УДК 62-50

Ю.Л. Меньшиков

АЛГОРИТМЫ СИНТЕЗА АДЕКВАТНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОПИСАНИЙ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Постановка проблемы. Одной из основных задач математического моделирования динамических систем является построение такого математического описания реального процесса, которое позволяет получать результаты моделирования, совпадающие с экспериментальными данными (измерениями). Такого совпадения добиваются путем построения «правильной» математической модели динамической системы или процесса (ММ) и выбором «хорошей» модели внешнего воздействия (МВВ). Под «правильной» ММ интуитивно понимается такая ММ, поведение которой совпадает с экспериментальными измерениями с приемлемой точностью под действием МВВ, которая соответствует реальному внешнему воздействию («хорошая» МВВ). Таким образом, степень «правильности» ММ зависит непосредственно от выбранной МВВ и от требуемой точности совпадения с экспериментом.

Анализ достижений и публикаций по теме исследований. В настоящее время существует два основных подхода к проблеме синтеза пары: математическая модель поведения физического процесса и модель внешнего воздействия [1-3]:

1) по математической модели физического процесса выбранной априори структурой и неточными параметрами, определяется такая модель внешнего воздействия, в совокупности с которой результаты математического моделирования совпадают с экспериментом с заданной точностью;
2) по априори выбранной модели внешнего воздействия синтезируется математическая модель поведения физической системы известной структуры, для которой результаты математического моделирования совпадают с экспериментом с заданной точностью.

Цель статьи. Целью данной работы является построение возможных алгоритмов синтеза математических описаний реальных физических процессов в рамках первого подхода, которые позволяют получать в дальнейшем адекватные экспериментам результаты математического моделирования.

Основная часть. Сформулируем определение адекватности математического описания.

Определение. Математическое описание реального процесса будем считать адекватным относительно выбранных переменных состояния математической модели, если, при некотором ограничении на внешние воздействия и на величину переменных состояния реальной динамической системы и при одних и тех же дополнительных условиях (начальных и граничных), переменные состояния совпадают с экспериментальными измерениями физических характеристик реальной динамической системы в выбранной метрике с точностью экспериментальных измерений и точностью задания параметров математической модели динамической системы.

Ограничимся рассмотрением только динамическими системами (процессами), которые описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями. Будем под математическим описанием динамических систем в данном случае понимать дифференциальные уравнения движения процесса $\tilde{x}(t) = (\tilde{x}_1(t), \tilde{x}_2(t), \dots \tilde{x}_{n_1}(t))^T$ (выходы) и внешнее воздействие $\tilde{z}(t) = (\tilde{z}_1(t), \tilde{z}_2(t), \dots \tilde{z}_{m_1}(t))^T$ (входы), $(\cdot)^T$ – знак транспонирования. Например, в случае линейной динамической системы математическое описание может иметь следующий вид [1]:

$$\dot{\tilde{x}} = C_1 \tilde{x} + D_1 \tilde{z}\,, \tag{1}$$

где C_1, D_1 есть матрицы с постоянными коэффициентами.

Предположим, что уравнение наблюдения имеет вид:

$$\tilde{y} = F_1 \tilde{x}\,,$$

где $\tilde{y}(t) = (\tilde{y}_1(t), \tilde{y}_2(t), \ldots \tilde{y}_{n_1}(t))^T$, F_1 – квадратная невырожденная матрица с постоянными коэффициентами. Внешнее воздействие $\tilde{z}$ предполагается неизвестным, согласно первому подходу.

В случае, если часть внешних воздействий известна, то этот случай можно свести к рассматриваемому, используя линейность динамической системы.

Будем рассматривать известную переменную состояния $x_j(t)$ как два известных внутренних воздействия $d_j \tilde{x}_j(t)$ и $[-d_j \tilde{x}_j(t)], 1 \le j \le n_1, d_j$ – постоянные. Такая интерпретация переменной состояния позволяет упростить исходную систему. Будем называть такое преобразование « j сечением» исходной системы [1,2]. Во многих случаях после ряда «сечений» исходная система (1) преобразуется в некоторую подсистему, у которой известна по крайней мере одна переменная состояния, например, $\tilde{x}_1(t) = \tilde{x}(t)$ и известны все скалярные внешние воздействия $\tilde{z}_k(t), k = 2, \ldots, m_1$, кроме одного, например, $\tilde{z}_1(t)$. Далее, с использованием импульсной переходной функции можно записать уравнение относительно неизвестной скалярной функции $\tilde{z}_1(t)$:

$$A_p z_1 = \int_0^t K_1(t-\tau)\tilde{z}_1(\tau)\,d\tau = \tilde{u}_1(t) = B_1 \tilde{x}_1,\ \tilde{x}_1 \in X\,, \tag{2}$$

где $K_1(t-\tau)$ – известное ядро, A_p – оператор определенной структуры, $A_p : Z \to U$; $B_1 : X \to U$; X, U, Z – нормированные функциональные пространства. Используя иной набор «сечений» исходной системы (1), можно получить аналогичные уравнения для всех остальных неизвестных скалярных функций $\tilde{z}_k(t),\ k = 2, \ldots, m_1$. В общем случае, эти уравнения можно представить в виде:

$$A_p z = B_p \tilde{x}_\delta\,. \tag{3}$$

Если с помощью ряда «сечений» не удается выделить подсистему с одним неизвестным скалярным внешним воздействием, тогда приведенные рассуждения теряют силу.

Таким образом, синтез адекватного математического описания сводится к решению нескольких интегральных уравнений типа (3) с целью формирования вектор-функции внешних $\tilde{z}(t) = (\tilde{z}_1(t), \tilde{z}_2(t), \ldots \tilde{z}_{m_1}(t))^T$, которая совместно с математической моделью (1) будет давать результаты математического, совпадающие с экспериментальными данными (измерениями) с точностью определения правой части уравнения (3) [1,2,4,5].

Характерной чертой для рассматриваемых задач является то, что оператор A_p в уравнении (3) является вполне непрерывным [1,6].

Будем предполагать, что исходные данные $\tilde{x}_\delta(t) = (\tilde{x}_1(t), \ldots, \tilde{x}_{n_1}(t))^T$ получены экспериментальным путем с некоторой известной априори погрешностью:

$$\| x_T - \tilde{x}_\delta \|_X \le \delta\,, \tag{4}$$

где x_T – точные исходные данные.

При выполнении конкретных расчетов следует учитывать, что операторы A_p, B_p зависят от вектора параметров p математической модели движения динамической системы, который определяется приближенно с некоторой погрешностью. Таким образом, будем полагать, что выполняются неравенства:

$$\left\| A_p - A_T \right\|_{Z \to U} \le h, \quad \left\| B_p - B_T \right\|_{X \to U} \le d, \tag{6}$$

где A_T, B_T – точные операторы в уравнении (4), h, d – известные величины.

Проверка адекватности математического описания (математической модели физического процесса в совокупности с моделью внешнего воздействия) сводится к проверке выполнения неравенства

$$\left\| A_p z - B_p \tilde{x}_\delta \right\|_U \le \varepsilon, \tag{5}$$

где ε – const, $\varepsilon > 0$, ε – требуемая точность совпадения с экспериментом.

Такая степень адекватности математического описания будет обеспечена, если решение уравнения (3) выполнить с точностью исходных данных (правой части) равной ε.

Если величину ε в неравенстве (5) выбирать волевым способом, то результаты проверки адекватности будут зависить от субъективных факторов. Поэтому представляет смысл конструировать критерии проверки адекватности, в которых величина ε определяется объективными факторами.

Очевидно, что если операторы A_p, B_p не будут изменяться в будущем при математическом моделировании, то в качестве ε можно взять величину $\left\| B_p \right\| \cdot \delta$. Этот вывод следует из оценки

$$\left\| A_p z_T - B_p \tilde{x}_\delta \right\| = \left\| B_p x_T - B_p \tilde{x}_\delta \right\| \le \left\| B_p \right\| \cdot \left\| x_T - \tilde{x}_\delta \right\| \le \left\| B_p \right\| \cdot \delta, \tag{7}$$

где $A_p z_T = B_p x_T$.

Естественно, что ε не может быть меньше величины $B_0 \delta, \;\; B_0 = \sup\limits_p \left\| B_p \right\|$.

Очевидно, что при выполнении неравенства (5) операторы A_p, B_p и функция z связаны между собой. Нетрудно показать, что при фиксированных операторах A_p, B_p в (5) и любом ε существует бесконечно много различных функций z, которые будут удовлетворять неравенству (5) [1,6]. И наоборот, при некоторой фиксированной функции z существует бесконечно много различных операторов A_p, B_p, для которых выполняется (5) [1,6].

Если учитывать погрешность операторов A_p, B_p, тогда в неравенстве (5) величину ε следует выбирать по иному алгоритму. Будем предполагать, что существуют точные операторы A_T, B_T, удовлетворяющие неравенствам (8), для которых выполняется равенство

$$B_T x_T = u_T = A_T z_T,$$

где z_T – точное решение уравнения (3).

Тогда справедлива оценка

$$\left\| A_p z_T - B_p \tilde{x}_\delta \right\|_U = \left\| A_T z_T - A_T x_T + A_p x_T - B_p \tilde{x}_\delta \right\|_U \le \left\| A_T - A_p \right\|_U \left\| z_T \right\|_U +$$
$$+ \left\| A_T z_T - B_p \tilde{x}_\delta \right\|_U \le h \left\| z_T \right\|_Z + \left\| B_T x_T - B_p \tilde{x}_\delta \right\|_U \le$$

$$\le h\| z_T\|_Z + \| B_T x_T - B_p x_T\|_U + \| B_p x_T - B_p x_\delta\|_U \le h\| z_T\|_Z + d\cdot\| x_T\|_X + \| B_p\|\cdot\delta .$$

Таким образом, можно принять

$$\varepsilon = h\| z_T\|_Z + d\cdot\| x_T\|_X + \| B_p\|\cdot\delta . \quad (8)$$

Оценка (8) является объективной, но слишком грубой, если учесть , что величины h, d могут быть вычислены только, если известны точные операторы A_T, B_T. Кроме того, величина $\| z_T\|_Z$ не является априори известной. Таким образом, оценка (8) не является конструктивной. Хотя величина $\| z_T\|_Z$ легко оценивается через известные величины $\| \tilde{x}_\delta\|_Z$ и δ:

$$\| x_T\|_X \le \| x_T - \tilde{x}_\delta + \tilde{x}_\delta\|_X \le \| x_T - \tilde{x}_\delta\|_X + \| \tilde{x}_\delta\| \le \delta + \| \tilde{x}_\delta\| .$$

Пусть z_p есть решение экстремальной задачи:

$$\Omega[z_p] = \inf_{z\in Q_{\delta,p}} \Omega[z], \quad (9)$$

где $\Omega[z]$ – стабилизирующий квазимонотонный функционал [3,4],

$$Q_{\delta,p} = \{z : \| A_p z - B_p\tilde{x}_\delta\| \le \| B_p\|\cdot\delta\} .$$

Очевидно, что любая функция из множества $Q_{\delta,p}$, включая z_p, будет удовлетворять условию адекватности (5) при $\varepsilon = \| B_p\|\cdot\delta$.

В работах [7,8] предложено несколько нестандартных задач построения адекватного математического описания. Например, возможно рассмотреть следующую задачу определения модели внешнего воздействия в рамках первого подхода:

$$\inf_{A_p, B_p} \inf_{z\in Q_{\delta,p}} \Omega[z] = \inf_{A_p, B_p} \Omega[z_p] = \Omega[z_p^0]. \quad (10)$$

В этом случае оценка адекватности может иметь вид:

$$\| A_p z - B_p\tilde{x}_\delta\| \le h\, \| z_p^o\| + d\, \| \tilde{x}_\delta\| + \| B_p\|\cdot\delta .$$

При этом использовалось свойство $\| A_p z_p - B_p\tilde{x}_\delta\| = \| B_p\|\cdot\delta$ регуляризованного решения для квазимонотонных функционалов $\Omega[z]$ [8,9].

Для экстремальной задачи

$$\sup_{A_p, B_p} \inf_{z\in Q_{\delta,p}} \Omega[z] = \sup_{A_p, B_p} \Omega[z_p] = \Omega[z_p^1] \quad (11)$$

оценка адекватности (5) имеет вид с величиной ε равной

$$\varepsilon = h\, \| z_p^o\| + d\, \| \tilde{x}_\delta\| + \| B_p\|\cdot\delta . \quad (12)$$

Для экстремальной задачи

$$\inf_{A_p, B_p} \| A_p z_p\| = \| A_{p^0} z_{p^0}\| \quad (13)$$

оценка адекватности (5) имеет вид с величиной ε равной

$$\varepsilon = \| A_p - A_{p^0}\| \| z_{p^0}\| + \| B_p - B_{p^0}\| \| \tilde{x}_\delta\| . \quad (14)$$

Для экстремальной задачи

$$\sup_{A_p, B_p} \| A_p z_p\| = \| A_{p^1} z_{p^1}\| \quad (15)$$

оценка адекватности (5) имеет вид с величиной ε равной

$$\varepsilon = \left\| A_p - A_{p^1} \right\| \left\| z_{p^1} \right\| + \left\| B_p - B_{p^1} \right\| \left\| \tilde{x}_\delta \right\| . \qquad (16)$$

Таким образом, для различных алгоритмов построения моделей внешних воздействий, которые дают адекватные результаты математического моделирования в рамках первого подхода существуют различные объективные оценки адекватности.

Выводы и перспективы дальнейших исследований. В работе рассматривается проблема синтеза адекватного математического описания для физических процессов, поведение которых хорошо описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Рассмотрен один из возможных подходов решения указанной проблемы. Предложены объективные критерии оценки адекватности математического описания изучаемого процесса.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Menshikov Yu.L. Identification of Models of External Loads/ Yu.L. Menshikov // Proc. of ICINCO 2007, May 9-12, 2007, Angers, France. – P. 376–379.
2. Меньшиков Ю.Л. О адекватности результатов математического моделирования/ Ю.Л. Меньшиков// Сб.трудов конф. Моделирование–2008, 16-18 мая, 2008.– Киев, 2008. – С.119 – 124.
3. Спепашко В.С. Метод критических дисперсий как аналитический аппарат теории индуктивного моделирования/ В.С. Спепашко // Проблемы управления и информатики. – 2008. – №2.– С.8–26.
4. Menshikov Yu. Algorithms of construction of adequate mathematical description of dynamic system/ Yu. Menshikov // 6-th Vienna Conference on mathematical Modelling. –Vienna, Full Papers CD Volume, Vienna Univ. of Technology. – 2009. – P.2482-2485. ISBM 978-3-901608-35-3.
5. Menshikov Yu. Synthesis of Adequate Mathematical Description as Inverse Problem/ Yu. Menshikov//Proc. 5th Int. Conference “Inverse Problems: Modeling & Simulation”, Antalya, Turkey, May 24-29, 2010. – 2010. – P.185 – 186.
6. Тихонов А.Н. Методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. – М.: Наука, 1979. – 288 с.
7. Меньшиков Ю.Л. Идентификация моделей внешнего воздействия/ Ю.Л. Меньшиков // Вестник ХГТУ.– Херсон,2002.– №2 (15).– С.326 – 329.
8. Меньшиков Ю.Л. Идентификация моделей внешних воздействий/ Ю.Л.Меньшиков , Н.В. Поляков. – Дніпропетровськ: Наука та Освіта, 2009. – 188 с.

МЕНЬШИКОВ Юрий Леонидович – к.т.н., доцент кафедры дифференциальных уравнений Днепропетровского национального университета.

Научные интересы:

– методы решения обратных задач, общие вопросы математического моделирования.