УДК 53.072.13

Ю.Г. Ведміцький

УЗАГАЛЬНЕНІ ЕЛЕКТРИЧНІ СХЕМИ-АНАЛОГИ НЕПЕРЕРВНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ ДОВІЛЬНОГО ПОРЯДКУ

Вінницький національний технічний університет, e-mail: wjug@ukr.net

В роботі на основі математичного дослідження структури рівнянь Лагранжа-Максвела розроблено дуальні електричні і структурну схеми-аналоги неперервних в часі динамічних систем з довільним числом ступенів вільності.

Ключові слова: *теорія динамічних аналогій, електричні схеми, неперервні динамічні системи, електродинамічні аналогії, рівняння Лагранжа-Максвела, число ступенів вільності системи.*

Вступ

Огляд і дослідження сучасного стану *теорії динамічних аналогій* (метода електромеханічних аналогій) [1-8] виявляє окремі нерозв'язанні дотепер, але вкрай важливі для теорії задачі. Однією з таких задач є задача формування *повних* систем електродинамічних аналогій. Як відомо [5], дана теорія оперує двома системами: аналогією типу «сила-напруга» (або першою) і аналогією типу «сила-струм» (другою). Однак аналіз стану обох систем (і першої, і другої) свідчить про їх незавершеність. Так, *в сучасній теорії динамічних аналогій не розроблено ні узагальнених структурних, ані узагальнених електричних схем, які б виступали аналогами неперервних у часі динамічних (механічних) систем з довільним (!) числом ступенів вільності, також, відповідно, немає загальних правил побудови цих схем!* Як наслідок, в більшості випадків наводяться структурні і електричні схеми-аналоги для систем з обмеженим числом ступенів вільності – переважно з одним. Електричних схем *з більшим* числом ступенів вільності, ніж $n=1$, і водночас побудованих в другій системі аналогій (аналогії типу «сила-струм») не представлено взагалі. В окремих випадках відносно цієї (другої) системи допускаються неприпустимі помилки у визначенні системи узагальнених координат і швидкостей [8]. І в усіх випадках наведені схеми є неповними, оскільки не враховують багатьох енергетичних взаємоперетворень, що відбуваються чи можуть відбуватися в механічній системі. І це в той час, коли і рівняння Лагранжа II роду, що складені для механічної системи, і рівняння Лагранжа-Максвелла (для електричної системи), на подібність між якими спирається теорія динамічних аналогій, такі взаємоперетворення описує.

Тому дана робота за мету ставить доповнення першої і другої систем електродинамічних аналогій узагальненими електричними і структурною схемами, які будуть аналогами неперервних у часі динамічних систем з довільним числом ступенів вільності. Розв'язання цієї задачі сприятиме удосконаленню теорії динамічних аналогій в цілому.

Узагальнена електрична схема аналогії типу «сила-напруга»

Опишемо еволюцію електричної системи з n ступенями вільності за допомогою рівнянь Лагранжа-Максвелла в першій системі електродинамічних аналогій:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial W_{м}}{\partial i_s}+\frac{\partial W_e}{\partial q_s^{(e)}}+\frac{\partial \Phi_e}{\partial i_s}=e_s,\ s=1,2,...,n. \qquad (1)$$

Задля побудови узагальненої електричної схеми наразі *змінимо структуру* цих рівнянь.

В загальному випадку в означеній системі аналогій енергія зосередженого в електричному колі магнітного поля є однорідною квадратичною функцією від узагальнених швидкостей – контурних струмів $i_1,...,i_n$, які циркулюють n незалежними контурами [5, 9]. Перегрупуємо складові цієї функції і сформуємо її структуру наступним чином:

$$W_{м}(i_1,...,i_n)=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}(\pm)L_{sp}i_s i_p=\frac{1}{2}\sum_{s\ 1}^{n}L_{ss}i_s^2+\sum_{s\ 1}^{n}\sum_{p\ s+1}^{n}(\pm)L_{sp}i_s i_p, \qquad (2)$$

врахувавши при цьому, що коефіцієнти індукції $L_{sp}=L_{ps}$. Необхідно зазначити, що в рівнянні (2) сума є алгебраїчною. Це означає, що якщо напрямки контурних струмів i_s та i_p відносно один одного в спільних вітках незалежних контурів будуть збігатися, перед відповідною складовою даної суми має стояти знак "+", інакше – знак "−".

Для спрощення подальших математичних викладок лінеаризуємо систему, усунувши можливу залежність коефіцієнтів індукції від контурних струмів. Також будемо вважати ці коефіцієнти постійними у часі.

Отже, на підставі співвідношення (2) для довільного m-го диференціального рівняння системи (1), де $m \in \{1,2,...,n\}$, його першу складову $\frac{d}{dt}\frac{\partial W_м}{\partial i_m}$ можна представити як

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial W_м}{\partial i_m} = \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial i_m}\left[\frac{1}{2}\sum_{s=1=}^{n} L_{ss} i_s^2 + \sum_{s}^{n}\sum_{1p}^{n}\sum_{s+1}^{n}(\pm) L_{sp} i_s i_p\right] = L_{mm}\frac{d\,i_m}{dt} + \sum_{s=1}^{m-1}(\pm) L_{ms}\frac{d\,i_s}{dt} + \sum_{s=m+1}^{n}(\pm) L_{ms}\frac{d\,i_s}{dt}.$$

Подамо індуктивність L_{mm} як суму $L_{mm} = L_m + \sum_{s=1}^{m-1} L_{ms} + \sum_{s=m+1}^{n} L_{ms}$. Тоді остаточно маємо

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial W_м}{\partial i_m} = L_m\frac{d\,i_m}{dt} + \sum_{s=1}^{m-1} L_{ms}\frac{d}{dt}(i_m \pm i_s) + \sum_{s=m+1}^{n} L_{ms}\frac{d}{dt}(i_m \pm i_s). \quad (3)$$

Подібним чином сформуємо структуру енергії W_e електричного поля, зосередженого в електричній системі-аналозі. В першій системі електродинамічних аналогій ця функція є функцією від узагальнених координат $q_1^{(e)},...,q_n^{(e)}$:

$$W_e\left(q_1^{(e)},...,q_n^{(e)}\right) = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}(\pm)\frac{1}{C_{sp}}q_s^{(e)}q_p^{(e)} = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\frac{1}{C_{ss}}q_s^{(e)2} + \sum_{s=1}^{n}\sum_{p\neq s+1}^{n}(\pm)\frac{1}{C_{sp}}q_s^{(e)}q_p^{(e)}.$$

Тоді для довільного m-го диференціального рівняння з (1) маємо:

$$\frac{\partial W_e}{\partial q_s^{(e)}} = \frac{q_m^{(e)}}{C_m} + \sum_{s=1}^{m-1}\frac{q_m^{(e)} \pm q_s^{(e)}}{C_{ms}} + \sum_{s=m+1}^{n}\frac{q_m^{(e)} \pm q_s^{(e)}}{C_{ms}}. \quad (4)$$

Електричну дисипативну функцію Релея перетворимо аналогічно:

$$\Phi_e(i_1,...,i_n) = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}(\pm)R_{sp}i_s i_p = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}R_{ss}i_s^2 + \sum_{s=1}^{n}\sum_{p=s+1}^{n}(\pm)R_{sp}i_s i_p,$$

звідки для довільного m-го рівняння з (1) можемо записати:

$$\frac{\partial \Phi_e}{\partial i_m} = R_m i_m + \sum_{s=1}^{m-1} R_{ms}(i_m \pm i_s) + \sum_{s=m+1}^{n} R_{ms}(i_m \pm i_s). \quad (5)$$

З урахуванням співвідношень (3) - (5) та після нескладних математичних перетворень рівняння руху електричної системи-аналога (1) остаточно набувають вигляду:

$$\begin{cases} \left(L_1\frac{d\,i_1}{dt} + \frac{q_1^{(e)}}{C_1} + R_1 i_1\right) + \sum_{s=2}^{n}\left(L_{1s}\frac{d}{dt}(i_1 \pm i_s) + \frac{q_1^{(e)} \pm q_s^{(e)}}{C_{1s}} + R_{1s}(i_1 \pm i_s)\right) = e_1, \\ \cdots, \\ \left(L_m\frac{d\,i_m}{dt} + \frac{q_m^{(e)}}{C_m} + R_m i_m\right) + \sum_{\substack{s=1,\\ s\neq m}}^{n}\left(L_{ms}\frac{d}{dt}(i_m \pm i_s) + \frac{q_m^{(e)} \pm q_s^{(e)}}{C_{ms}} + R_{ms}(i_m \pm i_s)\right) = e_m, \\ \cdots, \\ \left(L_n\frac{d\,i_n}{dt} + \frac{q_n^{(e)}}{C_n} + R_n i_n\right) + \sum_{s=1}^{n-1}\left(L_{ns}\frac{d}{dt}(i_n \pm i_s) + \frac{q_n^{(e)} \pm q_s^{(e)}}{C_{ns}} + R_{ns}(i_n \pm i_s)\right) = e_n. \end{cases} \quad (6)$$

Рівняння руху системи (6) є узагальненим вираженням *другого закону Кірхгофа* для кожного з n незалежних контурів окремо і тому мають однакову структуру. В такому вигляді вони водночас розв'язують дві задачі:

1) задачу поділу електричної системи-аналога на *типові елементарні ланки*. Необхідно зазначити, що можливість такого поділу зумовлена *незалежністю* узагальнених координат $q_1,...,q_n$, а точніше – *симетрією*, яку ця незалежність породжує;

2) задачу формування складу і архітектури як кожної з типових елементарних ланок окремо, так і електричної системи в цілому.

Рівнянням руху (6) відповідає електричне коло, фрагмент якого представлено на рис. 1, де показано *m*-ту типову елементарну ланку, складену за відповідним диференціальним рівнянням системи (6). Сама ж узагальнена схема електричної системи-аналога складається з *n* таких ланок, суміжно сполучених поміж собою. Типовими елементарними ланками в означеній системі аналогій є *незалежні замкнуті контури*, кількість яких відповідає числу ступенів вільності системи. В кожному з таких контурів циркулює власний контурний струм (наприклад, i_m для *m*-го незалежного контуру). Сам контур складається з віток – власних (з одним контурним струмом) і спільних (з щонайменше двома узгодженими або зустрічними за напрямком контурними струмами). Якісний склад кожної з віток (як власної, так і спільних) будь-якого незалежного контуру в загальному випадку є однаковим. Це безпосередньо випливає з рівнянь (6). До складу віток входять чи можуть входити індуктивний, ємнісний і резистивний елементи, які визначають динамічні процеси створення магнітного і електричного полів та концентрації енергії в них, а також розсіювання (дисипацію) електромагнітної енергії. В окремих випадках вищеназвані енергетичні процеси або відсутні, або ігноруються. В такому разі відповідні складові в (6) є знуленими, а самі елементи вилучаються із складу віток і заміщуються закоротками (ділянками кола з нульовим електричним опором). Відсутність всіх трьох пасивних елементів в спільній вітці означає повну відсутність силової взаємодії поміж відповідними суміжними незалежними контурами, через що обміну енергією між цими типовими елементарними ланками не буде. У всіх випадках силової взаємодії мається на увазі дія *узагальнених сил* взаємодії. Для першої системи аналогій такими силами слугують напруги. До складу віток кожного з *n* незалежних контурів входить чи може входити джерело контурної е.р.с. (або їх сукупність), яке створює силову взаємодію (обмін енергією) відповідного контуру (типової елементарної ланки) електричної системи-аналога із зовнішнім середовищем.

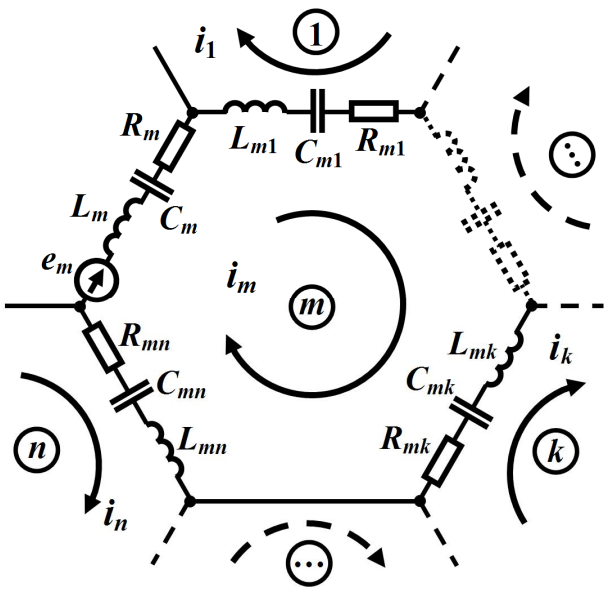


Рис. 1. Типова елементарна ланка узагальненої електричної схеми першої системи електродинамічних аналогій

Узагальнена електрична схема аналогії типу «сила-струм»

Для розробки узагальненої схеми в другій системі електродинамічних аналогій є щонайменше два напрямки. Опустивши деталі, скористаємося запропонованим вище підходом. Так, для другої системи аналогій рівняння Лагранжа-Максвелла, які описують еволюцію електричної системи-аналога, мають вигляд:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial W_e}{\partial \varphi_s}+\frac{\partial W_м}{\partial \psi_s}+\frac{\partial \Phi_e}{\partial \varphi_s}=J_s, \quad s=1,2,...,n. \tag{7}$$

Змінимо структуру однорідних квадратичних функцій енергій електричного і магнітного полів, зосереджених в електричній системі-аналозі, та електричної дисипативної функції Релея:

$$W_e(\varphi_1,...,\varphi_n)=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}(\pm)C_{sp}\varphi_s\varphi_p=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}C_{ss}\varphi_s^2-\sum_{s=1}^{n}\sum_{p=s+1}^{n}C_{sp}\varphi_s\varphi_p,$$

$$W_м(\psi_1,...,\psi_n)=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}(\pm)\frac{1}{L_{sp}}\psi_s\psi_p=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\frac{1}{L_{ss}}\psi_s^2-\sum_{s=1}^{n}\sum_{p=s+1}^{n}\frac{1}{L_{sp}}\psi_s\psi_p,$$

$$\Phi_e(\varphi_1,...,\varphi_n)=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}(\pm)\frac{1}{R_{sp}}\varphi_s\varphi_p=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\frac{1}{R_{ss}}\varphi_s^2-\sum_{s=1}^{n}\sum_{p=s+1}^{n}\frac{1}{R_{sp}}\varphi_s\varphi_p,$$

звідки для довільного m, де $m \in \{1,2,...,n\}$, маємо:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial W_e}{\partial \varphi_m} = C_m \frac{d\varphi_m}{dt} + \sum_{s=1}^{m-1} C_{ms} \frac{d}{dt}(\varphi_m - \varphi_s) + \sum_{s=m+1}^{n} C_{ms} \frac{d}{dt}(\varphi_m - \varphi_s), \quad (8)$$

$$\frac{\partial W_м}{\partial \psi_s} = \frac{\psi_m}{L_m} + \sum_{s=1}^{m-1} \frac{\psi_m - \psi_s}{L_{ms}} + \sum_{s=m+1}^{n} \frac{\psi_m - \psi_s}{L_{ms}}, \quad (9)$$

$$\frac{\partial \Phi_e}{\partial \varphi_m} = \frac{1}{R_m}\varphi_m + \sum_{s=1}^{m-1} \frac{1}{R_{ms}}(\varphi_m - \varphi_s) + \sum_{s=m+1}^{n} \frac{1}{R_{ms}}(\varphi_m - \varphi_s). \quad (10)$$

Тоді диференціальні рівняння руху електричної системи (7) з урахуванням співвідношень (8) - (10) набувають вигляду:

$$\begin{cases} \left(C_1 \frac{d\varphi_1}{dt} + \frac{\psi_1}{L_1} + \frac{\varphi_1}{R_1}\right) + \sum_{s=2}^{n}\left(C_{1s}\frac{d}{dt}(\varphi_1 - \varphi_s) + \frac{\psi_1 - \psi_s}{L_{1s}} + \frac{\varphi_1 - \varphi_s}{R_{1s}}\right) = J_1, \\ \cdots, \\ \left(C_m \frac{d\varphi_m}{dt} + \frac{\psi_m}{L_m} + \frac{\varphi_m}{R_m}\right) + \sum_{\substack{s=1,\\ s\neq m}}^{n}\left(C_{ms}\frac{d}{dt}(\varphi_m - \varphi_s) + \frac{\psi_m - \psi_s}{L_{ms}} + \frac{\varphi_m - \varphi_s}{R_{ms}}\right) = J_m, \\ \cdots, \\ \left(C_n \frac{d\varphi_n}{dt} + \frac{\psi_n}{L_n} + \frac{\varphi_n}{R_n}\right) + \sum_{s=1}^{n-1}\left(C_{ns}\frac{d}{dt}(\varphi_n - \varphi_s) + \frac{\psi_n - \psi_s}{L_{ns}} + \frac{\varphi_n - \varphi_s}{R_{ns}}\right) = J_n. \end{cases} \quad (11)$$

Як і у випадку з системою (6), диференціальні рівняння руху (11) в такому вигляді подання також розв'язують задачу *поділу* електричної системи-аналога на типові елементарні ланки і водночас виявляють склад і архітектуру будови як кожної з цих ланок окремо, так і електричної системи-аналога в цілому. Це зумовлено тією обставиною, що кожне з диференціальних рівнянь (11) має однакову структуру і є вираженням *першого закону Кірхгофа*, складеного окремо для кожного з n вузлів електричного кола за виключенням тих вузлів, об'єднаних в один, електричний потенціал яких штучно прийнятий за нуль. На рис. 2 наведено m-ту елементарну ланку узагальненої електричної схеми в другій системі електродинамічних аналогій. Сама ж схема електричної системи-аналога, як і в попередньому випадку, складається з n таких ланок, суміжно сполучених між собою. Дана схема відповідає рівнянням руху (11), через що є аналогом динамічної системи з довільним числом n ступенів вільності. Типовою елементарною ланкою узагальненої схеми слугує сукупність віток електричного кола, які сходяться до кожного з його n вузлів, наприклад, до m-го (рис. 2). Сукупності усіх віток, що сходяться до будь-якого (окрім нульового) вузла, відповідно до рівнянь (11), доцільно поділяти на власні і спільні групи віток. До власної групи віток довільного m-го вузла відносяться всі паралельно з'єднані вітки, які розташовані між даним вузлом і вузлом штучного нульового потенціалу. Кожна із сукупностей паралельних віток, які сполучають даний m-ий вузол із суміжними з ним (окрім нульового) вузлами, утворює спільну групу віток цього вузла. Як безпосередньо випливає з рівнянь руху (11), якісний склад кожної з груп віток (як власної,

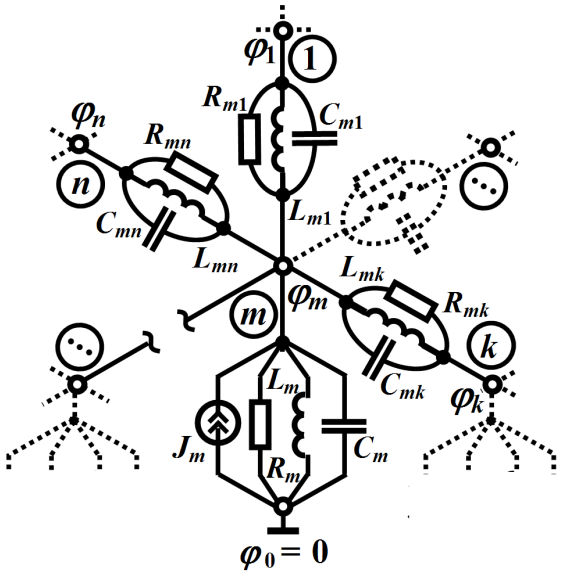


Рис. 2. Типова елементарна ланка узагальненої електричної схеми другої системи електродинамічних аналогій

так і спільних) будь-якої типової елементарної ланки в загальному випадку є однаковим. До складу таких груп віток входять або можуть входити індуктивний, ємнісний і резистивний елементи, які, як і у випадку з першою системою аналогій, визначають процеси створення магнітного і електричного полів, концентрації енергії в них, а також дисипацію електромагнітної енергії. В тих випадках, коли названі енергетичні процеси відсутні або ігноруються, відповідні складові в (11) мають дорівнювати нулю, а вітки з відповідними елементами вилучаються із складу груп віток, що еквівалентно розриву вітки. Відсутність всіх трьох віток в спільній групі віток означає повну втрату силової взаємодії між відповідними типовими елементарними ланками. В такому разі обміну енергією поміж цими ланками не буде. Необхідно зазначити, що в другій системі електродинамічних аналогій узагальненою силою взаємодії між ланками є електричний струм, який проходить вітками спільної групи двох суміжних вузлів. До складу груп віток кожної з n типових ланок може входити джерело вузлового струму, яке враховує силову взаємодію (обмін енергією) відповідної типової елементарною ланки системи із зовнішнім середовищем.

Узагальнена структурна схема електричної системи-аналога з n ступенями вільності

Аналіз рівнянь (6) і (11) та дослідження узагальнених електричних схем (рис. 1 і 2) дозволяють сформувати узагальнену структурну схему, яка буде аналогом неперервної динамічної системи з довільним числом n ступенів вільності (рис. 3). На рисунку електрична система-аналог показана зовнішнім колом (штрихова лінія), а її типові елементарні ланки – пронумерованими колами. Загальна кількість таких ланок відповідає числу ступенів вільності системи. Стрілками позначено поле дії узагальнених сил, в якому перебуває чи може перебувати кожна із типових елементарних ланок, утворених внаслідок поділу системи. До цих сил відносяться *зовнішні* узагальнені сили $Q_1, Q_2, ..., Q_n$, які діють або ж можуть діяти безпосередньо на типові елементарні ланки по відповідним узагальненим координатам, і *внутрішні* сили взаємодії $D_{12}, ..., D_{1n}; ...; D_{s1}, ..., D_{sn}; ...$, які з'являються чи можуть з'явитися поміж кожною парою елементарних ланок за умови взаємодії останніх. Оскільки під час силової взаємодії відбувається обмін енергією: в першому випадку – між кожною елементарною ланкою і зовнішнім середовищем, а в другому – поміж самими елементарними ланками, то наведені на рис. 3 стрілки водночас можна інтерпретувати як *енергетичні* канали, якими, по-перше, електромагнітна енергія надходить до електричної системи ззовні або полишає її, а, по-друге, циркулює в межах самої системи між елементарними ланками, концентруючись там або (і) розсіюючись. В першій системі аналогій такими енергетичними каналами є спільні вітки між незалежними контурами, а в другій системі – спільні групи віток між суміжними (окрім нульового) вузлами.

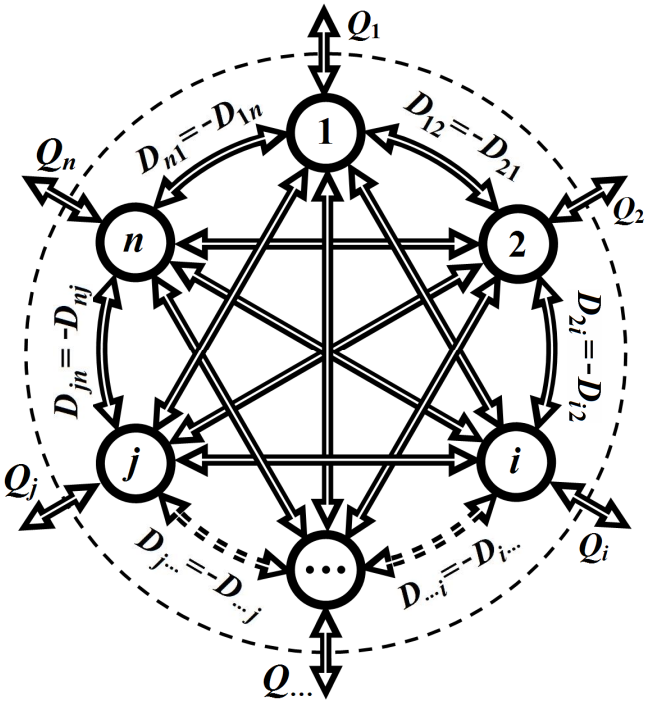


Рис. 3. Узагальнена структурна схема електричної (механічної) динамічної системи з довільним числом n ступенів вільності

Таким чином, на підставі рівнянь (6) і (11) *типовою елементарною ланкою* будемо називати ділянку електричного кола (системи), енергетичний стан якої за умови відсутності силової взаємодії (обміну енергією) з іншими такими ж ланками залежатиме тільки від *однієї* узагальненої координати і її швидкості, а за наявності такої взаємодії – ще і від узагальненої

координати і швидкості відповідної суміжної взаємодіючої ланки.

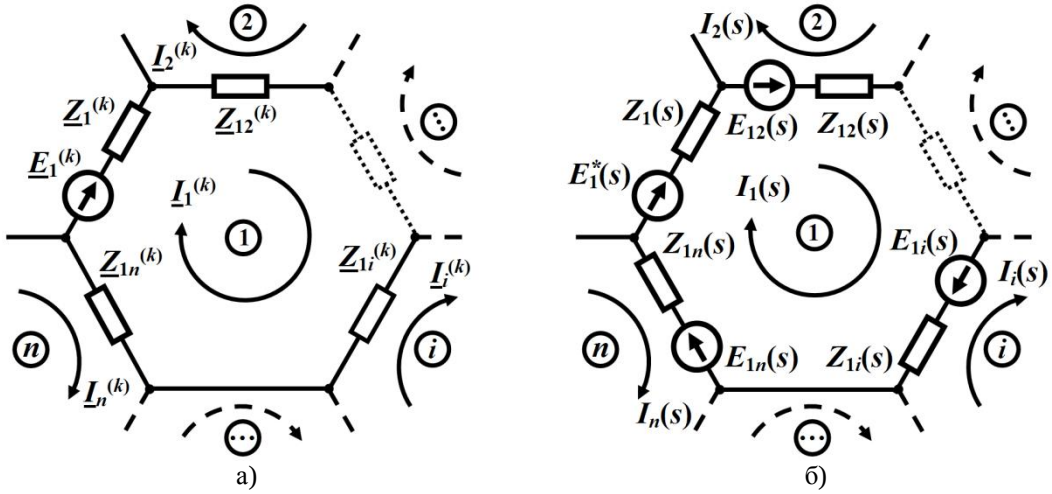
Електричним узагальненим силам взаємодії між типовими елементарними ланками притаманні загальні закономірності. Так, *узагальнена дія за кожною узагальненою електричною координатою з боку однієї типової елементарної ланки електричної матеріальної системи на іншу завжди породжує за цією ж координатою узагальнену протидію, рівну за величиною і протилежну за знаком*, тобто $D_{ij} + D_{ji} = 0$, $i \neq j$, $i \in \{1,2,...,n\}$, $j \in \{1,2,...,n\}$. Дане твердження безпосередньо випливає з рівнянь (6) і (11) і є електричним аналогом теореми 3, сформульованої і доведеної в [10] для механічних систем.

Комплексні і операторні схеми узагальненої електричної системи-аналога

а) Дослідження окремих режимів роботи лінеаризованої системи-аналога зручно проводити за допомогою *спектрального метода*, скориставшись символічною (частотною) формою її часових математичних моделей (6) і (11). Так, за *усталеного періодичного* режиму роботи системи-аналога рівнянням (6) можна співвіднести систему рівнянь, складену відносно комплексних контурних струмів для кожної *k*-ої гармоніки з спектрального складу окремо:

$$\begin{cases} \left[R_1 + j\left(k\omega L_1 - \dfrac{1}{k\omega C_1}\right)\right]\underline{I}_1^{(k)} + \sum\limits_{p=2}^{n}\left[R_{1p} + j\left(k\omega L_{1p} - \dfrac{1}{k\omega C_{1p}}\right)\right]\left(\underline{I}_1^{(k)} \pm \underline{I}_p^{(k)}\right) = \underline{E}_1^{(k)}, \\ \cdots, \\ \left[R_n + j\left(k\omega L_n - \dfrac{1}{k\omega C_n}\right)\right]\underline{I}_n^{(k)} + \sum\limits_{p=1}^{n-1}\left[R_{np} + j\left(k\omega L_{np} - \dfrac{1}{k\omega C_{np}}\right)\right]\left(\underline{I}_n^{(k)} \pm \underline{I}_p^{(k)}\right) = \underline{E}_n^{(k)}. \end{cases}$$

Тоді в першій системі аналогій комплексна електрична схема-аналог динамічної системи з довільним числом ступенів вільності матиме вигляд, наведений на рис. 4, а, де комплексні опори першого незалежного контуру $\underline{Z}_1^{(k)} = R_1 + j\left(k\omega L_1 - \dfrac{1}{k\omega C_1}\right)$, $\underline{Z}_{1p}^{(k)} = R_{1p} + j\left(k\omega L_{1p} - \dfrac{1}{k\omega C_{1p}}\right)$.



а) б)

Рис. 4. Комплексна і операторна схеми неперервної динамічної системи з *n* ступенями вільності

б) Для дослідження *перехідних процесів* в лінеаризованій системі доцільно застосувати *операторний метод* аналізу і використовувати операторну форму її часових математичних моделей (6) і (11). Наприклад, для першої системи електродинамічних аналогій рівнянням (6) відповідатимуть рівняння, які складено відносно зображень контурних струмів (за Лапласом) з урахуванням ненульових незалежних початкових умов:

$$\begin{cases} \left(R_1 + sL_1 + \dfrac{1}{sC_1}\right) I_1(s) + \sum\limits_{p=2}^{n} \left(R_{1p} + sL_{1p} + \dfrac{1}{sC_{1p}}\right) \left[I_1(s) \pm I_p(s)\right] = E_1(s) + \sum\limits_{p=2}^{n} E_{1p}(s), \\ \dots, \\ \left(R_n + sL_n + \dfrac{1}{sC_n}\right) I_n(s) + \sum\limits_{p=1}^{n-1} \left(R_{np} + sL_{np} + \dfrac{1}{sC_{np}}\right) \left[I_n(s) \pm I_p(s)\right] = E_n(s) + \sum\limits_{p=1}^{n-1} E_{np}(s). \end{cases}$$

Тоді операторна електрична схема-аналог динамічної системи з довільним числом ступенів вільності матиме вигляд, показаний на рис. 4, б, де для першого незалежного контуру:

$E_1^*(s) = E_1(s) + L_1 i_1(0) - \dfrac{u_{C_1}(0)}{s}$, $E_{1p}(s) = L_{1p}\left[i_1(0) \pm i_p(0)\right] - \dfrac{u_{C_{1p}}(0)}{s}$ – зображення зовнішнього джерела е.р.с. і внутрішні е.р.с. Останні враховують ненульові початкові умови;

$Z_1(s) = R_1 + sL_{OB} + \dfrac{1}{sC_1}$, $Z_{1p}(s) = R_{1p} + sL_{1p} + \dfrac{1}{sC_{1p}}$ – операторні опори віток першого контуру.

Будова інших незалежних контурів в обох випадках є схожою.

Висновки

В роботі проведено математичне дослідження структури рівнянь Лагранжа-Максвела в першій і другій системах електродинамічних аналогій теорії динамічних аналогій. Отримані в результаті дослідження форми рівнянь дозволили для кожної з двох систем аналогій розробити узагальнені електричні і структурну схеми, які є аналогами неперервних у часі динамічних систем з довільним числом ступенів вільності, а також виявити загальні закономірності і правила їх побудови.

Список літературних джерел

1. Павловський М. А. Теоретична механіка: Підручник / М. А. Павловський. – 2-ге вид., стер. – Київ: Техніка, 2004. – 512 с. – ISBN 966-575-002-X.

2. Кронн Г. Исследование сложных систем по частям (диакоптика) / Г. Кронн. – перев. с англ. – Москва: Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1972. – 544 с.

3. Olson H. F. Dynamical Analogies / H. F. Olson. – New York: D. Van Nostrand Company, Inc., 1943. – 197 p.

4. Мандельштам Л. И. Полное собрание трудов. IV. Лекции по колебаниям (1930-1932 гг.) / Под ред. академика М. А. Леонтовича. – Издательство академии наук СССР, 1955. – 512 с.

5. Ведміцький Ю. Г. Елементи теорії електродинамічного моделювання вимірювального перетворення і контролю моменту інерції. Проблематика, динамічні аналогії та принцип дуальності / Ю. Г. Ведміцький, В. В. Кухарчук // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2008. – №5(80). – С. 25–30.

6. Ведміцький Ю. Г. Вимірювальне перетворення і контроль моменту інерції механічних та електромеханічних систем в процесі їх експлуатації. Теорія і практика / Ю. Г. Ведміцький // Вісник Хмельницького національного університету. – 2008. – №4(113). – С. 47-55.

7. Зарубин В. С. Математическое моделирование в технике: Ученик для вузов / Под ред. В. С. Зарубина, А. П. Крищенко. – 2-е изд., стереотип. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2003. – 496 с. – ISBN 5-7038-1270-4.

8. Вибрации в технике: Справочник. В 6-ти т. / Ред. совет: В. Н. Челомей (пред.). – М.: Машиностроение, 1978 – Т.1. Колебания линейных систем / Под ред. В. В. Болотина. 1978. – 352 с.

9. Карпов Ю. О. Теоретичні основи електротехніки. Електромагнітне поле: Підручник / Ю. О. Карпов, Ю. Г. Ведміцький, В. В. Кухарчук. – Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2008. – 407 с. – ISBN 978-966-641-236-5.

10. Ведміцький Ю. Г. Загальні закономірності процесу вимірювального перетворення моменту інерції / Ю. Г. Ведміцький // Вісник Інженерної академії України. – 2009. – Випуск 2. – С. 67 – 71.