УДК 532.5, 621.6

Н.К. Зеленська,
К.Х. Зеленський

АПРОКСИМАЦІЯ ЦИЛІНДРИЧНИХ ФУНКЦІЙ ДРОБОВО-РАЦІОНАЛЬНИМИ ФУНКЦІЯМИ

Розглядається задача еквівалентного спрощення виразів, що отримують при розв'язанні системи квазілінійних рівнянь Нав'є—Стокса. Запропоновано алгоритм спрощення, що ґрунтується на використанні теорії ланцюгових дробів.

Ключові слова: інтегральні перетворення, ітераційна схема, конвективно-дифузійний перенос, ланцюгові дроби, рівняння Нав'є—Стокса, функції Бесселя.

Вступ.

Під час дослідження конвективно-дифузійних процесів, наприклад, у циклонних апаратах циліндричної форми [1], необхідно розв'язувати крайові задачі, що описуються системами нелінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних, які описують рух закручених потоків повітря із вмістом твердих домішків в осесиметричних каналах із відповідними початковими та межовими умовами на внутрішній та зовнішній стінках каналу. У цій системі рівнянь наявні так звані рівняння Нав'є—Стокса, що описують конвективно-дифузійний рух субстанції, а також рівняння, що описують поля температури, тиску і концентрації твердих домішків.

Традиційний підхід до розв'язання такого роду систем рівнянь полягає у використанні різницевих схем [2]. При цьому, по-перше, вважають конвективні складові сталими, зводячи, таким чином, квазілінійні рівняння Нав'є—Стокса до лінійних, що суттєво спотворює фактичний розв'язок, по-друге, застосування різницевих схем до розв'язання нелінійних рівнянь, що призводить до необхідності розв'язання знову ж таки багатовимірних систем нелінійних функціональних рівнянь навіть в одновимірному випадку, наприклад, відносно радіальної складової, дає задовільні результати лише у окремих випадках, оскільки для досягнення задовільного результату треба розв'язувати громіздкі системи нелінійних алгебраїчних рівнянь.

Постановка задачі.

Розглянемо таке рівняння у частинних похідних (одне із рівнянь системи, що описує динаміку потоку у циліндричних каналах).

$$\frac{\partial u_r}{\partial t}+u_r\left(\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{1}{r}u_r\right)+u_\varphi\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi}+u_z\frac{\partial u_r}{\partial z}=$$

$$=\frac{\mu_{\mathrm{ef}}}{\rho}\left[\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_r}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2}\right]+\frac{1}{\rho}S_{u_r}; \tag{1}$$

$$S_{u_r}=\frac{\rho u_\varphi^2}{r}-\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\mu_{\mathrm{ef}}\frac{\partial u_r^2}{\partial r}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\mu_{\mathrm{ef}}\frac{r\partial(u_\varphi/r)}{\partial r}\right)-2\frac{\mu_{\mathrm{ef}}}{r^2}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu_{\mathrm{ef}}\frac{\partial u_z}{\partial r}\right); \tag{2}$$

В [4] запропоновано числово-аналітичний ітераційний метод розв'язання нелінійних рівнянь у частинних похідних, що вільний від вказаних недоліків і дає розв'язання у вигляді ряду за власними функціями (для рівняння (1) із урахуванням турбулентної складової (2)). Суть ітераційної процедури полягає у відшуканні розв'язання спочатку лінійної складової рівняння за допомогою інтегральних перетворень за просторовими змінними і часом із подальшим використанням цього розв'язку для пошуку розв'язання нелінійної складової рівняння.

При цьому виникає проблема обчислення інтегральних перетворень від добутку двох і більше власних функцій, зокрема, в обчисленні інтегралів від добутку циліндричних функцій (функцій Бесселя першого та другого роду та їхніх комбінацій).

$$u^{(1)}(r,\varphi,\zeta,t)=\sum_{m_u,l_u}V_u(\beta_u,r)\Phi_u(\varphi)Z_u(\alpha^u_{m_u},\zeta)\times$$

$$\times\left[U1^0_{m_u,l_u}+e^{\sigma^u_{m_u,l_u}t}[U1^1_{m_u,l_u}\varphi1^u_{m_u,l_u}(t)+U2^2_{m_u,l_u}\varphi2^u_{m_u,l_u}(t)\right]. \tag{3}$$

Під час отримання цього виразу обчислювалися такі інтеграли:

$$b_{i,j,k}=\int_{r_0}^{R}V_i(\beta,r)V_j(\beta,r)V_k(\beta,r)rdr. \tag{4}$$

Функції $V_i(\beta,r)=Y_i(\beta,R)J_i(\beta,r)+J_i(\beta,R)Y_i(\beta,r)$ – власні функції крайової задачі по змінній r, $J_i(\beta,r)$, $Y_i(\beta,r)$ – функції Бесселя першого і другого роду відповідно.

Обчислення значень інтегралів від добутку функцій Бесселя першого і другого роду, не кажучи вже про обчислення інтегралів типу (4), крім інтегралів від квадратів цих функцій для власних значень β, що збігаються, відсутні, оскільки пряме обчислення таких інтегралів через ряди, якими подаються ці функції, не дає результату із-за занадто великих похибок при усікненні цих рядів скінченнними послідовностями.

Мета даної роботи полягає у розробці алгоритмів обчислення інтегралів вказаного виду через представлення їх у вигляді скінченної суми дробово-раціональних виразів другого порядку. Апаратом, що використовується для подання рядів у вигляді дробово-раціональних виразів, слугують ланцюгові дроби [3].

Вирішення задачі.

Скінченний ланцюговий дріб записується у вигляді

$$b_0+a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n. \tag{5}$$

Будь-який дріб вигляду (5), що отриманий як результат скінченної кількості раціональних дій над його елементами, є раціональна функція цих елементів і може бути подана як

$$\frac{P_n(a_1,a_2,\ldots,a_n;b_0,b_1,\ldots,b_n)}{Q_n(a_1,a_2,\ldots,a_n;b_0,b_1,\ldots,b_n)},$$

який називають n-м підходящим дробом ланцюгового дробу. Чисельник і знаменник підходящого дробу визначається рекурентним співвідношенням

$$P_n = b_n P_{n-1} + a_n P_{n-2};$$
$$Q_n = b_n Q_{n-1} + a_n Q_{n-2};\ n = 1,2,\ldots$$

Різниця між сусідніми підходящими дробами

$$\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = \prod_{i=1}^{n} a_i \frac{(-1)^{n+1}}{(Q_{n-1}Q_n)},\ n = 1,2,\ldots \tag{6}$$

Розглянемо розкладання дробово-раціональної функції (ряду) у ланцюговий дроб.

$$f(x) = \frac{\alpha_{10} + \alpha_{11}x + \alpha_{12}x^2 + \ldots}{\alpha_{00} + \alpha_{01}x + \alpha_{02}x^2 + \ldots} = \frac{\alpha_{10}}{\alpha_{00}} + \frac{\alpha_{20}x}{\alpha_{10}} + \frac{\alpha_{30}x}{\alpha_{20}} + \ldots,$$
$$\alpha_{ik} = \alpha_{i-1,0}\alpha_{i-2,k+1} - \alpha_{i-2,0}\alpha_{i-1,k+1};\ i = \overline{1,2n};\ k = \overline{1,n} \tag{7}$$

за умови $\alpha_{k,0} \neq 0;\ \alpha_{0,0} = 1$.

Розглянемо замість дроба (5) відповідний йому підходящий дроб

$$f_1(x) = \frac{P_n(x)}{Q_n(x)}. \tag{8}$$

Підходящий дроб (8) апроксимує ланцюговий дроб (5) із похибкою

$$|f(x) - f_1(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{5Q_n(x)}}.$$

Функцію $f_1(x)$ запишемо у такій формі

$$f_1(x) = \frac{\sum_{i=0}^{s} d_i x^i}{\sum_{j=0}^{r} c_j x^j},\ s < r,\ c_0 = 1. \tag{9}$$

Алгоритм реалізації. Мета реалізації алгоритму апроксимації функцій раціональними виразами полягає у обчисленні коефіцієнтів d_i, c_j; $i = \overline{0,s}$; $j = \overline{0,r}$ за допомогою таких формул [3]:

Обчислення коефіцієнтів ланцюгових дробів

$$\alpha_{ik} = \alpha_{i-1,0}\alpha_{i-2,k+1} - \alpha_{i-2,0}\alpha_{i-1,k+1}.$$
$$\alpha_{k,0} \neq 0;\quad \alpha_{0.0} = 1;\ i = \overline{1,n};\ k = \overline{1,n}.$$
$$e_1 = \alpha_{1,0}\alpha_{0,0};\ e_{i+1} = \alpha_{i+1,0}\alpha_{i-1,0}\alpha_{i,0};\ i = \overline{1,n-1}.$$

Обчислення коефіцієнтів дробово-раціонального виразу, що апроксимує:

$$\begin{aligned}
&d_0 &&= b_0;\ c_0 = a_0 = 1;\\
&b_{2,2} &&= 0;\ b_{3,2} = d_{2,1}e_0;\ b_{i,1} = e_1;\ a_{i,1} = 1;\ i = \overline{1,n};\\
&a_{2,2} &&= e_1;\ a_{3,2} = e_1 + e_3;\\
&b_{k,i} &&= e_k b_{k-2,i-1} + b_{k-1,1};\ k = \overline{3,m};\ i = \overline{2,[k/2]};\\
&a_{k,i} &&= e_k a_{k-2,i-1} + a_{k-1,1};\ k = \overline{3,m-1};\ i = \overline{2,[k/2+1]};\\
&d_i &&= b_{m,i};\ c_i = a_{m,i};\ i = \overline{1,n-1}.
\end{aligned}$$

За допомогою запропонованого алгоритму можна із достатньою точністю апроксимувати дробово-раціональні функції високого порядку до дробово-раціональних функцій другого-третього порядків. Наприклад,

$$\sum_{k=0}^{6} \frac{b_{2k}p + b_{2k+1}}{p^2 + a_{2k+1}p + a_{2k+2}} = \frac{d_2 p + d_1}{p^2 + c_1 p + c_0}.$$

Апроксимуємо дробово-раціональним виразом циліндричну функцію, наприклад, функцію Бесселя першого роду. Функції Бесселя записуються у вигляді

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x/2^{n+2k}}{k!\Gamma(n+k+1)}. \tag{10}$$

Поставимо задачу добитися точності апроксимації $\varepsilon = 0,00001$. Представимо (11) у вигляді скінченного ланцюгового дробу

$$J_n(x) = 1 + \frac{c_1^{(n)}}{1} + \frac{c_2^{(n)}}{1} + \ldots + \frac{c_m^{(n)}}{1}. \tag{11}$$

$$J_n(x) \approx \sum_{k=0}^{5} \frac{b_{6k+3} + b_{6k+4}(x/2)}{b_{6k} + b_{6k+1}(x/2) + b_{6k+2}(x/2)^2}. \tag{12}$$

Для $J_0(x)$ отримаємо ($z = (x/2)^2$):

$$\overline{J}_0(z = (x/2)^2) = \frac{1 - 3.2556z + 2.2378z^2 - 0.54686z^3 + 0.054185z^4 - 0.0018907z^5}{1 + 0.24435z + 0.0305z^2 + 0.00254z^3 + 10^{-5}(15.23z^4 + 0.642z^5 + 0.0154z^6)}.$$

(13)

Перетворимо цей вираз у суму ланцюгів другого порядку, обчисливши корені знаменника

Маємо

$$J_0(z) \approx \overline{J}_0(z) = \frac{679310 + 65794z}{179.26 + 16.793z + z^2} + \frac{-506130 - 79342z}{164.03 + 24.529z + z^2} + \frac{-154720 + 1310z}{220.11 + 0.24981z + z^2}.$$

Оцінка похибки наближення:

$J_0(7) = 0.30010; \overline{J}_0(7) = 0.30010$.

Апроксимація функції $J_1(x)$ за аналогічним алгоритмом дає:

$$J_1(z) \approx \frac{106790 + 16219z}{96.498 + 12.66z + z^2} + \frac{-78570 - 18245z}{88.504 + 18.057z + z^2} + \frac{-25687 - 296.6z}{117.88 + 1.0346z + z^2}.$$

За аналогічним алгоритмом можна апроксимувати дробово-раціональними виразами й функції Бесселя другого роду (функції Ханкеля):

$$Y_n(x) = \frac{2}{\pi}\left(C + \ln(x/2)\right)J_n(x) - \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n} -$$

$$-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}+1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+k}\right).$$

Оскільки у цьому виразі наявна функція $\ln(x/2)$, необхідно його також апроксимувати дробово-раціональною функцією

$$\ln(x/2) \approx \frac{\sum_{k=0}^{m} c_{m+k}(x/2)^k}{\sum_{k=0}^{m} c_k(x/2)^k},\ m=5;\ m=6.$$

Для функцій Бесселя другого роду отримано вираз

$$Y_n(x) \approx \sum_{k=0}^{5}\frac{b_{6k+3} + b_{6k+4}(x/2)}{b_{6k} + b_{6k+1}(x/2) + b_{6k+2}(x/2)^2}. \quad (14)$$

Із урахуванням виразів (13) та (14) функцію $V_i(\beta,r) = Y_i(\beta,R)J_i(\beta,r) + J_i(\beta,R)Y_i(\beta,r)$ апроксимуємо таким виразом:

$$V_n(x) \approx \sum_{k=0}^{5}\frac{v_{6k+3}^{n,j} + v_{6k+4}^{n,j}(x/2)}{v_{6k}^{n,j} + v_{6k+1}^{n,j}(x/2) + v_{6k+2}^{n,j}(x/2)^2}. \quad (15)$$

Коефіцієнти v_k залежать від конкретних значень характеристичних чисел β_{ij} рівняння $V_i(\beta,R) = Y_i(\beta,R)J_i(\beta,R) + J_i(\beta,R)Y_i(\beta,R) = 0$.

Тепер обчислення інтегралів вигляду (4) зводиться до обчислення інтегралів від дробово-раціональних функцій вигляду

$$f(x) = \frac{c_3 + c_4 x}{c_0 + c_1 x + c_2 x^2},$$

наприклад,

$$b_{1,2,3}^{1,2,3} = \int_{r_0}^{R} V_1(\beta_1,r)V_2(\beta_2,r)V_3(\beta_3,r)rdr = \int_{r_0}^{R}\sum_{k=0}^{15}\frac{q_{6k+3} + q_{6k+4}r}{q_{6k} + q_{6k+1}r + q_{6k+2}r^2}rdr. \quad (16)$$

Ці інтеграли є табличні і квадратури легко обчислюються. Реалізація перелічених алгоритмів виконана на ПК алгоритмічною мовою С.

Інша група алгоритмів пов’язана із обчисленням інтегральних перетворень за змінною φ і z – аксіальної складової. Зазначимо, що вказані алгоритми обчислення інтегральних перетворень реалізуються один раз – перед реалізацією першої ітерації; для решти ітерацій використовуються значення інтегралів, що обчислено перед першою ітерацією.

Висновки

Розглянуто проблему обчислення інтегралів від добутків кількох циліндричних функцій (функцій Бесселя першого та другого роду). Запропоновано алгоритми апроксимації циліндричних функцій дробово-раціональними виразами, що зводить обчислення інтегралів такого роду до обчислення інтегралів від дробово-раціональних функцій другого степеня, тобто до обчислення табличних інтегралів.

Запропоновано відповідні алгоритми апроксимації.

Бібліографія

1. Зеленський К.Х. Комп'ютерне моделювання динаміки повітряних потоків у циклонних камерах//К.Х. Зеленський, В.М. Ігнатенко., К.С. Бовсуновська./Адаптивні системи автоматичного управління. Міжвідомчий науково-технічний збірник.—Київ: Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут».—2012.—Вип. 21(41). С.132—145.
2. Зеленський К.Х. Комп'ютерні методи прикладної математики// К.Х. Зеленський, В.М. Ігнатенко, О.П. Коц.—К.: Наукова думка, 2002. – 480 с.
3. Зеленський К.Х Ітераційний м етод розв'язання нелінійних крайових задач /К.Х. Зеленський. Наукові нотатки. Міжвузовський збірник. Вип. 26.—Луцьк, ЛНТУ, 2009.—С.92—105.