УДК 681.5

Д.П. Кучеров, д.т.н.
А.Н. Козуб, к.т.н.

ТЕРМИНАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА В УСЛОВИЯХ ОГРАНИЧЕННЫХ ПОМЕХ

Национальный авиационный университет

Статья посвящена разработке терминального управления динамической системой, представляющей последовательное соединение трех интеграторов и управляющего контроллера при действии ограниченных помех по каналам измерения. Такие системы полезны в задачах управления, имеющих нулевую ошибку при задающем воздействии с постоянным ускорением. Для преодоления проблем управления, связанных со скользящим режимом работы системы, исключения ложных переключений, фиксации координат системы в области достижимости предлагается использование модифицированного закона управления.

Ключевые слова: *терминальное управление, динамическая система, ограниченный шум*

Введение. Разработка алгоритмов и методов терминального управления, позволяющих реализовать перевод объекта из произвольной точки пространства в заданную окрестность конечного состояния за минимальное время, является актуальной задачей в области точного машиностроения.

Анализ исследований и публикаций. Для систем с полностью известной информацией о параметрах системы эта задача известна как задача о максимальном быстродействии. Строгое научное доказательство существования закона управления и формулировка необходимых и достаточных условий существования решения этой задачи широко представлено в работах советского ученого Понтрягина и его последователей, которыми установлено, что управляющее воздействие имеет кусочно-непрерывный (импульсный) характер и знакопеременно. Подход предполагает решение во временной области, что влечет определенные трудности расчета длительности интервалов управлений по математической модели системы в реальном масштабе времени. Инженерный подход к решению задачи максимального быстродействия основан на представлении динамической системы в фазовой плоскости и характере закона, данный подход связывают с именем А.А. Фельдбаума.

Однако, подход А.А. Фельдбаума также не лишен определенных недостатков. Во-первых, данный подход не позволяет получить удовлетворительные решения для динамических систем, порядок которых выше второго. Известное решение синтеза оптимального управления для динамической системы с двумя нулевыми полюсами, называемой двойным интегратором, имеет ограниченное применение. В тоже время реальные системы инерционны, характеризуются запаздываниями, имеют более сложное математическое описание, точные параметры априори неизвестны, фазовые координаты измеряются с помехами, следствием чего является худшая точность работы системы, чем ожидаемая, расчет управляющего воздействия производится с различного рода вычислительными ошибками, в результате этого система может совершать малые колебания в окрестности области цели.

Наиболее предпочтительным среди этих двух подходов построения систем является подход на основе управления в фазовом пространстве, обладающий более высокой точностью по сравнению с теми, которые построены во временной области, что характерно для замкнутых систем. Следствием такого подхода являются скользящие режимы, которые в общем случае являются нежелательными. Существуют различные подходы для устранения скользящих режимов. Так в [1], эта задача решается методами обратных задач динамики, приводя исходную сложную модель к модели второго порядка с дальнейшим упрощением, сводя, в конечном счете, ее к модели с законом управления для двойного интегратора. Реализация такого подхода ведет к построению системы, имеющей недостаточную точность отработки заданий. В работах [2-5], предлагается подход, основанный на комбинированном управлении, где закон управления предполагает две составляющие, каждая из которых используется своем диапазоне ошибок измерения. При этом импульсное управление применяется в диапазоне больших ошибок, а в диапазоне малых ошибок - пропорциональный закон управления. Это позволяет повысить точность работы системы, а также исключить в реализуемой системе значительных временных затрат на управление и малых колебаний в окрестности области цели.

Следует отметить, что для систем со сложной динамикой модель двойного интегратора не является пригодной, ввиду наличия ошибок в системах с возможными ускорениями. В задачах, где требуется обеспечить нулевую ошибку при постоянном ускорении для определения закона управления целесообразно использовать модель тройного интегратора. Описание модели тройного интегратора впервые, по нашим данным, было представлено в работе [6], некоторые вопросы управления изучались [2, 3, 7].

Закон управления тройным интегратором с единичным коэффициентом усиления был представлен А.А. Фельдбаумом без каких-либо подтверждений, а с произвольным коэффициентом усиления в работах американских ученых [2, 3]. В этих работах предполагается, что поверхность переключения имеет вид пласта некоторой толщины, в котором закон управления становится пропорционального вида. Некоторые вопросы управления моделью тройного интегратора представлены в [7].

Цель работы. В статье предлагается обобщение работ [2, 3, 7] и новые результаты решения данной задачи для случая, когда коэффициенты тройного интегратора различны в отличие от [2, 3], где интегратор имеет только один коэффициент усиления, область цели имеет вид эллипса, а также исследуются вопросы наиболее существенного влияния помех - по каналам измерения фазовых координат в отличие от [3], где исследован случай наличия возмущений в канале управления.

Постановка задачи. Рассматривается динамическая система, характеризующаяся нулевой ошибкой при постоянном ускорении [6]. Структурно эта система представляет последовательное соединение трех интеграторов и управляющего контролера. Будем полагать, что на вход такой системы поступает задание $r(t)$ в виде квадратичной функции

$$r(t) = at^2 + bt + c\,, \tag{1}$$

где a>0, b, c≥0 известные параметры входной величины. Основной задачей контроллера считается отработка динамической системой траектории (1) при наличии шумов, действующим по каналам измерений. Считается, что динамическая система в состоянии покоя (t=0) не находится на заданной траектории движения. Поэтому дополнительной задачей контроллера является обеспечение выхода динамической системы на заданную траекторию и нахождение на ней в пределах цикла управления. Следовательно, контроллер должен задавать закон управления $u(t)$ динамической системой не только с учетом знания выходной величины и шумов в каналах измерения, а также ее производных и производных сигнала $r(t)$. Эта задача может быть реализована в системе, схема которой представлена на рис. 1.

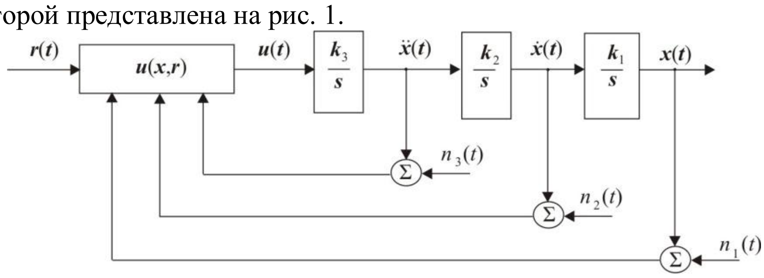

Рис. 1. Структура системы с тройным интегратором и шумами в каналах измерения

Обозначения r (t) и u(t) рис.1 представляют входной и выходной сигналы контроллера соответственно, x (t) – выходную величину системы, а $\dot{x}(t)$ и $\ddot{x}(t)$ - являются первой и второй производными выходной величины.

Измерение фазовых координат системы x_i производится на фоне ограниченных шумов

$$x_i'(t) = x_i(t) + n_i(t)\,, \tag{2}$$

где $n_i(t)$ – шумы в каналах измерения, $|n_i(t)| \le N_{imax}$.

В этом случае систему, представленную на рис.1, можно представить следующей системой уравнений

$$\begin{aligned} \dot{e}_1(t) &= k_1 e_2(t), \\ \dot{e}_2(t) &= k_2 e_3(t), \\ \dot{e}_3(t) &= k_3 u(t), \end{aligned} \tag{3}$$

в которой e_1, e_2, e_3 – отклонения выходной величины, ее первой и второй производных от задания соответственно, т.е.

$$e_1 = r(t) - x'(t)\,, \qquad e_2 = \dot{r}(t) - \dot{x}'(t)\,, \quad e_3 = \ddot{r}(t) - \ddot{x}'(t)\,; \quad u(t) = \dddot{r}(t) - \dddot{x}'(t)\,. \tag{4}$$

В системе (3) считаются определенными начальное состояние $e(t_0)$=e_0 в момент времени t_0=0, определяемое координатами $e(0) = (e_{10}, e_{20}, e_{30})$, и конечное $e(t_к)$=$e_к$ в момент t=$t_к$, где $e_K \in \Omega$, а Ω - область достижимости, а $t_к$ – известно только лишь приблизительно.

Для обеспечения времени выхода t_{min} динамической системы (3), (4) на заданную траекторию (1), т.е. $\Delta t=(t_к-t_0)=\min$ и $e_K \in \Omega$ будем рассматривать (3), (4) как терминальную динамическую систему с минимальным временем перехода в конечное состояние в условиях ограниченных помех.

В статье ставится и решается задача синтеза закона управления динамической системой (3), (4), представляющей последовательность трех интеграторов с коэффициентами передачи k_i, по информации об отклонениях измерения фазовых координат системы (3), (4) в условиях ограниченных помех.

Управление с полностью известными параметрами. Для обеспечения минимальности времени управления в случае известных параметров системы задачу управления следует рассматривать как оптимальную по быстродействию. Закон оптимального управления системой (3), (4), обеспечивающий заданную динамику системы без помех, выбирается в форме

$$u(e)=\begin{cases}\operatorname{sign}\ (f_1(e)), & \text{если}\ f_1(e)\neq 0,\\ \operatorname{sign}\ (f_2), & \text{если}\ f_1(e)=0,\quad f_2\neq 0,\\ \operatorname{sign}\ (f_3), & \text{если}\ f_1(e)=0,\quad f_2=0,\end{cases} \tag{5}$$

где

$$f_1(e)=-e_1-c_1e^3-c_2f_2e_2e_3-c_3f_2m^{3/2}, \tag{6}$$

$$f_2=-sign(e_2+sign(e_3)e_3^2), \tag{7}$$

$$m=(0.5e_3^2-c_4f_2e_2), \tag{8}$$

$$f_3=e_3, \tag{9}$$

а коэффициенты c_1, c_2, c_3, c_4

$$c_1=k_1/k_3,\ c_2=k_1k_2\big/(3k_3^2),\ c_3=k_1/k_3=c_1,\ c_4=k_3/k_2=c_1/c_2. \tag{10}$$

Функция $f_1(e)$ в пространстве $e\in\Re^3$ разделяет пространство управлений $u(e)$ на два возможных подпространства u_+ и u_-, т.е. $u(e)=u_+\cup u_-$ и является гиперповерхностью (рис. 2).

Закон управления (5) задает движение объекта из состояния e_0 в состояние $e_к=0$. Движение фазовой точки происходит по некоторой кусочно-гладкой траектории, которая ведет объект из произвольной начальной точки заданного фазового пространства в начало координат. Минимальность во времени достигается чередованием знака управляющего воздействия в моменты пересечения гиперповерхности $f_1(e)$ и f_3. Максимальное число интервалов управления для решения поставленной задачи не превосходит трех, что полностью согласуется с теоремой об n-интервалах А.А.Фельдбаума.

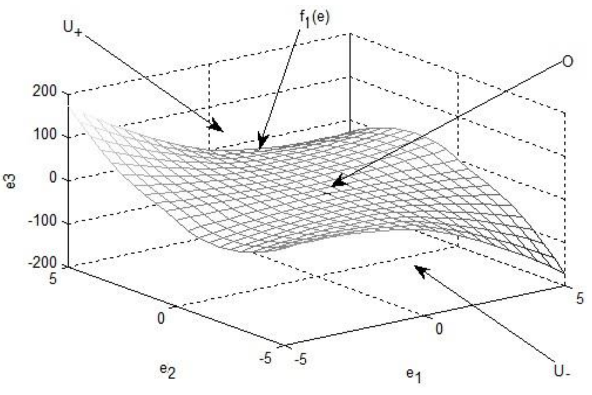

Рис. 2. Функция $f_1(e)$

Уравнения (5)-(8) полностью совпадают с уравнениями (33)-(35) из [6] в случае, если принять коэффициенты $k_1=k_2=1$, а $k_3=K$.

Управление в условиях помех. Применяя численное решение задачи с использованием ПЭВМ, возникает необходимость учета ошибок квантования и округления, которые неминуемы в расчетах на вычислительных средствах с конечной разрядной сеткой. Результатом конечности разрядной сетки приводит к эффекту зацикливания в окрестности начала координат. Исключение их влияния приводит к необходимости введения в окрестности начала координат некоторой области $\Omega_ц$, где действие управления прекращается. Эту окрестность имеет смысл назвать областью достижимости. Так, в [6] также предлагается введение области $\Omega_ц$ в виде пласта, получаемого смещением поверхности $f_1(e)$ по координате e_1 на величину ε относительно начала координат как в положительную, так и отрицательную стороны, а в [7] область Ω имеет смысл представить в виде эллипсоиде

$$e^TPe=\kappa, \tag{11}$$

где P – положительно-определенная матрица, а $\kappa>0$ – число, графический вид которого представлен на рис. 3.

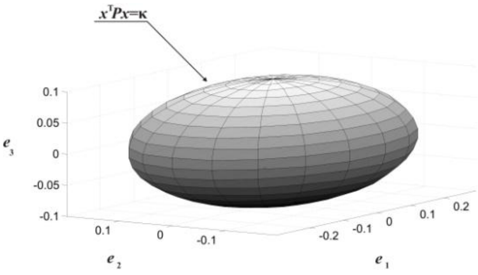

Рис.3. Эллипсоидальная область Ω

В случае, когда движение динамической системы происходит в условиях воздействия помех, динамика объекта управления может существенно изменяться так, что будут происходить ложные смены знака управляющего воздействия контроллером, зацикливание системы управления и преждевременный износ исполнительной части системы. Исследования показали, наибольшее воздействие на динамику объекта оказывают помехи n_i, где i=1….3 номер канала, возникающие в каналах измерения фазовых координат.

Наибольший интерес у современных исследователей вызывают помехи, статистическая природа которых априори неизвестна, что имеет место в случаях, когда у исследователя недостаточно времени для изучения ее статистических свойств или же это помеха «играющего» типа. К известной информации следует относить только уровень N, которым эта помеха ограничена. Блокировать действие помехи возможно только лишь в том случае, когда фазовые координаты объекта гарантированно находятся в области определенного знака сигнала управления. Это достигается целенаправленным сдвигом измеренных координат фазовой точки в глубину области действующего в данный момент знака (в сторону от $f_1(e)$) на величину уровня помехи N. При этом сама фазовая точка динамического объекта сдвигается на величину $N\sqrt{3}$ относительно своего текущего положения. Переключение в этом случае происходит при гарантированном нахождении фазовых координат в области действия другого знака управления. С учетом этого замечания закон управления может быть переписан в виде, в котором значения $e(t)$ фазовых координат в (6) заменяются на их сдвинутые величины

$$e'_i = e_i - N\,. \tag{12}$$

Сдвиги фазовых координат (12) приведут в свою очередь к расширению области Ω, форма области достижимости та же

$$e^T P' e = \kappa' \tag{13}$$

где к′>к.

Однако, необходимо отметить еще одно условие успешного решения задачи. Таким условием является необходимость фиксации фазовых координат в эллипсоиде, т.е. если $e = \{e_1,\ e_2,\ e_3\} \in \Omega_ц$, где $\Omega_ц$ – область достижимости, то значит, цель управления достигнута. Это связано с тем, чтобы исключить возможность ложных принятий решений о достижении области достижимости, когда измеряемый вектор e находится внутри, а реальный вне эллипсоида. Таким образом, при разработке алгоритма управления следует еще учесть и фиксацию измеряемых координат в окрестности области цели.

Модифицированный закон управления. Необходимость одновременного удовлетворения показателей системы управления как по времени управления, так и по точности говорит о целесообразности применения комбинированного закона управления, в котором терминальное управление функционирует при больших отклонениях, т.е. когда начальное значение фазовой траектории находится вне области Ω и возникает необходимость приведения фазовой точки системы в эту область и обеспечения дальнейшего попадания в область достижимости Ω путем использования пропорционального закона управления, а именно

$$u_{\text{пр}}(e) = Ae, \tag{14}$$

где A – вектор коэффициентов.

Если же представить закон управления (5) в области значительных ошибок как $u_{тер}$, а в области малых (14) как $u_{пр}(e)$, тогда модифицированный закон управления можно записать в виде

$$u(e) = \begin{cases} u_{\text{тер}}, & \text{если } e \notin \Omega, \\ u_{\text{пр}}, & \text{если } e \in \Omega \text{ и } e \notin \Omega_ц. \end{cases} \tag{15}$$

В (15) Ω - область переключения, $\Omega_ц$ - область достижимости.

Отличительной особенностью функционирования алгоритма (15) является принципиальное отличие алгоритма фиксации попадания объекта в области достижимости (рис. 4). В отличие от предыдущего случая, при котором возникала необходимость только контроля наличия координат, в условиях помех ситуация может быть еще хуже, когда измеренные координаты фазовой точки фиксируются внутри области достижимости $\Omega_ц$, а реальные координаты объекта находятся вне ее. В этом случае необходимым будет являться фиксация участка траектории по нескольким измерениям, т.е. так

$$(e^{i-2},\ e^{i-1},\ e^{i},...)\in\Omega_{ц}. \quad (16)$$

Число таких измерений зависит от длины пути, соизмеримого с уровнем помехи и искажающем соответствующие координаты.

Моделирование. Для оценки эффективности закона управления (15) проводилось моделирование динамики объекта управления (3) для задающего воздействия (1) в различных начальных условиях вектора e_0. Параметры k_i объекта выбирались из интервала $0{,}1\le k_i\le 10$ таким образом, чтобы общий коэффициент передачи $K=k_1k_2k_3$ был бы отличен от 1. В демонстрационном примере параметры объекта управления принимались равными

$$k_1=0{,}5,\ \ k_2=2,\ \ k_3=1{,}5.$$

Отработке подвергалось задающее воздействие с параметрами a=0,1, b=0,5, c=1. Измерение фазовых координат происходит с шумами, уровень ограничения которых в каждом канале $|N_i|\le 0{,}5$. Результаты моделирования выходных координат динамической системы (2) представлены на рис.4.

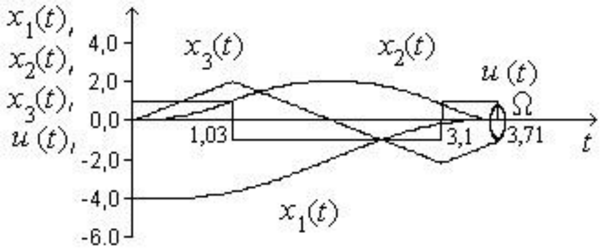

Рис. 4. Фазовые траектории динамической системы (2) при модифицированном управлении

Сравнение результатов моделирования для ряда испытаний позволяет сделать вывод о достоверности полученных результатов.

Проведенные исследования динамики динамической системы в виде тройного интегратора и контроллером в цепи управления с рассматриваемой областью достижимости, показали удовлетворительные результаты. Ошибка системы во всех случаях испытаний не превышала вычислительную точность системы.

Выводы. В статье предложено решение задачи синтеза закона управления динамической системой, движение которой происходит с постоянным ускорением и при наличии ограниченных по уровню помех, действующих на систему по каналам измерения. Модель динамической системы может быть представлена последовательностью трех интеграторов с контроллером, формирующим закон управления в виде (6). В работе показано, что одновременного достижения высоких показателей точности и времени отработки задания возможно при модификации закона управления, включающей замечание (12) и комбинацию (14). Результаты моделирования подтверждают правильность выдвинутых утверждений. Дальнейшие результаты исследований предполагается направить на изучение свойств динамической системы и определения закона управления в условиях, когда уровень ограничения помехи N априори неизвестен.

Список литературных источников

1. Крутько П.Д. Алгоритмы терминального управления линейными динамическими системами / П.Д. Крутько // Известия РАН. Теория и системы управления. – 1998. – №6. – С.33-45.
2. Kaylon M. Design of continuous time controllers having almost minimum time response // Transactions of the ASME. – Vol. 124. – June. – 2002. – P. 252-260.
3. Pao L.Y. Proximate time-optimal control of third-order servomechanisms / Pao L.Y., Franklin G.F. // IEEE Transactions on Automatic Control. – vol.38. - № 4. – 1993. – P. 560-580.
4. Kucherov D.P. Synthesis of adaptive controller for fixed-time control of a spinning body under the presence of bounded noise / D.P. Kucherov // Journal of automation and information science. – Vol. 37. - 2005. – P. 29-38.
5. Kucherov D.P. The synthesis of adaptive terminal control algorithm for inertial secondary order system with bounded noises / D.P. Kucherov // Journal of automation and information science. – Vol. 39 – 2007. – P. 16 – 25.
6. Smith O. J. M. Feedback control systems / O.J.M. Smith. – New York: McGrowHill, 1958. – 694 p.
7. Козлов А.И. Полный анализ задачи тройного интегратора / А.И. Козлов, Д.Ю. Муромцев // Автоматика и телемеханика. – 2005. – №1. – С. 3-12.