УДК 62.505 DOI: 10.30929/1995-0519.2019.6.152-160

ПРОЕКЦИОННЫЕ МЕТОДЫ ОПИСАНИЯ СТРУКТУРЫ ОПЕРАТОРА ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

А. О. Дымова

Херсонский государственный аграрный университет

ул. Сретенская, 23, г. Херсон, 73000, Украина. E-mail: anndymova@gmail.com

Рассмотрены вопросы повышения эффективности систем управления сложными технологическими объектами за счет обработки экспериментальных данных выходного сигнала для идентификации и прогнозирования поведения объекта управления. Выдвинуты требования к модели структуры оператора динамических систем. Рассмотрены основные свойства линейных операторов и введено понятие системы с пространством состояний. Разработан метод нахождения модели динамической системы, которая задается только выходным сигналом, и определения характеристик динамической системы в отличие от известных процессов, описанных задачами идентификации, управления и измерения. Разработан алгоритм нахождения структуры оператора динамического объекта по его выходным сигналам на основе структурных свойств линейных операторов и упорядочения множества выходных сигналов, представлением их в виде ганкелевых форм и ганкелевых матриц. Приведен метод моделирования оператора динамической системы на основе исследования обратных задач.

Ключевые слова: динамическая система, оператор, обратная задача, линейное пространство, ганкелевы матрицы, разложимость, ранг.

ПРОЕКЦІЙНІ МЕТОДИ ОПИСУ СТРУКТУРИ ОПЕРАТОРА ЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

Г. О. Димова

Херсонський державний аграрний університет

вул. Стрітенська, 23, м. Херсон, 73000, Україна. E-mail: anndymova@gmail.com

Розвиток технологій визначення наявності корисного сигналу дозволяє значно підвищити ефективність систем управління складними технологічними об’єктами. Обробку експериментальних даних вихідного сигналу проводять для ідентифікації і прогнозування поведінки об’єкта. Виходячи з цього важливим питанням являється розробка методів рішення обернених задач для безперервних технологічних процесів, тобто визначення структури оператора динамічних систем. Основною метою дослідження є ідентифікація процесів для визначення структури динамічного об’єкта за вихідним сигналом, знаходження структури оператора динамічного об’єкта на основі структурних властивостей лінійних операторів та упорядкування експериментальних даних за допомогою ганкелевих квадратичних форм и ганкелевих матриць, що дозволяє розв’язувати обернені задачі динаміки. Розглянуто питання підвищення ефективності систем управління складними технологічними об’єктами за рахунок обробки експериментальних даних вихідного сигналу для ідентифікації і прогнозування поведінки об’єкта управління. Висунуто вимоги до моделі структури оператора динамічних систем. Розглянуто основні властивості лінійних операторів та введено поняття системи з простором станів. Розроблений метод знаходження моделі динамічної системи, яка задається тільки вихідним сигналом, і визначення характеристик динамічної системи на відміну від відомих процесів, що розглянуті в багатьох роботах та представляються трьома задачами: задача ідентифікації, коли на підставі відомих сигналів на вході і виході системи робиться висновок про склад системи і її характеристиках; задача управління, коли відомі характеристики системи і вхідного сигналу та визначається закон зміни сигналу на виході системи або такий вхідний сигнал, який на виході призводить систему в заданий стан; задача вимірювання, коли відомий вихідний сигнал і характеристики системи, визначаються характеристики вхідного сигналу. Розроблений алгоритм знаходження структури оператора динамічного об’єкта за його вихідними сигналами на основі структурних властивостей лінійних операторів та упорядкування множини вихідних сигналів, представленням їх у виді ганкелевих форм та ганкелевих матриць. Приведений метод моделювання оператора динамічної системи на основі дослідження обернених задач. Послідовність побудови моделі оператора лінійної динамічної системи як рішення оберненої задачі динаміки дозволяє розробляти обчислювальні алгоритми для реальних динамічних систем в лінійному приближенні.

Ключові слова: динамічна система, оператор, обернена задача, лінійний простір, ганкелеві матриці, розкладеність, ранг.

АКТУАЛЬНОСТЬ РАБОТЫ. Управляемость – одно из важнейших свойств системы управления и объекта управления, характеризующий возможность приведения системы в заданное состояние с помощью управляющих воздействий. Система считается управляемой, если существует управления, обеспечивает ее перевод из произвольного начального состояния в произвольное состояние за конечное время [1]. Если управляемость требует, чтобы каждое состояние системы был чувствительным к действию входного сигнала, то наблюдаемость требует, чтобы каждое состояние системы влиял на измеряемый выходной сигнал. Система наблюдаемая, если все ее состояние можно прямо или косвенно определить по выходному вектору системы.

Развитие технологий определения наличия полезного сигнала позволяют значительно повысить эффективность систем управления сложными технологическими объектами. Процесс приема информации заключается в отождествлении сигнала с символами принятого алфавита, что довольно сложно в случае, если сигналы подвергаются большим искажением. Методы преодоления этих трудностей составляют суть теории сигналов, которую представляют тремя задачами: задача идентификации, когда на основании известных сигналов на входе и выходе системы делается вывод о составе системы и ее характеристиках; задача управления, когда известны характеристики системы и входного сигнала и определяется закон изменения сигнала на выходе системы или такой входной сигнал, который на выходе приводит систему в заданное состояние; задача измерения, когда известный выходной сигнал и характеристики системы, определяются характеристики входного сигнала.

Основной целью исследования является идентификация процессов для определения структуры динамического объекта по выходному сигналу, нахождение структуры оператора динамического объекта на основе структурных свойств линейных операторов и упорядочения экспериментальных данных с помощью ганкелевых квадратичных форм и ганкелевых матриц, позволяющий решать обратные задачи динамики.

МАТЕРИАЛ И РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ. Модель описания структуры оператора динамических систем должна удовлетворять следующим требованиям:

- быть простой;
- содержать мало произвольных или уточняющих элементов;
- согласовываться со всеми существующими наблюдениями и объяснять их в рамках теории линейных динамических систем;
- давать подробное предсказание результатов будущих наблюдений, которые могут опровергнуть эту модель или доказать ее ложность, если предсказания, сделанные по этой модели, не подтверждаются.

Рассмотрим основные свойства линейных операторов [1]. Две матрицы **A** и **B**, связанные соотношением $\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$, где **T** – некоторая неособенная матрица, называются подобными. Таким образом, две матрицы, соответствующие одному оператору в линейном пространстве **R** при различных базисах подобны между собой, причем матрица **T**, связывающая эти матрицы, совпадает с матрицей преобразования координат при переходе от первого базиса ко второму. Другими словами, линейному оператору в **R** отвечает целый класс подобных между собой матриц; эти матрицы представляют данный оператор в различных базисах. Две подобные матрицы имеют всегда равные определители, т.е.

$$|\mathbf{B}| = |\mathbf{T}|^{-1} |\mathbf{A}| |\mathbf{T}| = |\mathbf{A}| . \qquad (1)$$

Равенство $|\mathbf{B}| = |\mathbf{A}|$ является необходимым, но не достаточным условием подобия.

Для того чтобы две матрицы $\mathbf{A} = \| a_{ik} \|_1^n$ и $\mathbf{B} = \| b_{ik} \|_1^n$ были подобны ($\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$), необходимо и достаточно, чтобы они имели одни и те же инвариантные многочлены, или одни и те же элементарные делители в числовом поле K [2, 3, 4].

Пусть матрица $\mathbf{A} = (\lambda)$ (λ – корень характеристического полинома, имеет ранг r, т.к. в этой матрице не равные тождественные нулю миноры r-го порядка, в то время как все миноры порядка > r равны нулю тождественно относительно λ. Обозначим через $D_j(\lambda)$ наибольший общий делитель всех миноров j-го порядка матрицы $\mathbf{A} = (\lambda)$ ($j = 1, 2, \ldots, r$) . Тогда в ряду

$$D_r(\lambda), D_{r-1}(\lambda), \ldots, D_1(\lambda), D_0(\lambda) = 1 , \qquad (2)$$

каждый многочлен делится без остатка на последующий. Соответствующие частные обозначим как $i_1(\lambda), i_2(\lambda), \ldots, i_r(\lambda)$:

$$\begin{aligned} i_1(\lambda) &= \frac{D_r(\lambda)}{D_{r-1}(\lambda)}, i_2(\lambda) = \frac{D_{r-1}(\lambda)}{D_{r-2}(\lambda)}, \ldots, \\ i_r(\lambda) &= \frac{D_1(\lambda)}{D_0(\lambda)} = D_1(\lambda). \end{aligned} \qquad (3)$$

Многочлены $i_1(\lambda), i_2(\lambda), \ldots, i_r(\lambda)$ называются инвариантными многочленами прямоугольной матрицы $\mathbf{A} = (\lambda)$ [2, 4].

Для дальнейших доказательств рассмотрим некоторые частные типы линейных операторов в **R**: оператор **J** в **R** называется инволютивным, если $\mathbf{J}^2 = \mathbf{E}$ (где **E** – единичная матрица). Инволютивному оператору в любом базисе соответствует инволютивная матрица **J**. Инволютивный оператор неособенный, т.е. $\mathbf{J}^{-1} = \mathbf{J}$.

Оператор **P** в **R** является проекционным, если $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$.

Пусть дано произвольное расщепление пространства **R** на два подпространства **S** и **T**: **R** = **S** + **T**. Тогда для любого вектора $\vec{x} \in \mathbf{R}$ имеет место разложение $\vec{x} = \vec{x}_S + \vec{x}_T$, где $\vec{x}_S \in \mathbf{S}$, $\vec{x}_T \in \mathbf{T}$ [2, 5].

Вектор $\vec{x}_S$ является проекцией вектора $\vec{x}$ на подпространство **S** параллельно подпространству **T**. Аналогично вектор $\vec{x}_T$ – проекция вектора $\vec{x}$ на подпространство **T** параллельно подпространству **S**.

Рассмотрим оператор **P**, осуществляющий проектирование пространства **R** на подпространство **S** параллельно подпространству **T**, т.е. оператор в **R** определяется равенством $\mathbf{P}\vec{x} = \vec{x}_S$ для любого вектора $\vec{x} \in \mathbf{R}$. Очевидно этот оператор является линейным, но он является проективным, т.к.

$\mathbf{P}\vec{x} = \vec{x}_S$, $\mathbf{P}^2\vec{x} = \mathbf{P}\vec{x}_S$ и, следовательно, $(\mathbf{P}^2 - \mathbf{P})\vec{x} = \vec{x}_S - \vec{x}_S = 0$, т.е. $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$.

Можно проверить и обратное утверждение. Произвольный проекционный оператор **P** в **R** осуществляет проектирование всего пространства **R** на подпространство $\mathbf{S} = \mathbf{PR}$ параллельно подпространству $\mathbf{T} = (\mathbf{E} - \mathbf{P})\mathbf{R}$. Любая натуральная степень проекционного оператора является проекционным оператором. Если **P** – проекционный оператор, то **E** – **P** – проекционный оператор, т.к.

$$(\mathbf{E} - \mathbf{P})^2 = \mathbf{E} - 2\mathbf{P} + \mathbf{P}^2 = \mathbf{E} - \mathbf{P}. \quad (4)$$

Квадратная матрица **P** будет проекционной, если $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$. Очевидно, в произвольном базисе проекционному оператору соответствует проекционная матрица. Для нахождения оператора динамической системы на основе экспериментальных данных (в виде векторных временных рядов, полученных в результате обработки выходных сигналов исследуемой системы) произведем их упорядочение в виде ганкелевых квадратичных форм и соответствующих им ганкелевых матриц.

Для получения модели, имеющей вид «вход – состояние – выход» (модели с памятью), рассмотрим разложимость матричного оператора в модели пространства состояний (**A**, **B**, **C**, **D**). Здесь **A** – матрица коэффициентов системы, **B** – матрица управления, **C** – матрица выхода, **D** – матрица обхода (устанавливает непосредственную зависимость выходных данных системы от входных переменных) [6].

Пусть в результате обработки выходных сигналов получены $2n$–1 чисел (или векторов в случае многомерного выходного сигнала динамической системы) $s_0, s_1, \ldots, s_{2n-2}$. Составим симметрическую ганкелеву матрицу $\mathbf{S} = \| s_{i+k} \|_0^{n-1}$, в развернутом виде она имеет вид:

$$\mathbf{S} = \begin{Vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \cdots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_n \\ s_2 & s_3 & s_4 & \cdots & s_{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \cdots & s_{2n-2} \end{Vmatrix}. \quad (5)$$

Последовательные главные миноры матрицы **S** будем обозначать $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2, \ldots, \mathbf{D}_n$:

$$\mathbf{D}_p = | s_{i+k} |_0^{n-1}.$$

Основные результаты Фробениуса [2, 7] относительно ранга ганкелевых вещественных матриц: если в ганкелевой матрице $\mathbf{S} = \| s_{i+k} \|_0^{n-1}$ первые h строк линейно зависимы, то $\mathbf{D}_h \neq 0$.

Матрица, состоящая из первых h строк $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_h$ матрицы **S**

$$\begin{Vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \cdots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{h-1} & s_h & s_{h+1} & \cdots & s_{h+n-2} \end{Vmatrix} \quad (6)$$

имеет ранг h. С другой стороны, любой столбец этой матрицы выражается линейно через h предыдущих столбцов, но тогда, поскольку ранг матрицы (6) равен h, эти первые h столбцов матрицы (6) должны быть линейно независимы, т.е. $\mathbf{D}_h \neq 0$.

Для рассмотрения вопроса разложимости ганкелевых матриц с целью удобства доказательства их разложимости и получения на этой основе представления модели в пространстве состояний (**A**, **B**, **C**, **D**) обозначим элементы прямоугольной матрицы (6) как a_{ik} с двумя индексами, где i – нумерация по строкам, k – нумерация по столбцам, т.е. перейдем от матрицы **S** к совпадающей по размерности матрице $\mathbf{A} = \| a_{ik} \|_1^n$ (i = 1, 2, …, m; k = 1, 2, …, n). Исходя из алгоритмов обработки выходных сигналов динамического объекта значения элементов матриц (5) и (6) будут неотрицательными $a_{ik} \geq 0$ или положительными $a_{ik} > 0$.

Матрица $\mathbf{A} = \| a_{ik} \|_1^n$ будет разложимой, если она может быть приведена к виду

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{Vmatrix} \mathbf{B} & 0 \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{Vmatrix}, \quad (7)$$

где **B** и **D** – квадратные матрицы [2, 4].

Это возможно тогда и только тогда, когда возможно некоторое разбиение всех ее индексов 1, 2, …, n на две дополнительные системы (без общих индексов) i_1, i_2, ..., i_μ; k_1, k_2, ..., k_ν ($\mu + \nu = n$) $a_{i_\alpha k_\beta} = 0$ (α = 1, 2, …, μ; β = 1, 2, …, ν). В противном случае матрица **A** будет неразложимой. Под перестановкой рядов в квадратной матрице $\mathbf{A} = \| a_{ik} \|_1^n$ понимается соединение перестановок строк с такой же перестановкой столбцов матрицы **A**.

Пусть матрица $\mathbf{A} = \| a_{ik} \|_1^n$ соответствует линейному оператору в n-мерном векторном пространстве **R** (n векторов выхода динамической системы) с базисом $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$. Перестановка рядов соответствует перенумерации базисных векторов, т.е. переходу от базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ к новому базису $\vec{e}_1' = \vec{e}_{j1}, \vec{e}_2' = \vec{e}_{j2}, \ldots, \vec{e}_n' = \vec{e}_{jn}$, где ($j1$, $j2$, …, jn) некоторая перестановка индексов 1, 2, …, n. При этом матрица **A** переходит в подобную ей матрицу $\widetilde{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT}$ (в каждой строке и каждом столбце преобразующей матрицы **T** один элемент равен единице, а все остальные элементы равны нулю) [2, 7].

Под ν-мерным координатным подпространством в **R** будем понимать любое подпространство в **R** с базисом $\vec{e}_{k_1}, \vec{e}_{k_2}, \ldots, \vec{e}_{k_\nu}$ $(1 \le k_1 < k_2 < \ldots < k_\nu \le n)$. С каждым базисом $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ пространства **R** связано C_n^ν ν-мерных координатных подпространств. C_n^ν – биномиальный коэффициент: $C_n^\nu = \dfrac{n!}{\nu!(n-\nu)!}$. Тогда матрица $\mathbf{A} = \| a_{ik} \|_1^n$ разложима в том и только в том случае, если соответствующий этой матрице оператор **A** имеет ν-мерное инвариантное координатное подпространство с $\nu < n$. Отсюда следует, что, если **A** разложимая матрица, то перестановкой рядов она может быть представлена в виде (7), и, если $\mathbf{A} \ge 0$ и в характеристическом определителе

$$\Delta(r) = \begin{vmatrix} r - a_{11} & -a_{12} & \ldots & -a_{1n} \\ -a_{21} & r - a_{22} & \ldots & -a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \ldots & r - a_{nn} \end{vmatrix} \quad (8)$$

какой-либо из главных миноров обращается в нуль (матрица **A** разложима), тогда обращается в нуль любой “объемлющий” главный минор и, в частности, один из главных миноров (n – 1)-го порядка $\mathbf{B}_{11}(\lambda)$, $\mathbf{B}_{22}(\lambda)$, …, $\mathbf{B}_{nn}(\lambda)$ [2, 5, 7].

Матрица $\mathbf{A} \ge 0$ является разложимой в том и только в том случае, когда в одном из соотношений $\mathbf{B}_{ii}(r)$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) имеется знак равенства.

После введения основных свойств линейных операторов уточним фундаментальное понятие в теории динамических систем – понятие состояния, которое чрезвычайно важно с практической точки зрения в теории принятия решений и обработки сигналов.

Система с пространством состояний есть четверка

$$\Sigma_i = \{T, W, X, \mathcal{B}_i\}, \quad (9)$$

где $T \subset R$ – множество моментов времени; W – алфавит внешних сигналов; X – пространство состояний; $\mathcal{B}_i \subset (W \times X)^T$ – внутреннее поведение.

Предполагается, что $\mathcal{B}_i$ удовлетворяет аксиоме состояния

$$\{(\vec{w}_k, \vec{x}_k) \in \mathcal{B}_i, k = 1,2, t_0 \in T,$$
$$\vec{x}_1(t_0) = \vec{x}_2(t_0)\} \to \{\vec{w}_1, \vec{x}_1 \underset{t_0}{\wedge} (\vec{w}_2, \vec{x}_2) \in \mathcal{B}_i\}, \quad (10)$$

где $\vec{w}_k$ – векторы выходных сигналов динамического объекта; $\underset{t_0}{\wedge}$ – знак конкатенации.

Из аксиомы состояния вытекает, что любая траектория, приходящая в некоторое состояние, совместима с любой другой траекторией, выходящей из этого же самого состояния. Иначе говоря, в теоретико-множественном смысле для заданного в данный момент состояния прошлое и будущее условно независимы, т.е. это состояние расщепляет прошлое и будущее поведения системы [2, 4, 8]. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \sigma\vec{x} &= \mathbf{A}'\vec{x} + \mathbf{B}'\vec{u} \\ \vec{w} &= \mathbf{C}'\vec{x} + \mathbf{D}'\vec{u} \end{aligned} \quad (11)$$

Она определяет динамическую систему с пространством состояний, в которой σ – оператор сдвига во времени, $T = Z_+$ или Z – множество моментов времени (дискретное или непрерывное) ≥ 0.

$W = R^q, X = R^n$ и

$\mathcal{B}'(\mathbf{A}', \mathbf{B}', \mathbf{C}', \mathbf{D}') := \{(\vec{w}, \vec{x}) : T \to R^q \otimes R^n \mid \exists \vec{u} : T \to R^m$, такое, что выполняется (11)}. Ее внешнее поведение есть $\mathcal{B}_S(\mathbf{A}', \mathbf{B}', \mathbf{C}', \mathbf{D}')$. R – числовая ось (проквантованная или непрерывная); R^q, R^n, R^m – соответствующие q, n, m-мерные линейные пространства; знак := – равно по определению; ⊗ – декартово произведение множеств (пространств) [2, 3, 4, 8].

Поставленная задача заключается в нахождение модели динамического объекта по результатам измерений его выходных сигналов, которые после их обработки представляют векторные временные ряды. В качестве элемента класса моделей, объясняющего полученное множество наблюдений и являющегося наименьшим среди возможных, найдем наиболее сильную неопровергаемую модель. Исходя из наблюдаемого векторного временного ряда определим в соответствии с [5, 7, 9, 10] алгоритмы вычисления самой сильной неопровергаемой модели. Для решения этого разработана теория реализации на основе усеченного поведения [5, 7, 10]. Сформулируем поставленную задачу: для полученного в результате обработки наблюдений за динамическим объектом q-мерного временного ряда $\vec{w}(t_0), \vec{w}(t_0+1), \ldots, \vec{w}(t_1)$ $(-\infty \le t_0 \le t \le t_1 \le \infty)$ с $\vec{w}(t) \in R^q$ найти динамическую модель объекта, объясняющую приведенные наблюдения.

В общем случае, методический подход к построению алгоритмов, адекватно представляющих модель и учитывающих ранее заявленные требования к линейности, упорядоченности, законам сохранения, разложимости операторов, заключается в задании некоторого определенного набора уравнений, содержащих пока что минимальный набор параметров с минимальным набором ограничений. Однако, прежде чем создавать алгоритм для получения оптимальных (приближенных) моделей с учетом помех, целесообразно построить алгоритм с учетом только рассмотренных структурных свойств линейных операторов для реализации точных моделей [1, 7, 8, 9, 11].

В данном рассматриваемом случае класс моделей $\mathcal{M}$ состоит из всех линейных подпространств векторного пространства выходных параметров динамического объекта. Конкретная модель M_1 заданного явления (функционирования динамического объекта) будем считать более сильной чем модель M_2, если $M_1 \subset M_2$. При этом будем рассматривать только прямые измерения атрибутов самого явления. Предположим, что явление S надо моделировать на основе измерений $Z \subset S$ в заданном классе моделей $\mathcal{M} \subset 2^S$. Предпочтение в выборе модели из $\mathcal{M}$ отдадим той, которая не противоречит Z и дает наилучшие предсказания. Она является наиболее сильной неопровергаемой моделью. С математической точки зрения, если она немажорируемая в $\mathcal{M}$, если имеется импликация

$$\{Z \subset M' \subset \mathcal{M} \quad \text{и} \quad M' \subset M\} \rightarrow \{M' \equiv M\}. \qquad (12)$$

Модель $\underset{Z}{M^*}$ является наиболее сильной из класса моделей $\mathcal{M}$, основанной на измерениях Z, если

$$Z \subset \underset{Z}{M^*} \in \mathcal{M} \quad \text{и}$$
$$\{Z \subset M \in \mathcal{M}\} \rightarrow \{\underset{Z}{M^*} \subset M\}. \qquad (13)$$

Это возможно, если семейство моделей $\mathcal{M} \subset 2^S$ обладает свойством пересечения, т.е.

$$\{\mathcal{M}' \subset \mathcal{M}\} \rightarrow \{\bigcap_{M \in \mathcal{M}'} \subset \mathcal{M}\}, \qquad (14)$$

и что для каждого $Z \in \mathcal{L} \in 2^S$ существует наиболее сильная неопровергнутая модель $\underset{Z}{M^*}$ в классе моделей $\mathcal{M}$, основывающаяся на измерениях Z [7, 12]. Это следует из следующего обоснования.

При $T = Z_+$ или Z рассмотрим систему $\Sigma = \{T, R^q, \mathcal{B}\}$. Тогда полиномиальная матрица $\mathbf{R}$, такая, что $\Sigma = \Sigma(\mathbf{R})$, существует в том и только в том случае, когда система $\sum$ линейна, стационарна и полна, т.е. в том и только в том случае, когда ее поведение $\mathcal{B}$ линейно, инвариантно относительно сдвига и замкнуто в топологии поточечной сходимости пространства $(R^q)^T$ (пространства q-мерных временных рядов). Это самая четкая из возможных характеристик этого класса систем: требуется, чтобы поведение $\mathcal{B} \subset (R^q)^T$ было линейным, инвариантным относительно сдвига ($\sigma\mathcal{B} \subset \mathcal{B}$, если $T = Z_+$ и $\sigma\mathcal{B} = \mathcal{B}$ для Z), и полным в топологии поточечной сходимости, где σ – оператор сдвига.

После приведенного обоснования можно приступить к решению поставленной задачи нахождения модели динамического объекта по его выходным сигналам [5, 7, 9, 11, 12].

Выходные сигналы динамического объекта $\vec{w}(t)$ после обработки измерительной системой будут многомерными временными рядами: $\vec{w}(0), \vec{w}(1), \ldots, \vec{w}(t)$ в случае дискретного времени $T = Z_+$ и $\vec{w}(-1), \vec{w}(0), \vec{w}(1), \ldots, \vec{w}(t)$ в случае $T = Z$.

На их основании для структурного упорядочения информации построим бесконечные векторные ганкелевы матрицы [2, 3, 4, 7, 8].

$$\mathcal{H}(\vec{w}) := \begin{pmatrix} \vec{w}(0) & \vec{w}(1) & . & . & . & \vec{w}(t') & . & . & . \\ \vec{w}(1) & \vec{w}(2) & . & . & . & \vec{w}(t'+1) & . & . & . \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vec{w}(t) & \vec{w}(t+1) & . & . & . & \vec{w}(t+t') & . & . & . \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}, \qquad (15)$$

(случай $T = Z_+$)

или в случае $T = Z$

$$\mathcal{H}(\vec{w}) := \begin{pmatrix} . & . & . & \vec{w}(-1) & \vec{w}(0) & \vec{w}(1) & . & . & . & \vec{w}(t') & . & . & . \\ . & . & . & \vec{w}(0) & \vec{w}(1) & \vec{w}(2) & . & . & . & \vec{w}(t'+1) & . & . & . \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ . & . & . & \vec{w}(t-1) & \vec{w}(t) & \vec{w}(t+1) & . & . & . & \vec{w}(t+t') & . & . & . \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \qquad (16)$$

На основании (15), (16) построим разбитую на блоки (бесконечную в четырех направлениях) ганкелеву матрицу [3, 4, 8] для ряда $\vec{w}(t): Z \rightarrow R^q$

$$\begin{pmatrix} \mathcal{H}_{-}(\vec{w}) \\ \hline \mathcal{H}_{+}(\vec{w}) \end{pmatrix} := \left(\begin{array}{cccccc} & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ \dots & \vec{w}(-t-1) & \vec{w}(-t) & \dots & \vec{w}(0) & \dots \\ & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ \dots & \vec{w}(t-2) & \vec{w}(-1) & \dots & \vec{w}(t'-1) & \dots \\ \dots & \vec{w}(-1) & \vec{w}(1) & \dots & \vec{w}(t') & \dots \\ \hline \dots & \vec{w}(0) & \vec{w}(1) & \dots & \vec{w}(t'+1) & \dots \\ & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ \dots & \vec{w}(t-1) & \vec{w}(t) & \dots & \vec{w}(t+t') & \dots \\ & \vdots & \vdots & & \vdots & \end{array}\right). \qquad (17)$$

Введем понятие относительного ранга по строкам rank($\mathbf{M}_1$; $\mathbf{M}_2$) разделенной на блоки бесконечной матрицы (17), представив ее в виде

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_1 \\ \hline \mathbf{M}_2 \end{pmatrix}. \qquad (18)$$

Сначала предположим, что матрица $\mathbf{M}$ конечна. Тогда по определению

$$\text{rank}(\mathbf{M}_1;\, \mathbf{M}_2) = \text{rank}\, \mathbf{M}_1 + \text{rank}\, \mathbf{M}_2 - \text{rank}\, \mathbf{M} = \\ = \text{rank}\, \mathbf{M} \qquad (19)$$

и предположим далее, что матрица $\mathbf{M}$ имеет бесконечное число столбцов и с учетом формул (5) и (6) положим

$$\text{rank}(\mathbf{M}_1;\mathbf{M}_2) = \lim_{t\to\infty} \text{rank}(\mathbf{M}_{1,t};\mathbf{M}_{2,t}) = \\ = \text{rank}(\widetilde{\mathbf{M}}_1;\widetilde{\mathbf{M}}_2) \qquad (20)$$

Здесь согласно [4, 8] $\mathbf{M}_{1,t}$ и обозначает матрицу, полученную из $\mathbf{M}_1$ в результате ограничения ее по столбцу с номером t, а $\widetilde{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} \widetilde{\mathbf{M}}_1 \\ \hline \widetilde{\mathbf{M}}_2 \end{pmatrix}$ – подматрицу максимального ранга в $\mathbf{M}$.

Введенное определение очевидным образом распространяется на случай матрицы с бесконечным в обе стороны числом столбцов. В результате получаем

$$\text{rank}(\mathbf{M}_1;\mathbf{M}_2) = \sup_{t\to\infty} \text{rank}(\mathbf{M}_1^{t'};\mathbf{M}_2^{t''}), \qquad (21)$$

т.е. (3.13) является верхним пределом относительно ранга по всем подматрицам $\mathbf{M}_1$ и $\mathbf{M}_2$, получаемым в результате вычеркивания любого числа строк в $\mathbf{M}_1$ и $\mathbf{M}_2$.

Доказано в [4, 8], что $\text{rank}\,(\mathcal{H}_{-}(\vec{w});\, \mathcal{H}_{+}(\vec{w})) < \infty$ и он равен размерности минимального представления с пространством состояний $\Sigma_S(\mathbf{A}',\mathbf{B}',\mathbf{C}',\mathbf{D}')$ наиболее сильной неопровергнутой (AR)-модели $\mathcal{B}(R_{\vec{w}}^{*})$ временного ряда $\vec{w}$ (здесь (AR) – авторегрессионная модель). Для полученного в результате обработки наблюдаемого временного ряда $\vec{w}:\ Z \to R^q$ и построенной для системы (11) матрицы $\mathbf{M} \in R^{(n+q)\times(n+m)}$, задающей отображение

$$\mathbf{M}: \begin{pmatrix} \vec{x}(t_i) \\ \hline \vec{u}(t_i) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \vec{x}(t_i+1) \\ \hline \vec{w}(t_i) \end{pmatrix}, \qquad (22)$$

где $\vec{x}(t)$ – вектор состояния; $\vec{u}(t)$ – вектор управления, разбив которую на блоки

$$\mathbf{M} := \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A}' & \mathbf{B}' \\ \hline \mathbf{C}' & \mathbf{D}' \end{array}\right), \qquad (23)$$

так, что $\mathbf{A}' = R^{n\times n}$, $\mathbf{B}' = R^{n\times m}$, $\mathbf{C}' = R^{q\times n}$ и $\mathbf{D}' = R^{q\times m}$, получим модель динамического оператора $\Sigma(\mathbf{A}',\mathbf{B}',\mathbf{C}',\mathbf{D}')$, которая является наиболее сильной неопровергнутой моделью с минимальным пространством состояний и минимальным числом входов m для временного ряда $\vec{w}(t)$ [6, 7]. Обоснуем эти решения, наделив линейные операторы необходимыми дополнительными свойствами: сюръективным соответствием (отображением) между множествами, при котором каждый элемент одного множества соответствует некоторому элементу другого множества и биективным отображением – взаимно однозначным соответствием, являющимся одновременно однозначным, инъективным (при котором различным элементам из первого множества соответствуют различные элементы другого), и сюръективным [7].

Пусть измерительной системой зафиксирован неизвестный сигнал, который после обработки имеет вид временного ряда $\vec{w}(-1), \vec{w}(0), \vec{w}(1), \dots, \vec{w}(t)$. Такие сигналы могут иметь различную физическую природу: электромагнитную, гравитационную, акустическую, оптическую, биологическую, социальную, зафиксировав которые, найти в линейном приближении модель объекта, его генерирующего. Условием для решения этой обратной задачи является наличие линейного соответствия с временем, расстоянием, давлением и т.д., с одинаковой топологией и совпадением начальных (граничных) условий.

При разработке алгоритма сначала обсудим основную идею, а затем она будет приведена в систематическую процедуру, которую можно применять почти механически. Однако получаемый алгоритм включает только стандартные методы линейной алгебры, его нельзя представлять как численные процедуры, поскольку здесь не учитывается численная устойчивость, робастность, вычислительная сложность.

Итак, имеем исходные данные $\vec{w}(-1), \vec{w}(0), \vec{w}(1), \dots, \vec{w}(t), \dots$

1. Определяем структуру в матрице (17) $\mathcal{H}(\vec{w})$.

Для этого введем такие матрицы H_- и H_+ (где H_- составлена из строк матрицы $\mathcal{H}_-(\vec{w})$, а H_+ – из строк матрицы $\mathcal{H}_+(\vec{w})$), что $\operatorname{rank}(H_-;H_+) = \operatorname{rank}(\mathcal{H}_-(\vec{w});\mathcal{H}_+(\vec{w})) =: n$.

Определяем запаздывание. Из ганкелевой структуры следует, что для $t \in Z_+$, выражения

$$\begin{aligned}\rho_t &:= \operatorname{rank}\mathcal{H}_t(\vec{w}) - \operatorname{rank}\mathcal{H}_{t-1}(\vec{w})\\ \rho_0 &:= \operatorname{rank}\mathcal{H}_0(\vec{w})\end{aligned} \tag{24}$$

определяют невозрастающую последовательность неотрицательных целых чисел.

Теперь вычислим такое t', что $\rho_t = \rho_{t'}$, для $t > t'$. В результате получим подходящие матрицы, остановившись на $q(t'+1)$ нижних строках в $\mathcal{H}_-(\vec{w})$ и $q(t'+1)$ верхних строках в $\mathcal{H}_+(\vec{w})$.

Далее определим матрицу $\operatorname{col}(H_1, H_2) = \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \end{pmatrix}$, состоящую из такого количества столбцов $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \end{pmatrix}$, что столбцы $\operatorname{col}(H_1, H_2)$ порождают линейное пространство, натянутое на столбцы матрицы $\mathbf{H}$ [2, 3, 11, 12, 17]. Естественно, что ранг матрицы $\mathbf{H}$ $\operatorname{rank}(H_1;H_2) = n$ [7].

2. Определяем пространство состояний: вычислим ядро (*ker*) матрицы H_1 и положим $\mathcal{H} = H_2 \ker H_1$.

Размерность (*dim*) ядра линейного оператора (матрицы) совпадает с размерностью ее спектра [1, 2] набором корней характеристического полинома. Отметим, что размерность области значений H_2 по модулю $\mathcal{H}$ равна *n*, т.е.

$$\dim(\operatorname{im} H_2)(\operatorname{mod} \mathcal{H}) = n. \tag{25}$$

Затем примем

$$X \cong ((\operatorname{im} H_2)(\operatorname{mod} \mathcal{H})). \tag{26}$$

Если ~ – отношение эквивалентности на множестве *S*, то *S*(mod ~) представляет собой множество классов эквивалентности; $(\operatorname{im} H_2)$ – область значений оператора (матрицы H_2); *X* – пространство состояний. Примем $\vec{x}(t) := \vec{h}_+(t)(\operatorname{mod} \mathcal{H})$, где $\vec{h}_+(t)$ – столбец с номером *t* матрицы H_+.

3. Определим пространство входных сигналов. Примем

$$\vec{f}(t) := \operatorname{col}(\vec{w}(t), \vec{x}(t))$$

и

$$S := \operatorname{span}\{\vec{f}(t), t \in Z\}. \tag{27}$$

Формула (27) означает, что, если $\mathcal{L}$ – векторное пространство и $\mathcal{L}' \subset \mathcal{L}$ – его подпространство, то $\mathcal{L}(\operatorname{mod} \mathcal{L}')$ означает векторное пространство, индуцированное отношением эквивалентности, и $\vec{e}_i \in \mathcal{L}$, $i \in n$ – такие линейно независимые векторы, что $\mathcal{L}' \oplus \operatorname{span}\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\} = \mathcal{L}$; тогда набор $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ будет дополнительным базисом $\mathcal{L}'$в $\mathcal{L}$ [1, 2, 7].

Очевидно, что проекция π_x: $S \to X$, определяемая равенством $\pi_x \vec{f}(t) := \vec{x}(t)$, сюръективная (такое соответствие между множествами, при котором каждый элемент одного множества соответствует некоторому элементу другого множества) – тем самым *S* представлено как векторное расслоение на X [1, 2].

Зададим векторное пространство U и сюръективное отображение $\pi_u := S \to U$ так, что $S = X \oplus U$, т.е. так, что отображение $\pi := (\pi_x, \pi_u)$ биективно (соответствие, являющееся одновременно однозначным, инъективным и сюръективным); инъекция – вложение, отображение – такое соотношение между множествами, при котором различным элементам из одного множества соответствуют различные элементы из другого множества.

Очевидно, что размерность $U = \dim U = \dim S - \dim X$

Примем, что $\vec{u}(t) = P_u \vec{f}(t)$, где P_u – оператор проектирования.

4. Определение параметров системы.

Для $i \in (n+m)$ введем числа t_i так, что векторы $\vec{f}(t_i)$ образуют базис пространства *S*. Тогда $\vec{f}(t_i) = \operatorname{col}(\vec{x}(t_i), \vec{u}(t_i))$ будут базисом для $X \oplus U$. Теперь определим такую $(n+q)\times(n+m)$-матрицу $\mathbf{M}$, что

$$\mathbf{M} : \begin{pmatrix} \vec{x}(t_i) \\ \hdashline \vec{u}(t_i) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \vec{x}(t_i+1) \\ \hdashline \vec{w}(t_i) \end{pmatrix}. \tag{28}$$

В результате пусть $\vec{w}: Z \to R^q$ – наблюдаемый временной ряд и $\mathbf{M} \in R^{(n+q)\times(n+m)}$ – построенная матрица (3.20). Разобьем $\mathbf{M}$ на блоки

$$\mathbf{M} := \left(\begin{array}{c:c} \mathbf{A}' & \mathbf{B}' \\ \hdashline \mathbf{C}' & \mathbf{D}' \end{array}\right), \tag{29}$$

так $\mathbf{A}' \in R^{n\times n}$, $\mathbf{B}' \in R^{n\times m}$, $\mathbf{C}' \in R^{q\times n}$ и $\mathbf{D}' \in R^{q\times m}$. Тогда система $\Sigma_S(\mathbf{A}', \mathbf{B}', \mathbf{C}', \mathbf{D}')$ является наиболее сильной неопровергнутой моделью с минимальным пространством состояний и минимальным числом входов для временного ряда $\vec{w}$ [1, 4, 8].

ВЫВОДЫ. 1. Предлагаемый метод моделирования оператора динамической системы на основе свойств линейных операторов и упорядочения экспериментальных данных с помощью ганкелевых квадратичных форм и ганкелевых матриц позволяет обсуждать решение обратных задач динамики на теоретико-множественном уровне в математически точной и согласованной постановке. Это приводит к понятию оптимальной точной модели (без учета помех), а именно к наиболее сильной неопровергнутой модели в классе линейных систем. Такая модель объясняет наблюдения и мала насколько возможно [3, 4, 5, 7, 8, 10]. Ее существование вытекает из свойства пересечения (3.6).

2. Линейные конечномерные системы удовлетворяют пункту 1 из-за того, что их поведение в точности соответствует замкнутым линейным инвариантным относительно сдвига подпространствам в $(R^q)^T$.

3. Проиллюстрированная последовательность построения модели оператора линейной динамической системы как решения обратной задачи динамики: по выходному сигналу определить структуру оператора в пространстве состояний позволяет разрабатывать вычислительные алгоритмы для реальных динамических систем в линейном приближении.

ЛИТЕРАТУРА

1. Неймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. 528 с.
2. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 560 с.
3. Димова Г. О., Димов В. С. Проекційні методи дослідження обернених задач лінійних динамічних систем. *Прикладні питання математичного моделювання*. Том 2 № 1. 2019. С. 182–188. DOI: 10.32782/2618-0340-2019-3-17.
4. Марасанов В. В., Димова Г. О. Евристичні підходи до аналізу динамічних об'єктів по вихідним сигналам. *Проблеми інформаційних технологій*. 2017. №1(022). С. 134–141.
5. Greene W. Econometric Analysis. 7th Edition. New York: Prentice Hall, 2012. 1184 p.
6. Карабутов Н. Н. Адаптивная идентификация систем: Информационный синтез. М.: КомКнига, 2006. 384 с.
7. Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. М.: Едиториал УРСС, 2004. 400 с.
8. Димова Г. О., Димов В. С. Реалізація інформаційної технології ідентифікації і прогнозування стану безперервних виробництв. Стратегії, моделі та інформаційні технології в системах управління: колективна монографія / ред. Райко Г. О. Херсон: Книжкове видавництво ФОП Вишемирський В. С., 2019. С. 103–113.
9. Димова Г. О., Димов В. С. Генерування випадкових процесів динамічними системами. *Прикладні питання математичного моделювання*. Том 1 № 2. 2018. С. 55 – 64. DOI: 10.32782/2618-0340-2018-2-55-64.
10. Марасанов В. В., Дымова А. О., Дымов В. С. Исследование на чувствительность моделей динамических систем, полученных проекционным методом. *Проблеми інформаційних технологій.* 2016. № 1(019).С. 169–173.
11. Phillips P., Moon H. Nonstationary Panel Data Analysis: An Overview of Some Recent Developments." *Econometric Reviews*, No 19, 2000, Pp. 263–286.
12. Дымова А. О. Исследование на чувствительность собственных значений матриц моделей динамических систем в пространстве состояний. *Проблеми інформаційних технологій*. 2017. №1(021). С. 92 – 96.

PROJECTION METHODS OF THE LINEAR DYNAMIC SYSTEMS OPERATOR STRUCTURE DESCRIPTION

H. Dymova
Kherson State Agrarian University
vul. Stritenska, 23, Kherson, 73000, Ukraine. Email: anndymova@gmail.com

Purpose. The main purpose of the study is to identify processes for determining the structure of a dynamic object with an output signal, finding the structure of the dynamic object's operator based on the structural properties of linear operators and ordering experimental data using Hankel quadratic forms and Hankel matrices allows solving inverse problems of dynamics. The development of technologies for determining the presence of a useful signal can significantly improve the efficiency of control systems for complex technological objects. Processing of the experimental data of the output signal is carried out to identify and predict the behavior of the object. Based on this, the development of methods for solving inverse problems for continuous technological processes, i.e., determining the structure of the operator of dynamic systems is an important issue. **Methodology**. The issues of increasing the complex technological objects control systems efficiency by processing the experimental data of the output signal in order to identify and predict the behavior of the control object are considered. The requirements to the model of the dynamical systems operator structure are advanced. The basic properties of linear operators are considered and the concept of a system with a state space is introduced. **Results**. A method has been developed for finding a model of a dynamic system, specified only by the output signal, and determining the characteristics of a dynamic system, in contrast to known processes, which are considered in many works and are represented by three tasks: the identification problem, when based on the known signals at the input and output of the system conclusion about the composition of the system and its characteristics; a control task when the characteristics of the system and the input signal are known and the law of signal change at the system output or such an input signal that outputs the system to a predetermined state is determined; measurement task, when the output signal and system characteristics are known, the characteristics of the input signal are determined. **Originali-**

ty. An algorithm has been developed to find the dynamic object operator structure by its output signals based on the structural properties of linear operators and ordering the set of output signals by representing them in the form of Hankel forms and Hankel matrices. A method for modeling the dynamic system operator based on the study of inverse problems is given. **Practical value**. The sequence of constructing the linear dynamic system operator model as a solution to the inverse problem of dynamics allows us to develop computational algorithms for real dynamic systems in the linear approximation.

Keywords: dynamical system, operator, inverse problem, linear space, Hankel matrices, decomposability, rank.

REFERENCES

1. Neymark, M. A. (2010), Linear differential operators, M.: FIZMATLIT.
2. Gantmacher, F. R. (2004), Matrix theory, M.: FIZMATLIT.
3. Dymova, H. O., Dymov, V. S. (2019), Projection research methods of the reverse problems of linear dynamic systems, *Applied Mathematical Modeling Issues*, Volume 2, No 1, pp. 182 – 188. DOI: 10.32782/2618-0340-2019-3-17.
4. Marasanov, V. V., Dymova, H. O. (2017), Heuristic approaches to the analysis of dynamic objects by output signals, *Problems of information technologies*, Iss. 1 (022), pp. 134 – 141.
5. Greene, W. (2012), Econometric Analysis. 7th Edition. New York: Prentice Hall.
6. Karabutov, N. N. (2006), Adaptive system identification: Information synthesis, M.: KomKnig.
7. Kalman, R., Falb, P., Arbib, M. (2004), Essays on mathematical systems theory. M.: Edited by URSS.
8. Dymova, H. O., Dymov, V. S. (2019), Implementation of information technology for identification and forecasting of continuous production. Strategies, models and information technologies in management systems: a collective monograph, Kherson: V. S. Vyshemyrsky Book Publishing House, pp. 103 – 113.
9. Dymova, H. O., Dymov, V. S.(2018), Generation of random processes by dynamic systems, *Applied Mathematical Modeling Issues*, Vol. 1 No. 2, pp. 55 – 64. DOI: 10.32782 / 2618-0340-2018-2-55-64.
10. Marasanov, V. V., Dymova, A. O., Dymov, V. S. (2016), Sensitivity study of models of dynamic systems obtained by the projection method, *Problems of information technologies*, Iss. 1 (019), pp. 169 – 173.
11. Phillips, P., Moon, H. (2000), Nonstationary Panel Data Analysis: An Overview of Some Recent Developments", *Econometric Reviews*, Iss. 19, pp. 263 – 286.
12. Dymova, A. O. (2017), Investigation of the eigenvalues of the matrices of the matrices of models of dynamical systems in the state space, *Problems of information technologies*, iss. 1 (021), pp. 92 – 96.

Стаття надійшла 22.11.2019.