УДК 519.7.004.8; 621.396

А.Ф. Дяченко, к.т.н., с.н.с.
Н.В. Оленев, к.т.н.

МОДЕЛЬ ДЛЯ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ПРЕДЕЛЬНОЙ ПРОПУСКНОЙ СПОСОБНОСТИ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫХ ИСПЫТАНИЙ

Предлагается модель для оценки методом максимального правдоподобия вероятностей успешного обслуживания в зависимости от интенсивностей потока заявок и прогнозирования уровня максимальной интенсивности потока заявок, которые могут быть обслужены системой с заданной вероятностью.

Ключевые слова: *вероятностная модель, статистическое прогнозирование, эффективность системы массового обслуживания, плотность потока заявок.*

Решение задачи объективной оценки предельных возможностей системы массового обслуживания (СМО) обычно связано с двумя видами трудностей. Теоретические оценки возможностей системы являются мало приемлемыми из-за многофакторности исходных условий для обслуживания и неопределенностей случайного характера. Экспериментальные же оценки считаются проблемными из-за практической невозможности и нецелесообразности адекватного воспроизведения обстановки, близкой к реальной.

В известной литературе наиболее часто эта задача решается с помощью имитационного моделирования. Однако, отсутствие проверенных реальным опытом данных об отличиях реального потока заявок от общеизвестного пуассоновского, данных о параметрах распределения реальных случайных процессов, касающихся вариантов ситуаций в сложной обстановке, снижает ценность результатов такого моделирования [1, 2, 3].

Целью статьи является нетрадиционный подход, позволяющий находить решение теоретически, однако основанное на реальных результатах предварительных испытаний типовой СМО. Представляется целесообразным предлагаемое здесь статистическое прогнозирование процесса обслуживания, основанное, во-первых, на построении вероятностной модели, адекватно учитывающей обобщенные факторы, которые способствуют, и факторы, которые препятствуют успешному обслуживанию; во-вторых, на получении экспериментальных данных об относительном количестве (доле B) успешных обслуживаний при малых значениях интенсивностей (плотности потока v) заявок на обслуживание. Целью этого этапа является экспериментальное выявление закономерности $B(v)$ по ограниченному количеству данных реальных испытаний эффективности СМО. Особенности построения вероятностной модели, которая учитывает одновременное противоборство факторов более адекватно, чем известные модели. Это отображается вероятностями противоположных событий в виде $B(v)$ и $[1- B(v)]$ и сводятся к следующему.

Поскольку указанные факторы воздействуют синхронно, то результирующая скорость изменения вероятности (частости, доли) успешных обслуживаний $dB(v)/dv$ должна быть пропорцинальна произведению указанных вероятностей $B(v)$ и $[1-B(v)]$. В качестве коэффициента пропорциональности при этом целесообразно взять так называемый коэффициент γ противодействия факторов, имеющий смысл разности интенсивностей их противодействия. В результате получаем дифференциальное уравнение, которое адекватно отображает особенности моделируемого процесса в виде

$$dB(v)/dv = \gamma\, B(v)\cdot[1-B(v)]. \qquad (1)$$

Интегрируя (1) при начальных условиях, например, $B(v = v_{0,5}) = 0{,}5$, где $v_{0,5}$ – плотность потока заявок на обслуживание, при которой уровень доли успешных

обслуживаний достигает половины его максимального значения, получаем на данном этапе вероятностную модель (тренд) зависимости вероятностей успешного обслуживаний $B(v)$ от интенсивности потока заявок v на целераспределение в виде (рис. 1)

$$B(v) = \{1 + exp[\gamma(v - v_{0,5})]\}^{-1} . \qquad (2)$$

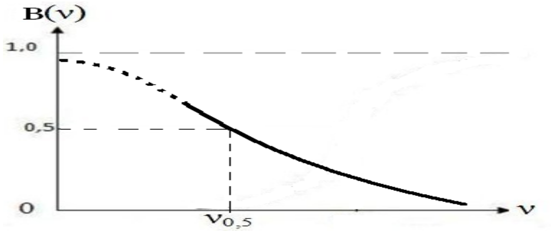

Рис.1. Зависимость вероятностей успешных обслуживаний от интенсивности потока заявок.

Пусть далее задача состоит в нахождении оценок максимального правдоподобия параметров γ и $v_{0,5}$ и погрешностей этих оценок по ограниченной совокупности m значений функции (2), наблюдаемых н

а начальном интервале значений v, т.е. по дискретным экспериментальным данным, например, через каждые $0,1\ v_{макс}$.

Считаем, что для тренда (2) экспериментально получены его дискретные значения для аргумента $v = v_к$, $к = 1,\dots,m$.

Оптимальные оценки $(v_{0,5})^*$ и γ^* без принятия специальных мер для линеаризации тренда (2) найти не удается. Поэтому будем искать их в два этапа.

Прежде всего, получим опорные значения $(v_{0,5})_o$ и γ_o по двум значениям функции (2), например, для известных и наиболее удаленных (на экспериментальном интервале) значений аргумента $v = v_1$ и $v = v_m$.

При этом получим систему уравнений в виде

$$B_1 = \{1 + exp[-\gamma_o(v_1 - v_{0,5})]\}^{-1}$$

$$B_m = \{1 + exp[-\gamma_o(v_m - v_{0,5})]\}^{-1}$$

Решение системы дает опорные параметры:

$$\gamma_o = [ln(1/B_1 - 1) - ln(1/B_m - 1)]/(v_m - v_1);$$

$$(v_{0,5})_o = [v_m\, ln(1/B_1 - 1) - v_1 ln(1/B_m - 1)]/ [ln(1/B_1 - 1) - ln(1/B_m - 1)]. \qquad (3)$$

Для нахождения оценок $(v_{0,5})$ и γ методом максимального правдоподобия, с учетом их опорных значений (3) и всех значений функции $B(v)$ на интервале $[v = 0,\ v = v_m]$, причем измеренных с погрешностями $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$, введем обозначения:

$$b_1 = (v_{0,5})_o + \Delta(v_{0,5}) = b_{01} + \Delta b_1; \quad b_2 = \gamma_o + \Delta\gamma = b_{02} + \Delta b_2 . \qquad (4)$$

Разложим $B(v)$ в ряд Тейлора по параметрам b_1 и b_2 в окрестности вектора (b_{o1}, b_{o2}),

ограничиваясь первыми членами разложения. При этом для $v = v_к$, $к = 1,\dots,m$ получим значение $к$-й дискреты в виде

$$B(v_k) = B_{0,0}(v_k) + \sum\nolimits_1^2 \left[dB(v_k)/db_i\right](b_i - b_{0i}) = B_{0,0}(v_k) + \sum\nolimits_1^2 B_i(v_k)(b_i - b_{0i}),$$

(5)

где

$$B_{0,0}(v_k) = \{1+exp[-b_{02}(v_к - b_{01})]\}^{-1};$$

$$B_i(v_к) = - \{1+exp[-b_{02}(v_к - b_{01})]\}^{-2} exp[-b_{02}(v_к - b_{01})]b_{02}, \qquad (6)$$

$$B_2(v_k) = \{1+exp[-b_{02}(v_к - b_{01})]\}^{-2} exp[-b_{02}(v_к - b_{01})](v_к - b_{01}).$$

Представим для $t = t_к$, $к = 1,\dots,m$ выражение (5) системой вида

$$A^T \cdot \Delta b = C ,$$

$$A = \begin{pmatrix} B_1(v_1) & \dots & B_1(v_m) \\ B_2(v_1) & \dots & B_2(v_m) \end{pmatrix}; \quad \Delta b = \begin{pmatrix} \Delta b_1 \\ \Delta b_2 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} B(v_1) - B_{0,0}(v_1) \\ \dots\dots\dots\dots \\ B(v_m) - B_{0,0}(v_m) \end{pmatrix} . \qquad (7)$$

Прежде чем перейти к отысканию вектора оценок Δb, найдем, используя правило Саррюса, определитель информационной матрицы Фишера, который согласно (7) равняется

$$\left|A^T A\right| = \sum_{k=1}^{m} B_1^2(v_k) \sum_{k=1}^{m} B_2^2(v_k) - \left[\sum_{k=1}^{m} B_1(v_k) B_2(v_k)\right]^2 . \qquad (8)$$

Из (8), имея в виду (6), можно сделать вывод о том, что определитель матрицы $\left|A^T A\right|$ не равен нулю, следовательно, при решении уравнения (7) можно получить оценки, обладающие конечной дисперсией.

Учтем неточное описание процесса $B(\nu)$ на интервале экспериментальных измерений. Значения проекций вектора C содержат ошибку. Случайный вектор в виде $C+\delta$ имеет реализацию

$$y = C + \delta' . \tag{9}$$

Если ошибки описания рассматриваемого процесса распределены нормально (это предположение не противоречит предельной теореме Ляпунова, поскольку процесс развивается под влиянием множества независимых факторов) с нулевым средним значением, то их плотность вероятности имеет вид

$$\varphi(\delta') = (2\pi)^{-\frac{m}{2}} |\Pi|^{-\frac{1}{2}} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}\delta'^{T} \cdot \Pi^{-1}\delta'\right\} , \tag{10}$$

где Π – матрица коввариаций ошибок описания процесса.

Функция правдоподобия параметров Δb, подлежащих оцениванию, согласно (9), равняется

$$\psi\left(\Delta b/y\right) = (2\pi)^{-\frac{m}{2}} |\Pi|^{-\frac{1}{2}} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(y - A\cdot\Delta b\right)^{T} \cdot \Pi^{-1}\left(y - A\cdot\Delta b\right)\right\}, \tag{11}$$

где $A = A(b_0)$; $y = y\left(\Delta b_{\text{ист.}}, \delta'\right)$.

Для независимых ошибок неравноточного описания процесса $B(\nu)$ матрица ковариаций и обратная ей являются диагональными

$$\Pi = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \sigma_m^2 \end{pmatrix}; \quad \Pi^{-1} = \begin{pmatrix} W_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & W_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & W_m \end{pmatrix}; \quad W_k = \sigma_k^{-2}, \tag{12}$$

где σ_k^2 - дисперсия ошибки *k*-го отсчета $B(\nu)$, равная $\sigma_k^2 = M\left[\delta^2\right]$.

Уравнение правдоподобия получается из (11) после дифференцирования логарифма ψ . Оно имеет вид

$$\left(A^{T}\Pi^{-1}A\right)\cdot\Delta b = A^{T}\Pi^{-1}y \tag{13}$$

Матрица $\left(A^{T}\Pi^{-1}A\right)^{-1}$ согласно (7) и (12) равняется

$$\begin{aligned} \left(A^{T}\Pi^{-1}A\right)^{-1} = &\left[\sum_{k=1}^{m} W_k B_{1k}^2 \sum_{k=1}^{m} W_k B_{2k}^2 - \left(\sum_{k=1}^{m} W_k B_{1k} B_{2k}\right)^2\right]^{-1} \times \\ &\times \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{m} W_k B_{1k}^2 & -\sum\limits_{k=1}^{m} W_k B_{1k} B_{2k} \\ -\sum\limits_{k=1}^{m} W_k B_{1k} B_{2k} & \sum\limits_{k=1}^{m} W_k B_{2k}^2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{14}$$

В соответствии с (3), (4), (6), (12), (14) в результате получаются оптимальные оценки параметров ожидаемых темпов изменения показателя реальной эффективности обслуживания в зависимости от плотности потока заявок, означающих все более усложняющуюся обстановку для осуществления успешного обслуживания в системе.

Оценки параметров, а именно, γ - коэффициента интенсивности противодействия факторов, способствующих и препятствующих увеличению величины вероятности успешного обслуживания, и $\nu_{0,5}$, зависящих от параметров СМО, получим в виде элементов матрицы

$$\begin{pmatrix} \hat{\nu}_{0,5} \\ \hat{\gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\nu_{0,5})_0 + \dfrac{\sum\limits_{l=1}^{m}\left[W_l B_{1l}\sum\limits_{k=1}^{m}W_k B_{2k}^2 - W_l B_{2l}\sum\limits_{k=1}^{m}W_k B_{1k}B_{2k}\right]y_l}{\sum\limits_{k=1}^{m}W_k B_{1k}^2\sum\limits_{k=1}^{m}W_k B_{2k}^2 - \left(\sum\limits_{k=1}^{m}W_k B_{1k}B_{2k}\right)^2} \\ \gamma_0 + \dfrac{\sum\limits_{l=1}^{m}\left[W_l B_{2l}\sum\limits_{k=1}^{m}W_k B_{1k}^2 - W_l B_{1l}\sum\limits_{k=1}^{m}W_k B_{1k}B_{2k}\right]y_l}{\sum\limits_{k=1}^{m}W_k B_{1k}^2\sum\limits_{k=1}^{m}W_k B_{2k}^2 - \left(\sum\limits_{k=1}^{m}W_k B_{1k}B_{2k}\right)^2} \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Дисперсии оценок искомых параметров тренда (2), $\nu_{0,5}$ и γ, в соответствии с (14) имеют вид

$$\sigma_{\hat{\nu}}^2 = \frac{\sum\limits_{k=1}^{m}W_k B_{1k}^2}{\sum\limits_{k=1}^{m}W_k B_{1k}^2\sum\limits_{k=1}^{m}W_k B_{2k}^2 - \left(\sum\limits_{k=1}^{m}W_k B_{1k}B_{2k}\right)^2}; \quad (16)$$

$$\sigma_{\hat{\gamma}}^2 = \frac{\sum\limits_{k=1}^{m}W_k B_{2k}^2}{\sum\limits_{k=1}^{m}W_k B_{1k}^2\sum\limits_{k=1}^{m}W_k B_{2k}^2 - \left(\sum\limits_{k=1}^{m}W_k B_{1k}B_{2k}\right)^2}.$$

Точности оценок параметров тренда (рис.1) растут при увеличении числа дискрет и точности отсчетов $B(\nu_к)$.

Подставляя оценки параметров (15) в выражение (2) для тренда, получаем результирующую функцию вероятности успешного обслуживания, позволяющую прогнозировать ожидаемую закономерность изменения интегрального показателя эффективности обслуживания в зависимости от интенсивности поступающих заявок на целераспределение.

Понятно, что прогнозное значение предельной пропускной способности исследуемой СМО целесообразно определять по величине абсциссы полученной результирующей функции с учетом допустимого снижения уровня вероятности успешного обслуживания, т.е. по значению ординаты (по минимуму) результирующей функции.

Выводы

1. Предлагаемая модель, учитывающая объективное противоборство факторов процесса, способствующих и препятствующих реализации эффекта успешного обслуживания, является более адекватной, чем известные.

2. Статистическая модель является удобной для решения практических задач оценки эффективности обслуживания СМО.

3. Модель позволяет прогнозировать (по ограниченной совокупности экспериментальных данных) эффективность обслуживания в СМО, которую можно достичь при известной интенсивности заявок, а также определять интенсивность потока заявок, которые можно обслужить с заданной вероятностью.

Список використаних джерел

1. Вентцель Е.С. Исследование операций. – М. – Сов. радио. – 1972. – 551 с.
2. Чуев Ю.В. Исследование операций в военном деле. – М. – Воениздат. – 1970. – 256 с.
3. Чуев Ю.В., Спехова Г.П. Технические задачи исследования операций в военном деле. – М. – Сов. радио. – 1971. – 296 с.