дослідження процесу обтікання гнучкого трубопроводу необмеженим потоком ньютонівської рідини. Дано опис головних особливостей такого процесу при довільних та примусових динамічних коливаннях гнучкого трубопроводу. Показано, що зростання швидкості потоку завжди приводить до нестійких режимів експлуатації трубопроводу

Ключові слова: гнучкий трубопровід, частота коливань, швидкість потоку, відрив вихорів, захват частоти

Рассмотрены основные результаты исследования процесса обтекания гибкого трубопровода неограниченным потоком ньютоновской жидкости. Дано описание основных особенностей такого процесса при произвольных и вынужденных динамических колебаниях гибкого трубопровода. Показано, что увеличение скорости потока всегда приводит к неустойчивым режимам эксплуатации трубопровода

Ключевые слова: гибкий трубопровод, частота колебаний, скорость потока, отрыв вихрей, захват частоты

УДК 629.123

DOI: 10.15587/1729-4061.2015.50249

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ НЕОГРАНИЧЕННОГО ПОТОКА С ГИБКИМ ТРУБОПРОВОДОМ

Ф. А. Бендеберя

Аспирант

Кафедра теории и проектирования
корабля им. проф. Ю. Л. ВоробьеваОдесский национальный морской университет
ул. Мечникова, 34, г. Одесса, Украина, 65000

E-mail: bendeberyafedor@mail.ru

1. Введение

Развитие технологических процессов при работе судов, обслуживающих нефтяные платформы, напрямую связано с использованием различных типов гибких трубопроводов и тросов. Они используются в широких пределах судовых технологий – от подачи рабочих жидкостей и топлива до буксировки различных надводных и подводных аппаратов.

В некоторых случаях, связанных в основном с волнением морской поверхности, скорости набегающего потока могут быть очень большими и приводит к опасным вынужденным колебаниям используемого трубопровода или троса.

Вопрос о выборе длины троса или трубопровода, уходящего в подводную часть, является одним из определяющих. Возможны случаи, когда неправильно выбранные и назначенные режимы эксплуатации бу-