УДК 517.958:52/59; 519.711.3

В.Е. Богачев, Н.А. Чеканов

MAPLE ПРОГРАММА СИМВОЛЬНО-ЧИСЛЕННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЫ И ИНТЕГРАЛОВ ДВИЖЕНИЯ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

Анализ публикаций по теме исследования и постановка задачи.

Как известно, большинство динамических задач гамильтоновой механики не допускают решений в явном виде (см., например, [1-3]). Поэтому разработаны и разрабатываются различные приближенные аналитические методы и подходы [4-7], а так же прямые численные расчеты [8-10].

Одним из универсальных приближенных аналитических методов решения уравнений классической динамики является метод нормальных форм. Существо метода нормальных форм заключается в предварительном каноническом преобразовании гамильтоновой функции к простому виду, с которой уравнение движения легко интегрируется. Таким образом построенная функция Гамильтона называется нормальной формой. Имеются различные методы получения нормальной формы [4]. В работе [11] была представлена программа в среде REDUCE, которая позволяет построить нормальную форму по методу Биркгофа-Густавсона [12-13], а также получить приближенный интеграл движения для гамильтоновых систем с двумя степенями свободы, в том числе и для резонансных систем.

В настоящее работе решается задача о нормализации гамильтоновых систем и вычислении приближенных интегралов движения для гамильтоновых систем с произвольным конечным числом степеней свободы.

Цель статьи.

По методу Биркгофа-Густавсона [12-13] разработать алгоритм и составить программу для получения в аналитическом виде нормальной формы и приближенных интегралов движения для нерезонансных и резонансных гамильтоновых систем с произвольным числом степеней свободы в пакете прикладных программ MAPLE.

Основная часть.

Как известно (например из статьи [13]) функция Гамильтона $H(q,p)$, где $q=(q_1,q_2,q_3,\ldots,q_k,\ldots,q_n)$ и $p=(p_1,p_2,p_3,\ldots,p_k,\ldots,p_n)$ – канонически сопряженные координата-импульс, находится в нормальной форме после выполнения канонических преобразований $(q,p)\to(\xi,\eta)$, где $\xi=(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\ldots,\xi_k,\ldots,\xi_n)$ и $\eta=(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\ldots,\eta_k,\ldots,\eta_n)$, n – число степеней свободы, при которых $H(q,p)\to G(\xi,\eta)$, если выполняется условие

$$DG(\xi,\eta)=0, \tag{1а}$$

где

$$D=\sum_{k=1}^{n}\omega_k\left(\eta_k\frac{\partial}{\partial\xi_k}-\xi_k\frac{\partial}{\partial\eta_k}\right), \tag{1б}$$

так называемый дифференциальный оператор нормальной формы.

Как показано в работе [13], для этого надо решить основное уравнение

$$D(q,\eta)W^{(S)}(q,\eta)=-H^{(S)}(q,\eta)+\Gamma^{(S)}(q,\eta), \tag{2}$$

где $W^{(S)}$ есть производящий полином, производящей функции

$$F^{(S)}(q,\eta)=q\cdot\eta+W^{(S)}(q,\eta), \tag{3}$$

которая приводит к нормальной форме члены исходного гамильтониана степени S.

При выполнении канонического преобразования, которое приводит слагаемое к функции Гамильтона S-ой степени, слагаемые более высокой степени, чем S вычисляются по формуле

$$\Gamma^{(i)}(\xi,\eta)=H^{(i)}(\xi,\eta)+\sum_{|k|}\frac{1}{k!}\left(\left(\frac{\partial W^{(s)}}{\partial\xi}\right)^{k}\left(\frac{\partial^{|k|}H^{(l)}}{\partial\eta^{k}}\right)-\left(\frac{\partial W^{(s)}}{\partial\eta}\right)^{k}\left(\frac{\partial^{|k|}\Gamma^{(l)}}{\partial\xi^{k}}\right)\right), \qquad (4)$$

где $i=S+1,S+2,\ldots$ и выполняются условия $l-|k|+|k|(S-1)=i$, $1\le|k|\le l<i$, $l\ge 2$, $S\ge 3$, $k!=k_1!k_2!$, $|k|=k_1+k_2$.

Представленная программа состоит из трех основных частей. Это блок входных данных, блок процедур и основная программа.

Во входных данных задается число степеней свободы n, желаемый максимальный порядок нормальной формы $SMAX$ и дополнительных интегралов движения $SMAX$, максимальный порядок гамильтониана $j\max$, сам гамильтониан, квадратичного часть $V[2]$ которого задается в нормальной форме и его члены более высокой степени $V[3],V[4],\ldots,V[j\max]$, а также устанавливается несколько флагов. Флаг gip дополнительно позволяет вычислить нормальную форму в переменных действие-угол, флаг $intg2$ вычисляет интеграл движения независимый от интеграла энергии, $test1$ и $test2$ – флаги проверки правильности вычисления интеграла движения.

Первые две процедуры – вспомогательные. Подпрограмма $poiss(A,B)$ вычисляет скобку Пуассона между переменными A и B, а процедура $remv(z)$ удаляет в z все степени p и q выше $SMAX$. Процедура $SUPQXY(A)$ заменяет в аргументе A оригинальные переменные p,q на комплексные x,y. Процедура $SUXYPQ(A)$ делает обратную замену. Процедура $BASIS(HT,u,v,n)$ решает основное уравнение в переменных u,v и находит производящую функцию WT и нормальную форму GT S-го порядка. Процедура $high\_g(S)$ преобразует часть гамильтониана, члены которой порядка больше, чем текущее S, так как они необходимы для дальнейших вычислений. Процедура $normform(MAX)$ выполняет построение нормальной формы для степеней от $S=3$ до $S=MAX$. Процедура $invert(S)$ выражает конечные переменные (ξ,η) через начальные (q,p).

Ниже в качестве примеров представим результаты работы разработанной программы.

1. Для гамильтониана Хенона-Хейлеса с двумя степенями свободы [2]:

$$H=\frac{1}{2}\left(p_1^2+q_1^2\right)+\frac{1}{2}\left(p_2^2+q_2^2\right)+a\left(cq_2^3+q_1^2q_2\right), \qquad (5)$$

где a,c – параметры, до степени $SMAX=6$ были получены нормальная форма

$$G_6=G^{(2)}+G^{(4)}+G^{(6)}, \qquad (6а)$$

$$G^{(2)}=\frac{1}{2}\left(\eta_1^2+\xi_1^2+\eta_2^2+\xi_2^2\right), \qquad (6б)$$

$$G^{(4)}=-\frac{5}{48}a^2\eta_1^4-\frac{5}{48}a^2\xi_1^4-\frac{15}{16}a^2c^2\eta_2^4-\frac{15}{16}a^2c^2\xi_2^4+\left(\frac{1}{2}a^2c-a^2\right)\eta_2\xi_2\eta_1\xi_1+$$

$$+\left(-\frac{7}{8}a^2c+\frac{1}{12}a^2\right)\eta_2^2\xi_1^2+\left(-\frac{7}{8}a^2c+\frac{1}{12}a^2\right)\xi_2^2\eta_1^2-\frac{5}{24}a^2\eta_1^2\xi_1^2-\frac{15}{8}a^2c^2\eta_2^2\xi_2^2+$$

$$+\left(-\frac{5}{8}a^2c-\frac{5}{12}a^2\right)\eta_2^2\eta_1^2+\left(-\frac{5}{8}a^2c-\frac{5}{12}a^2\right)\xi_2^2\xi_1^2, \tag{6в}$$

$$G^{(6)}=\left(-\frac{7}{48}a^4c-\frac{67}{3456}a^4\right)\xi_1^6+\left(-\frac{7}{48}a^4c-\frac{67}{3456}a^4\right)\eta_1^6-\frac{705}{128}a^4c^4\xi_2^6+$$
$$+\left(-\frac{7}{8}a^4c^2-\frac{1}{9}a^4-\frac{41}{9}a^4c+\frac{41}{16}a^4c^3\right)\xi_2\xi_1\eta_2^3\eta_1+\left(-\frac{37}{48}a^4c-\frac{109}{72}a^4+\frac{5}{4}a^4c^2\right)\xi_2\xi_1\eta_2\eta_1^3+$$
$$+\left(-\frac{37}{48}a^4c-\frac{109}{72}a^4+\frac{5}{4}a^4c^2\right)\eta_2\xi_2\eta_1\xi_1^3+\left(-\frac{7}{8}a^4c^2-\frac{1}{9}a^4-\frac{41}{9}a^4c+\frac{41}{16}a^4c^3\right)\xi_1\eta_2\eta_1\xi_2^3-$$
$$-\frac{705}{128}a^4c^4\eta_2^6+\left(-\frac{43}{432}a^4-\frac{27}{16}a^4c-\frac{251}{192}a^4c^2-\frac{45}{4}a^4c^3\right)\eta_2^2\eta_1^2\xi_2^2+$$
$$+\left(-\frac{43}{432}a^4-\frac{27}{16}a^4c-\frac{251}{192}a^4c^2-\frac{45}{4}a^4c^3\right)\xi_2^2\xi_1^2\eta_2^2+\left(-\frac{5}{16}a^4c-\frac{691}{192}a^4c^2-\frac{311}{432}a^4\right)\eta_1^2\xi_1^2\xi_2^2+$$
$$+\left(-\frac{167}{384}a^4c^2-\frac{19}{864}a^4-\frac{401}{64}a^4c^3+\frac{85}{288}a^4c\right)\xi_1^2\eta_2^4+\left(-\frac{5}{16}a^4c-\frac{691}{192}a^4c^2-\frac{311}{432}a^4\right)\xi_1^2\eta_2^2\eta_1^2+$$
$$+\left(-\frac{319}{64}a^4c^3-\frac{571}{288}a^4c-\frac{335}{384}a^4c^2-\frac{67}{864}a^4\right)\eta_2^4\eta_1^2+\left(-\frac{7}{16}a^4c-\frac{67}{1152}a^4\right)\eta_1^2\xi_1^4+$$
$$+\left(\frac{7}{192}a^4c+\frac{1}{54}a^4-\frac{811}{384}a^4c^2\right)\eta_2^2\xi_1^4+\left(-\frac{7}{16}a^4c-\frac{67}{1152}a^4\right)\xi_1^2\eta_1^4+$$
$$+\left(-\frac{571}{384}a^4c^2-\frac{67}{192}a^4c-\frac{319}{432}a^4\right)\eta_2^2\eta_1^4+\left(-\frac{571}{384}a^4c^2-\frac{67}{192}a^4c-\frac{319}{432}a^4\right)\xi_1^4\xi_2^2+$$
$$+\left(-\frac{319}{64}a^4c^3-\frac{571}{288}a^4c-\frac{335}{384}a^4c^2-\frac{67}{864}a^4\right)\xi_1^2\xi_2^4+\left(\frac{7}{192}a^4c+\frac{1}{54}a^4-\frac{811}{384}a^4c^2\right)\eta_1^4\xi_2^2+$$
$$+\left(-\frac{167}{384}a^4c^2-\frac{19}{864}a^4-\frac{401}{64}a^4c^3+\frac{85}{288}a^4c\right)\eta_1^2\xi_2^4-\frac{2115}{128}a^4c^4\xi_2^2\eta_2^4-\frac{2115}{128}a^4c^4\xi_2^4\eta_2^2 \tag{6г}$$

и приближенный интеграл движения

$$I=-\frac{5}{48}a^2p_1^4-\frac{5}{48}a^2q_1^4-\frac{15}{16}a^2c^2p_2^4-\frac{15}{16}a^2c^2q_2^4+\left(\frac{1}{2}a^2c-a^2\right)p_2q_2p_1q_1+$$
$$+\left(-\frac{7}{8}a^2c+\frac{1}{12}a^2\right)p_2^2q_1^2+\left(-\frac{7}{8}a^2c+\frac{1}{12}a^2\right)q_2^2p_1^2-\frac{5}{24}a^2p_1^2q_1^2-\frac{15}{8}a^2c^2p_2^2q_2^2+$$
$$+\left(-\frac{5}{8}a^2c-\frac{5}{12}a^2\right)p_2^2p_1^2+\left(-\frac{5}{8}a^2c-\frac{5}{12}a^2\right)q_2^2q_1^2. \tag{7}$$

2. Для нерезонансного (частоты $\omega_1,\omega_2,\omega_3$ – несоизмеримы) гамильтониана Гарнье [2]:

$$H=\frac{1}{2}\omega_1\left(p_1^2+q_1^2\right)+\frac{1}{2}\omega_2\left(p_2^2+q_2^2\right)+\frac{1}{2}\omega_3\left(p_3^2+q_3^2\right)+\left(\frac{q_1^2}{\omega_1}+\frac{q_2^2}{\omega_2}+\frac{q_3^2}{\omega_3}\right)^2, \tag{8}$$

с тремя степенями свободы до степени $SMAX=4$ была получена нормальная форма

$$G_6=G^{(2)}+G^{(4)}, \tag{9а}$$

$$G^{(2)}=\frac{1}{2}\left(\omega_1\left(\eta_1^2+\xi_1^2\right)+\omega_2\left(\eta_2^2+\xi_2^2\right)+\omega_3\left(\eta_3^2+\xi_3^2\right)\right), \tag{9б}$$

$$G^{(4)}=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\frac{\eta_1^2\xi_1^2}{\omega_1^2}+\frac{3}{2}\frac{\eta_2^2\xi_2^2}{\omega_2^2}+\frac{3}{2}\frac{\eta_3^2\xi_3^2}{\omega_3^2}+\frac{\xi_1^2\xi_2^2}{\omega_1\omega_2}+\frac{\xi_1^2\xi_3^2}{\omega_1\omega_3}+\frac{\xi_2^2\xi_3^2}{\omega_2\omega_3}+\right.$$

$$+\frac{\eta_1^2\eta_2^2}{\omega_1\omega_2}+\frac{\eta_1^2\xi_2^2}{\omega_1\omega_2}+\frac{\xi_1^2\eta_2^2}{\omega_1\omega_2}+\frac{\eta_1^2\eta_3^2}{\omega_1\omega_3}+\frac{\eta_1^2\xi_3^2}{\omega_1\omega_3}+\frac{\xi_1^2\eta_3^2}{\omega_1\omega_3}+\frac{\eta_2^2\eta_3^2}{\omega_2\omega_3}+\frac{\eta_2^2\xi_3^2}{\omega_2\omega_3}+$$
$$\left.+\frac{\xi_2^2\eta_3^2}{\omega_2\omega_3}+\frac{3}{4}\frac{\xi_1^4}{\omega_1^2}+\frac{3}{4}\frac{\xi_2^4}{\omega_2^2}+\frac{3}{4}\frac{\xi_3^4}{\omega_3^2}+\frac{3}{4}\frac{\eta_1^4}{\omega_1^2}+\frac{3}{4}\frac{\eta_2^4}{\omega_2^2}+\frac{3}{4}\frac{\eta_3^4}{\omega_3^2}\right) \qquad (9в)$$

и интегралы движения

$$I_1=\frac{5}{8}\frac{q_1^4}{\omega_1^2}-\frac{3}{4}\frac{p_1^2q_1^2}{\omega_1^2}+\frac{1}{2}\frac{q_2^2q_1^2\left(2\omega_1^2-\omega_2^2\right)}{\omega_1\left(\omega_1^2-\omega_2^2\right)\omega_2}-\frac{1}{2}\frac{p_2^2q_1^2\omega_2}{\omega_1\left(\omega_1^2-\omega_2^2\right)}+\frac{1}{2}\frac{q_3^2q_1^2\left(2\omega_1^2-\omega_3^2\right)}{\omega_1\omega_3\left(\omega_1^2-\omega_3^2\right)}-$$
$$-\frac{1}{2}\frac{p_3^2q_1^2\omega_3}{\omega_1\left(\omega_1^2-\omega_3^2\right)}+\frac{1}{2}\omega_1q_1^2+\frac{2q_2p_1q_1p_2}{\omega_1^2-\omega_2^2}+\frac{2p_1q_1p_3q_3}{\omega_1^2-\omega_3^2}-\frac{3}{8}\frac{p_1^4}{\omega_1^2}-\frac{1}{2}\frac{q_2^2p_1^2\left(2\omega_1^2-\omega_2^2\right)}{\omega_1\left(\omega_1^2-\omega_2^2\right)\omega_2}+$$
$$+\frac{1}{2}\frac{p_2^2p_1^2\omega_2}{\omega_1\left(\omega_1^2-\omega_2^2\right)}-\frac{1}{2}\frac{q_3^2p_1^2\left(2\omega_1^2-\omega_3^2\right)}{\omega_1\omega_3\left(\omega_1^2-\omega_3^2\right)}+\frac{1}{2}\frac{p_3^2p_1^2\omega_3}{\omega_1\left(\omega_1^2-\omega_3^2\right)}+\frac{1}{2}\omega_1p_1^2, \qquad (10а)$$

$$I_2=\frac{1}{2}\frac{q_1^2q_2^2\left(-2\omega_2^2+\omega_1^2\right)}{\omega_2\left(\omega_1^2-\omega_2^2\right)\omega_1}-\frac{1}{2}\frac{q_1^2p_2^2\left(-2\omega_2^2+\omega_1^2\right)}{\omega_2\left(\omega_1^2-\omega_2^2\right)\omega_1}-\frac{2q_2p_1q_1p_2}{\omega_1^2-\omega_2^2}+\frac{1}{2}\frac{p_1^2q_2^2\omega_1}{\omega_2\left(\omega_1^2-\omega_2^2\right)}-$$
$$-\frac{1}{2}\frac{p_1^2p_2^2\omega_1}{\omega_2\left(\omega_1^2-\omega_2^2\right)}+\frac{5}{8}\frac{q_2^4}{\omega_2^2}-\frac{3}{4}\frac{q_2^2p_2^2}{\omega_2^2}+\frac{1}{2}\frac{q_2^2q_3^2\left(2\omega_2^2-\omega_3^2\right)}{\omega_2\omega_3\left(\omega_2^2-\omega_3^2\right)}-\frac{1}{2}\frac{q_2^2p_3^2\omega_3}{\omega_2\left(\omega_2^2-\omega_3^2\right)}+$$
$$+\frac{1}{2}\omega_2q_2^2+\frac{2q_2p_2p_3q_3}{\omega_2^2-\omega_3^2}-\frac{3}{8}\frac{p_2^4}{\omega_2^2}-\frac{1}{2}\frac{p_2^2q_3^2\left(2\omega_2^2-\omega_3^2\right)}{\omega_2\omega_3\left(\omega_2^2-\omega_3^2\right)}+\frac{1}{2}\frac{p_2^2p_3^2\omega_3}{\omega_2\left(\omega_2^2-\omega_3^2\right)}+\frac{1}{2}\omega_2p_2^2, \quad (10б)$$

$$I_3=\frac{1}{2}\frac{q_1^2q_3^2\left(-2\omega_3^2+\omega_1^2\right)}{\omega_3\left(\omega_1^2-\omega_3^2\right)\omega_1}-\frac{1}{2}\frac{q_1^2p_3^2\left(-2\omega_3^2+\omega_1^2\right)}{\omega_3\left(\omega_1^2-\omega_3^2\right)\omega_1}-\frac{2p_1q_1p_3q_3}{\omega_1^2-\omega_3^2}+\frac{1}{2}\frac{p_1^2q_3^2\omega_1}{\omega_3\left(\omega_1^2-\omega_3^2\right)}-\frac{1}{2}\frac{p_1^2p_3^2\omega_1}{\omega_3\left(\omega_1^2-\omega_3^2\right)}+$$
$$+\frac{1}{2}\frac{q_2^2q_3^2\left(\omega_2^2-2\omega_3^2\right)}{\omega_3\omega_2\left(\omega_2^2-\omega_3^2\right)}-\frac{1}{2}\frac{q_2^2p_3^2\left(\omega_2^2-2\omega_3^2\right)}{\omega_3\omega_2\left(\omega_2^2-\omega_3^2\right)}-\frac{2q_2p_2p_3q_3}{\omega_2^2-\omega_3^2}+\frac{1}{2}\frac{p_2^2q_3^2\omega_2}{\omega_3\left(\omega_2^2-\omega_3^2\right)}-$$
$$-\frac{1}{2}\frac{p_2^2p_3^2\omega_2}{\omega_3\left(\omega_2^2-\omega_3^2\right)}+\frac{5}{8}\frac{q_3^4}{\omega_3^2}-\frac{3}{4}\frac{q_3^2p_3^2}{\omega_3^2}+\frac{1}{2}\omega_3q_3^2-\frac{3}{8}\frac{p_3^4}{\omega_3^2}+\frac{1}{2}\omega_3p_3^2. \qquad (10в)$$

3. Для резонансного ($\omega_1=\omega_2=\omega_3=1$) гамильтониана Гарнье [2]:

$$H=\frac{1}{2}\left(p_1^2+q_1^2+p_2^2+q_2^2+p_3^2+q_3^2\right)+\left(q_1^2+q_2^2+q_3^2\right)^2, \qquad (11)$$

была получена нормальная форма порядка $SMAX=6$

$$G_6=G^{(2)}+G^{(4)}+G^{(6)}, \qquad (12а)$$

$$G^{(2)}=\frac{1}{2}\left(\eta_1^2+\xi_1^2+\eta_2^2+\xi_2^2+\eta_3^2+\xi_3^2\right), \qquad (12б)$$

$$G^{(4)}=\eta_1\xi_1\eta_2\xi_2+\eta_1\xi_1\eta_3\xi_3+\eta_2\xi_2\eta_3\xi_3+\frac{3}{4}\xi_1^2\xi_3^2+\frac{3}{4}\xi_1^2\xi_2^2+\frac{3}{4}\xi_2^2\xi_3^2+\frac{3}{8}\xi_1^4+\frac{3}{8}\xi_2^4+$$
$$+\frac{3}{8}\xi_3^4+\frac{1}{4}\eta_1^2\xi_2^2+\frac{3}{4}\eta_1^2\xi_1^2+\frac{1}{4}\eta_1^2\xi_3^2+\frac{1}{4}\xi_1^2\eta_3^2+\frac{3}{8}\eta_1^4+\frac{3}{8}\eta_2^4+\frac{3}{8}\eta_3^4+\frac{1}{4}\xi_1^2\eta_2^2+$$
$$+\frac{3}{4}\eta_2^2\xi_2^2+\frac{1}{4}\eta_2^2\xi_3^2+\frac{1}{4}\xi_2^2\eta_3^2+\frac{3}{4}\eta_3^2\xi_3^2+\frac{3}{4}\eta_1^2\eta_2^2+\frac{3}{4}\eta_1^2\eta_3^2+\frac{3}{4}\eta_2^2\eta_3^2, \qquad (12в)$$

$$
\begin{aligned}
G^{(6)} = &-\frac{9}{4}\eta_1\xi_1\eta_3\eta_2^2\xi_3-\frac{9}{4}\eta_1\xi_1\eta_3^2\eta_2\xi_2-\frac{9}{4}\eta_1\xi_1\eta_3\xi_2^2\xi_3-\frac{9}{4}\eta_2\xi_2\eta_3\eta_1^2\xi_3-\frac{9}{4}\eta_2\xi_2\eta_3\xi_1^2\xi_3-\\
&-\frac{9}{4}\eta_1\xi_1\eta_2\xi_2\xi_3^2-\frac{9}{4}\eta_1^3\xi_1\eta_3\xi_3-\frac{9}{4}\eta_1\xi_1^3\eta_3\xi_3-\frac{9}{4}\eta_1\xi_1\eta_3^3\xi_3-\frac{9}{4}\eta_1\xi_1\eta_3\xi_3^3-\frac{9}{4}\eta_2^3\xi_2\eta_3\xi_3-\\
&-\frac{9}{4}\eta_2\xi_2^3\eta_3\xi_3-\frac{9}{4}\eta_2\xi_2\eta_3^3\xi_3-\frac{9}{4}\eta_2\xi_2\eta_3\xi_3^3-\frac{9}{4}\eta_1^3\xi_1\eta_2\xi_2-\frac{9}{4}\eta_1\xi_1^3\eta_2\xi_2-\frac{9}{4}\eta_1\xi_1\eta_2^3\xi_2-\\
&-\frac{9}{4}\eta_1\xi_1\eta_2\xi_2^3-\frac{51}{32}\xi_1^4\xi_3^2-\frac{51}{32}\xi_1^2\xi_3^4-\frac{51}{32}\xi_2^4\xi_3^2-\frac{51}{32}\xi_2^2\xi_3^4-\frac{15}{32}\xi_3^4\eta_1^2-\frac{15}{32}\xi_3^4\eta_2^2-\frac{51}{32}\xi_3^4\eta_3^2-\\
&-\frac{15}{32}\eta_1^4\xi_3^2-\frac{15}{32}\eta_2^4\xi_3^2-\frac{51}{32}\eta_3^4\xi_3^2-\frac{51}{32}\xi_1^4\xi_2^2-\frac{51}{32}\xi_1^2\xi_2^4-\frac{15}{32}\xi_2^4\eta_1^2-\frac{15}{32}\xi_2^4\eta_3^2-\frac{51}{32}\xi_2^4\eta_2^2-\\
&-\frac{15}{32}\eta_1^4\xi_2^2-\frac{51}{32}\eta_2^4\xi_2^2-\frac{15}{32}\xi_2^2\eta_3^4-\frac{15}{32}\xi_1^4\eta_2^2-\frac{15}{32}\xi_1^4\eta_3^2-\frac{51}{32}\xi_1^4\eta_1^2-\frac{51}{32}\eta_1^4\xi_1^2-\frac{15}{32}\xi_1^2\eta_2^4-\\
&-\frac{15}{32}\xi_1^2\eta_3^4-\frac{51}{32}\eta_1^4\eta_3^2-\frac{51}{32}\eta_1^2\eta_3^4-\frac{51}{32}\eta_2^4\eta_3^2-\frac{51}{32}\eta_2^2\eta_3^4-\frac{51}{32}\eta_1^4\eta_2^2-\frac{51}{32}\eta_1^2\eta_2^4-\frac{33}{16}\eta_1^2\xi_1^2\eta_3^2-\\
&-\frac{33}{16}\eta_2^2\xi_2^2\eta_3^2-\frac{33}{16}\xi_1^2\xi_3^2\eta_1^2-\frac{15}{16}\xi_1^2\xi_3^2\eta_2^2-\frac{51}{16}\xi_1^2\xi_3^2\xi_2^2-\frac{33}{16}\xi_1^2\xi_3^2\eta_3^2-\frac{15}{16}\xi_2^2\xi_3^2\eta_1^2-\frac{33}{16}\xi_2^2\xi_3^2\eta_2^2
\end{aligned}
\tag{12г}
$$

и интеграл движения

$$
\begin{aligned}
I = {}& p_1q_1p_2q_2+p_1q_1p_3q_3+p_2q_2p_3q_3+\frac{3}{4}q_1^2q_3^2+\frac{3}{4}q_1^2q_2^2+\frac{3}{4}q_2^2q_3^2+\frac{3}{8}q_1^4+\frac{3}{8}q_2^4+\\
&+\frac{3}{8}q_3^4+\frac{1}{4}p_1^2q_2^2+\frac{3}{4}p_1^2q_1^2+\frac{1}{4}p_1^2q_3^2+\frac{1}{4}q_1^2p_3^2+\frac{3}{8}p_1^4+\frac{3}{8}p_2^4+\frac{3}{8}p_3^4+\frac{1}{4}q_1^2p_2^2+\\
&+\frac{3}{4}p_2^2q_2^2+\frac{1}{4}p_2^2q_3^2+\frac{1}{4}q_2^2p_3^2+\frac{3}{4}p_3^2q_3^2+\frac{3}{4}p_1^2p_2^2+\frac{3}{4}p_1^2p_3^2+\frac{3}{4}p_2^2p_3^2\,.
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Выводы и перспективы дальнейших исследований.

Представленная программа будет использована для нормализации и получения интегралов движения других гамильтоновых систем, а также для построения сечений Пуанкаре и для нахождения приближенных решений систем дифференциальных уравнений в гамильтоновой форме. Кроме того, разработанная программа может быть использована другими исследователями, которые проводят изучение нелинейных гамильтоновых систем.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Арнольд В.И. Математические методы классической механики / В.И. Арнольд. – М.: Наука, 1974. – 432с.
2. Переломов А.М. Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли / А.М. Переломов. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002. – 238с.
3. Гориэли А. Интегрируемость и сингулярность / А. Гориэли. – М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика»; Институт компьютерных исследований, 2006. – 316с.
4. Джакалья Г.Е.О. Методы теории возмущений для нелинейных систем / Г.Е.О. Джакалья. – М.: Наука, 1979. – 320с.
5. Боголюбов Н.Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. / Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский. – М.: Наука, 1974. – 504с.
6. Найфэ А. Методы возмущений./ А. Найфэ. – М.: Мир, 1976. – 456 с.
7. Найфэ А. Введение в методы возмущений / А. Найфэ – М.: Мир, 1984. – 535с.

8. Березин И.С. Методы вычислений. / И.С. Березин, Н.П. Жидков. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит.-т.2., 1962. – 640с.
9. Форсайт Дж. Машинные методы математических вычислений. / Дж. Форсайт, М. Мальколм, К. Моулер. – М.: Мир, 1980. – 277с.
10. Уилкинсон Дж. Справочник алгоритмов на языке АЛГОЛ. Линейная алгебра. / Дж. Уилкинсон, К. Райнш. – М.: Машиностроение, 1976.–392с.
11. Basios, V. GITA: a REDUCE program for the normalization of polynomial Hamiltonians. / V. Basios, N. A. Chekanov, B. L. Markovski, V. A. Rostovtsev, S.I. Vinitsky // Comp. Phys. Commun. – 1995. – v. 90. – p. 355 – 368.
12. Биркгоф Дж. Динамические системы / Дж. Биркгоф – Москва-Ижевск.: РХД, 2002. – 406с.
13. Gustavson F.G. On construction formal integral of a Hamiltonian system near an equilibrium point. / F.G. Gustavson // Astronom. J. – 1966. – v.71. – no.8. – pp.670-686.

БОГАЧЕВ Василий Евгеньевич – аспирант кафедры математического анализа Белгородского государственного университета.

Научные интересы:

– математическое и компьютерное моделирование, дифференциальные уравнения, гамильтоновы системы.

ЧЕКАНОВ Николай Александрович – д. ф.-м. н., заведующий кафедрой физики Старооскольского технологического института (филиал) Национального исследовательского университета «МИСиС», профессор кафедры прикладной математики и механики Белгородского государственного университета.

Научные интересы:

– классическая и квантовая механика, динамический хаос, дифференциальные уравнения, уравнение Шредингера, математическое моделирование.